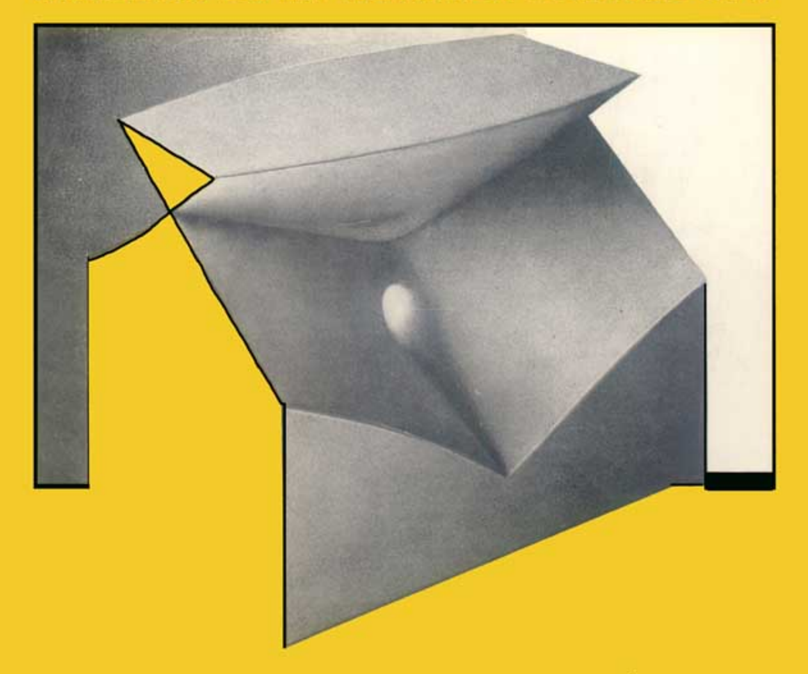
B. Dubrovin, S. Nóvikov, A. Fomenko

GEOMETRÍA moderna

MÉTODOS DE LA TEORÍA DE HOMOLOGÍAS



EDITORIAL MIR MOSCÚ

GEOMETRÍA moderna

Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ

Москва «Наука» Главная редакция
физико-математической литературы

B. Dubrovin, S. Nóvikov, A. Fomenko

GEOMETRÍA moderna

MÉTODOS DE LA TEORÍA DE HOMOLOGÍAS



EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por L. Popova

Impreso en la URSS

На испанском языке

INDICE

PREFACIO

Tradicionalmente, la teoría de homologías desempeña un papel fundamental en la exposición de los principios de la topología. A partir de H. Poincaré, quien fundó las bases de la topología, la teoría de homologías se considera como una base inicial de los métodos de la topología algebraica. En la teoría de homotopías sólo el grupo fundamental y los cubrimientos se refieren, por tradición, a estos principios. Prácticamente, todos los manuales clásicos iniciales de topología (entre los cuales el mejor es, a juicio de los autores, el libro «Lehrbuch der Topologie» de H. Seifert y W. Threlfall) comienzan con exponer la teoría de homologías de una u otra clase de los complejos. Solo en una etapa posterior (además, desde el punto de vista de la teoría de las homologías), se consideran la teoría de los espacios fibrados y el problema general sobre la clasificación de las clases homotópicas de aplicaciones (teoría de las homotopías). Al mismo tiempo, los métodos de la topología de variedades diferenciables, que comenzaron a desarrollarse intensivamente desde los años 30 (Whitney y otros), permiten reconstruir por completo la exposición de los principios fundamentales de la topología moderna. Desde un nuevo punto de vista más próximo al análisis clásico, resulta primaria la teoría elemental de las variedades suaves para basar en ella luego la teoría de las homotopías *) y de los espacios fibrados suaves. Más aún, durante los años 70 se aclaró que precisamente este complejo de las ideas y de los métodos topológicos tiene aplicaciones fundamentales en distintas partes de la física moderna. Por eso los autores consideran como necesarios los materiales didácticos de topología en primer lugar, precisamente los principios de la teoría de las variedades suaves, la teoría de las homotopías y los espacios fibrados. Estos materiales han sido inclui-

---

* Por lo visto, las primeras nociones sobre topología pertenecientes a Gauss, Riemann y Poincaré, surgieron también sobre esta base. Por en aquel entonces resultó imposible tal construcción de la topología. Poincaré descubrió la teoría de homologías de los complejos simpliciales que permitió dar completamente otra construcción exacta de los fundamentos de la toplología algebraica,

dos en el manual de B. A. Dubrovin, S. P. Nóvikov, A. T. Fomenko «Geometría moderna», parte II. En este libro, suponemos conocidos estos materiales.

La resolución de problemas más complejos de la misma topología (cálculo de los grupos homotópicos, clasificación de las variedades suaves, etc.), al igual que numerosas aplicaciones de la técnica algebraico-topológica a los problemas de la geometría algebraica y del análisis complejo, exige un desarrollo de largo alcance, precisamente de los métodos de la teoría de homologías. En la literatura especializada actual sobre topológica no hay libros que posibiliten el complejo aprendizaje de los métodos de la teoría de homologías en sus aplicaciones intratopológicas arriba mencionadas. El presente libro tiene por objeto llenar parcialmente esta laguna.

Al exponer la teoría de homologías, los autores han tratado de evitar, en la medida de lo posible, el lenguaje abstracto del álgebra homológica, para que el lector siempre tenga presente que homologías, ciclos y fronteras son imágenes geométricas concretas. En algunos casos, por ejemplo en la parte dedicada a la sucesión espectral, esta restricción voluntaria lleva a algunos defectos en la exposición difíciles de superar. Pero una sucesiva exposición del lenguaje y de los métodos del álgebra homológica moderna, como demuestra la experiencia, lleva a peores defectos, complicando la compresión del sentido geométrico de la teoría de las homologías. Algunos métodos fundamentales de la topología algebraica moderna (la técnica de las sucesiones espectrales y de las operaciones cohomológicas) se han expuestos sin explicaciones exhaustivas que llevarían al aumento del volumen de la obra. Recordemos que el empleo de estos métodos se basa sólo en las propiedades formalmente algebraicas de las magnitudes que forman parte de ellos, y no se utilizan construcciones explícitas de estas magnitudes, dadas en el proceso de la argumentación. Al final del libro se aplican los métodos de la topología algebraica al estudio de las propiedades profundas de clases características y estructuras suaves en las variedades. Según la idea de los autores, esta obra debe permitir e inducir al lector a recurrir a la literatura topológica moderna.

CAPÍTULO 1

HOMOLOGÍAS Y COHOMOLOGÍAS RECETAS DE SU CÁLCULO

§ 1. Grupos de cohomologías como clases de formas diferenciales cerradas. Su invariación homotópica.

Uno de los más importantes invariantes homotópicos de variedad son sus grupos de homologías que ya fueron utilizados en el § 19 y §§ 24, 25, parte II del libro [1]. Pasemos ahora a sus definiciones sistemáticas.

Hay varios métodos para determinar los grupos de homologías. Al principio, examinemos la determinación de las homologías por las formas diferenciales (véase [1], parte II, § 25).

Examinemos las formas diferenciales cerradas del grado k sobre una variedad M^n (recordemos: el índice n muestra la dimensión de la variedad), que tienen localmente la forma:

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \qquad d\omega = 0. \tag{1}$$

Se llama exacta (o cohomológica cero) una forma diferencial cerrada, si $\omega = d\omega'$, donde ω' es una forma de grado $k - 1$ (recordemos que $d(d\omega') = 0$ ([1], parte I, § 25).

DEFINICIÓN 1 *). Se llama grupo (espacio lineal) de cohomologías $H^k(M^n; \mathbb{R})$ el grupo cociente de todas las formas cerradas del grupo k por el subgrupo de formas exactas. En otras palabras, $H^k(M^n; \mathbb{R})$ son clases de equivalencia de las formas cerradas con exactitud hasta las exactas:

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad \text{si} \quad \omega_1 - \omega_2 = d\omega'. \tag{2}$$

La propiedad más simple de los grupos de cohomologías es la siguiente.

AFIRMACIÓN 1. *Para cualquier variedad M^n el grupo $H^0(M^n; \mathbb{R})$ es un espacio lineal de dimensión q, igual al número de trozos conexos (componente) de los cuales consta la variedad.*

---

*) Encontraremos en adelante varias definiciones de grupos de homologías y cohomologías con unos u otros coeficientes. Ya que estas definiciones llevan al mismo resultado (Véase más abajo §§ 6, 14), no introducimos conscientemente ningún índice que muestre el origen de unas u otras homologías.

DEMOSTRACIÓN. Las formas del grado 0 son funciones escalares $f(x)$ sobre una variedad. Si la forma del grado 0 es cerrada, entonces $df(x) = 0$. Esto significa que la función $f(x)$ es localmente constante, es decir, es constante en cada trozo conexo de la variedad. Las formas cerradas de grado 0 son simplemente un conjunto de q constantes, donde q es el número de trozos. La afirmación queda demostrada, ya que aquí no hay formas exactas.

Si hay una aplicación suave de las variedades $f\colon M_1 \to M_2$, entonces está determinada tal aplicación de las formas $\omega \to f^*(\omega)$ que $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ ([1], parte I, § 25). Por eso está determinada la aplicación de los grupos de cohomologías

$$f^*\colon H^k(M_2;\ \mathbb{R}) \to H^k(M_1;\ \mathbb{R}), \tag{3}$$

porque las clases de equivalencia pasan de uno a otro (por medio de la aplicación f^* las formas cerradas quedan cerradas y las exactas, exactas). La aplicación f^* es un homomorfismo de los grupos de cohomologías.

Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 1. *Si son dadas dos aplicaciones suaves*

$$f_1 : M_1 \to M_2 \quad \text{y} \quad f_2 : M_1 \to M_2,$$

y estas aplicaciones son homotópicas, entonces las aplicaciones de grupos de cohomologías f_1^* y f_2^* coinciden: $f_1^* = f_2^* : H^k(M_2;\ \mathbb{R}) \to H^k(M_1;\ \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una homotopía suave $F\colon M_1 \times I \to M_2$, donde I es un segmento, $1 \leqslant I \leqslant 2$, y $F(x, 1) = f_1(x)$, $F(x, 2) = f_2(x)$. Cualquiera forma diferenciada Ω de grado k sobre $M \times I$ puede ser escrita así

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt, \quad \Omega\,|_{t=t_0} = \omega_1(t_0), \tag{4}$$

donde ω_1 es una forma de grado k que no contiene entre las diferenciales dt, y ω_2 una forma de grado $k-1$, que no contiene entre las diferenciales dt (las coordenadas locales en $M_1 \times I$ se eligen siempre en forma $(x^1, \ldots, x^n, t) \equiv (x, t)$, donde $(x^1, \ldots, x^n)$ son coordenadas locales sobre M). Sea ω cualquier forma de grado k sobre la variedad M_2. Entonces, la forma $F^*(\omega) = \Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, donde tenemos localmente

$$\omega_2 = \sum_{i_1 < \ldots < i_{k-1}} a_{i_1 \ldots i_{k-1}}(x, t)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

$$\omega_1 = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} b_{j_1 \ldots j_k}(x, t)\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}.$$

Definimos la forma $D\Omega$ del grado $k-1$ por la siguiente fórmula (localmente):

$$D\Omega = \sum_{i_1<\ldots<i_{k-1}} \left(\int_1^2 a_{i_1 \ldots i_{k-1}}(x, t)\, dt \right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} = \int_1^2 \omega_2\, dt. \tag{5}$$

$D\Omega$ es la forma de grado $k-1$ sobre la variedad $M_1 \times I$. Tiene lugar el importante

LEMA 1. *Es justa la fórmula de la «homotopía algebraica»* (*véase* el § 2):

$$d(D(F^*(\omega))) \pm D(d(F^*(\omega))) = F_2^*(\omega) - f_1^*(\omega). \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN. Mostremos que para cualquiera forma Ω sobre $M_1 \times I$ es justa la fórmula

$$dD(\Omega) \pm D(d\Omega) = \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}. \tag{7}$$

Calculemos $dD(\Omega)$, donde $\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$. Tenemos localmente, por definición

$$dD\Omega = \sum_{i_1<\ldots<i_{k-1}} \sum_j \left(\int_1^2 \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_{k-1}}}{\partial x^j}\, dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

$$D\, d\Omega = D(d\omega_1) + D(d\omega_2 \wedge dt) =$$

$$= D\Big(\sum_{j_1<\ldots<j_k} \sum_q \frac{\partial b_{j_1 \ldots j_k}}{\partial x^q}\, dx^q \wedge \ldots \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} +$$

$$+ \sum_{j_1 \ldots j_k} \frac{\partial b_{j_1 \ldots j_k}}{\partial t}\, dt \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} \Big) +$$

$$+ D\Big(\sum_{i_1 \ldots i_{k-1}} \sum_p \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_{k-1}}}{\partial x^p}\, dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dt \Big).$$

De aquí vemos que

$$dD\Omega + (-1)^{k+1} D\, d\Omega = \pm \sum_{j_1<\ldots<j_k} (b_{j_1 \ldots j_k}(x, 2) -$$

$$- b_{j_1 \ldots j_k}(x, 1)\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} = \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}.$$

La fórmula (7) queda demostrada. Si ahora $\Omega = F^*(\omega)$, entonces $\Omega|_{t=2} = f_2^*(\omega)$, $\Omega|_{t=1} = f_1^*(\omega)$. El lema queda demostrado.

Volvamos a la demostración del teorema. Sea dada una forma cerrada ω sobre M_2 (es decir, $d\omega = 0$). Entonces tiene lugar la igualdad

$$f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega) \pm DdF^*(\omega).$$

Sin embargo, $dF^*(\omega) = F^*(d\omega) = 0$. Por eso tenemos $f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega)$, es decir, la diferencia de las formas es exacta. Esto significa, por definición, que los homomorfismos

$$f_1^*: H^k(M_2; \mathbb{R}) \to H^k(M_1; \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad f_2^*: H^k(M_2; \mathbb{R}) \to H^k(M_1; \mathbb{R})$$

coinciden sobre las clases de equivalencia (de cohomologías). El teorema queda demostrado.

Recordemos (véase [1], parte II, § 17), que dos variedades se llaman homotópicas equivalentes, si existen tales aplicaciones (suaves) $f: M_1 \to M_2$, $g: M_2 \to M_1$, que ambas superposiciones $fg: M_2 \to M_2$ y $gf: M_1 \to M_1$ son homotópicas a las aplicaciones idénticas:

$$M_1 \to M_1 \ (x \mapsto x), \quad M_2 \to M_2 \ (y \mapsto y).$$

Por ejemplo, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ (o el disco $D^n = \left\{\sum_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha)^2 \leqslant R^2\right\}$) es equivalente homotópicamente a un punto. La demostración consiste en que $\mathbb{R}^n$ (o D^n) está deformando por sí hacia un punto. Esto significa exactamente que una aplicación idéntica $1: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, donde $x \to x$, es homotópica a la aplicación constante $\mathbb{R}^n \to 0$ (en un punto).

TEOREMA 2. *Las variedades homotópicas equivalentes tienen iguales grupos de cohomologías.*

DEMOSTRACIÓN. Sea que las aplicaciones $f: M_1 \to M_2$, $g: M_2 \to M_1$ establezcan una equivalencia homotópica. Consideremos las aplicaciones $f^*: H^k(M_2) \to H^k(M_1)$ y $g: H^k(M_1) \to H^k(M_2)$. Como las aplicaciones fg y gf son homotópicas a las idénticas, los homomorfismos $(fg)^* = g^*f^*$ y $(gf)^* = f^*g^*$ son exactamente homomorfismos idénticos de los grupos de cohomologías, según el teorema 1:

$$1 = g^*f^*: \quad H^k(M_2) \to H^k(M_2),$$
$$1 = f^*g^*: \quad H^k(M_1) \to H^k(M_1).$$

De aquí se deduce, que los mismos homomorfismos f^* y g^* son isomorfismos, además, recíprocamente inversos: $f^* = (g^*)^{-1}$. El teorema queda probado.

OBSERVACIÓN. Según el teorema demostrado, se pueden determinar los grupos de cohomologías para todos los espacios de X,

para los cuales existe una variedad $M \supset X$, que se anuda hacia este espacio, tomando

$$H^k(X; \mathbb{R}) \equiv H^k(M^n; \mathbb{R}). \tag{8}$$

Por ejemplo, el ocho no es una variedad, pero para él se puede determinar los mismos grupos de cohomologías, que, por definición, para un campo $\mathbb{R}^2 \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ (véase la figura 1).

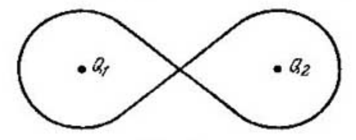


Fig. 1.

COROLARIO 1. *Los grupos de cohomologías de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ o de un disco D^n son los mismos que los de un punto, es decir, $H^k(\mathbb{R}^n)$ es trivial, si $k > 0$, $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ es un espacio lineal unidimensional.*

De aquí se deduce el llamado «lema de Poincaré»: localmente, en una región cerca de cualquier punto sobre una variedad M^n, toda forma cerrada ω $(d\omega = 0)$ es exacta: $\omega = d\omega'$, $\deg \omega > 0$. En efecto, elijamos un disco D^n en coordenadas locales con centro en un punto Q: $\left\{\sum_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha - x_0^\alpha)^2 \leqslant \varepsilon\right\}$ y empleemos en el disco el corolario 1 de que $H^k(D^n) = 0$, para $k > 0$.

Para $k = 1$ el lema de Poincaré es bien conocido del curso de análisis matemático. Para 1-formas $\omega = f_k\, dx^k$, $d\omega = 0$, tenemos $\omega = dF$, donde $F(P) = \int_Q^P f_k\, dx^k$, por un camino que va del punto Q al punto P en el disco D^n.

Calculemos ahora las cohomologías de una circunferencia S^1.

AFIRMACIÓN 2. *Los grupos de cohomologías de la circunferencia S^1 son*

$$H^k(S^1; \mathbb{R}) = 0, \qquad k > 1;$$
$$H^1(S^1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}; \qquad H^0(S^1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}. \tag{9}$$

DEMOSTRACION. Es evidente, que las cohomologías de S^1 son triviales (iguales a cero), si $k > 1$. Luego, $H^0(S^1) = \mathbb{R}$, porque la circunferencia es conexa. Para calcular un grupo $H^1(S^1)$ introducimos una coordenada φ, donde φ y $\varphi + 2\pi n$ representan un punto de la circunferencia para n enteros. La forma del grado 1 es una forma del tipo $a(\varphi)\, d\varphi = \omega$, donde $a(\varphi)$ es una función periódica $a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi)$. Siempre $d\omega = 0$, ya que la dimensión de la circunferencia es igual a 1. ¿Cuándo es exacta la forma $a(\varphi)\, d\varphi$? Esto significa que

$a(\varphi)\,d\varphi = dF$, donde $F(\varphi)$ es una función periódica. Es evidente que $F(\varphi) = \int_0^{\varphi} a(\psi)\,d\psi + \text{const}$. Así, la función $F(\varphi)$ es periódica si y sólo si se cumple la condición $\int_0^{2\pi} a(\psi)\,d\psi = 0$, ó $\int_{S_1} \omega = 0$.

De esta manera, la forma del grado $1\,\omega = a(\varphi)\,d\varphi$ sobre la circunferencia es exacta si y sólo si se cumple la condición $\int_{S_1} \omega = 0$. Por eso, dos formas $\omega_1 = a(\varphi)\,d\varphi$ y $\omega_2 = b(\varphi)\,d\varphi$ determinan la misma clase de cohomologías cuando y sólo cuando $\int_{S_1} \omega_1 = \int_{S_1} \omega_2$. Así tenemos $H^1(S^1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. La afirmación está demostrada.

COROLARIO *Los grupos de cohomologías de un plano euclídeo sin el punto $\mathbb{R}^2\setminus Q$ (o sin anillo) son los mismos que tiene la circunferencia y del tipo*

$$H^k(\mathbb{R}^2\setminus Q) = 0, \quad k > 1; \quad H^1(\mathbb{R}^2\setminus Q) = H^0(\mathbb{R}^2\setminus Q) = \mathbb{R}. \tag{10}$$

OBSERVACIÓN. Indiquemos un método más de cálculo de cohomologías de una circunferencia. A cada forma $\omega(\varphi) = a(\varphi)\,d\varphi$ le confrontemos una forma «media»

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\varphi+\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} a(\varphi+\tau)\,d\tau\right] d\varphi.$$

AFIRMACIÓN 3. *La forma ω es cohomológica a la forma $\hat{\omega}$.*

DEMOSTRACIÓN. La forma $\omega(\varphi+\tau)$ es inducida por la aplicación $\varphi \to \varphi+\tau$ de la circunferencia S^1 en sí misma. Esta aplicación es homotópica a la idéntica. Por eso $\omega(\varphi) \sim \omega(\varphi+\tau)$. La suma integral para $\hat{\omega}$ se de tipo

$$\frac{1}{2\pi}\sum_i \omega(\varphi+\tau_i)\,\Delta\tau_i \sim \omega(\varphi). \quad \frac{1}{2\pi}\sum_i \Delta\tau_i = \omega(\varphi). \tag{11}$$

Por lo tanto, cada suma integral de este tipo es cohomológica a ω. La afirmación queda demostrada. La forma $\hat{\omega}$ es de tipo $\hat{\omega}(\varphi) = \alpha\,d\varphi$, donde $\alpha = \text{const} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\psi)\,d\psi$. En realidad:

$$\hat{\omega}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} a(\varphi+\tau)\,d\tau\right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} a(\psi)\,d\psi\right] d\varphi = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} a(\psi)\,d\psi\right] d\varphi.$$

(En este caso se dice, que la forma $\omega(\varphi)$ es invariante respecto a las rotaciones: $\hat{\omega}(\varphi + \varphi_0) = \hat{\omega}(\varphi)$.)

Así, a cada clase de cohomologías ω le confrontamos una forma invariante (respecto a las rotaciones) $\hat{\omega}$, es decir, un número real. Es evidente, que ésta es una correspondencia biunívoca, y obtenemos $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Más abajo se mostrará, cómo se puede generalizar el razonamiento citado para calcular cohomologías de los espacios homogéneos compactos.

AFIRMACIÓN 4. *La variedad orientada cerrada de Riemann M^n tiene un grupo de cohomologías $H^n(M^n)$ no trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Examinemos un elemento de volumen Ω, donde (localmente) tenemos: $\Omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Si el conjunto de los dominios de coordenadas locales se elige según la orientación (es decir, todos los jacobianos de las funciones de la transición son positivos), entonces Ω es la forma de grado n diferencial, y, con eso, tenemos $\int\limits_{M^n} \Omega > 0$ (es volumen de la variedad M^n). Es evidente que $d\Omega = 0$, porque el grado de forma Ω es igual a n. Si fuera $\Omega = d\omega$, entonces tendríamos, según la fórmula de Stokes

$$\int\limits_{\partial M^n} \omega = \int\limits_{M^n} d\omega = \int\limits_{M^n} \Omega = 0. \qquad (12)$$

(puesto que M^n es cerrada y no tiene frontera). Obtenemos una contradicción. La afirmación queda demostrada.

OBSERVACIÓN. Si la variedad cerrada M^n es no orientable (por ejemplo, $M^2 = \mathbb{R}P^2$), entonces, el grupo $H^n(M^n; \mathbb{R})$ es trivial; esto se demostrará en el § 3. En particular, un elemento de volumen $\Omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ en el caso del cambio con un jacobiano negativo, no se manifiesta como una forma diferencial.

Sea $H^*(M^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} H^k(M^n)$ una suma directa de grupos de cohomologías. Introduzcamos en el grupo $H^*(M^n)$ una estructura de anillo.

AFIRMACIÓN. 5. *Sean ω_1, ω_2 formas cerradas. Entonces, las formas $\omega_1 \wedge \omega_2$ y $(\omega_1 + d\omega') \wedge \omega_2$ son cerradas y cohomológicas.*

DEMOSTRACIÓN. Según la fórmula de Leibniz (véase [1], parte I, § 25), tenemos:

$$d(\omega' \wedge \omega_2) = d\omega' \wedge \omega_2 \pm \omega' \wedge d\omega_2 = d\omega' \wedge \omega_2. \qquad (13)$$

Por eso

$$(\omega_1 + d\omega') \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + d(\omega' \wedge \omega_2). \qquad (14)$$

La afirmación queda demostrada.

Conforme a esta afirmación, el producto exterior de las formas determina correctamente la multiplicación en $H^*(M^n)$. De esta manera, obtenemos un *anillo de cohomologías de la variedad* M^n. Si $\omega_1 \in H^p(M^n)$, $\omega_2 \in H^q(M^n)$, entonces el producto $\omega_1\omega_2$ se encuentra en el espacio $H^{p+q}(M^n)$. Este producto tiene la siguiente propiedad de anticonmutatividad:

$$\omega_2\omega_1 = (-1)^{pq}\,\omega_1\omega_2. \tag{15}$$

Aclaremos el sentido geométrico de los grupos de cohomologías; las definiciones exactas las daremos en los siguientes párrafos.

Si M^n es una variedad arbitraria y ω es una forma de grado k cerrada, entonces sus «integrales por ciclos» son determinadas. Esto se puede comprender, por ejemplo, así. Sea M^k una variedad cerrada orientable k-dimensional. Como «ciclo» en la variedad M^n comprendemos, por ahora, una aplicación suave $f\colon M^k \to M^n$, es decir, el par (M^k, f).

DEFINICIÓN 2. Al período de la forma ω por el ciclo (M^k, f) lo denominaremos con la integral $\int\limits_{M^k} f^*\omega$.

Sea N^{k+1} una variedad arbitraria orientable con borde $M^k = \partial N^{k+1}$. El borde es una variedad cerrada orientable (consistente, posiblemente, en varios trozos). Como «película» comprendamos una aplicación $F\colon N^{k+1} \to M^n$. Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 3 a) *Para cualquier ciclo (M^k, f) el período de la forma exacta $\omega = d\omega'$ es igual a cero.*

b) *Si el ciclo (M^k, f) es una frontera de la película (N^{k+1}, F), donde M^k es una frontera de N^{k+1} y $F|_{M^k} = f$, entonces, el período de cualquier forma cerrada por tal ciclo (M^k, f) es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN a) Si $\omega = d\omega'$, entonces, según la fórmula de Stokes, tenemos

$$\int\limits_{M^k} f^*\omega = \int\limits_{M^k} f^*(d\omega') = \int\limits_{M^k} d(f^*\omega') = \int\limits_{\partial M^k} f^*(\omega') = 0, \tag{16}$$

ya que la variedad M^k no tiene frontera.

b) Si M^k es una frontera de N^{k+1} (tomando en cuenta las orientaciones) y $F|_{M^k} = f$, entonces, según la fórmula de Stokes, tenemos

$$\int\limits_{M^k} f^*\omega = \int\limits_{N^{k+1}} dF^*(\omega) = \int\limits_{N^{k+1}} F^*(d\omega) = 0. \tag{17}$$

El teorema queda demostrado.

Mostramos, sin demostrar, un importante hecho: si los períodos de una forma cerrada por todos los ciclos son iguales a cero, entonces, la forma es exacta (véase abajo el § 14).

EJEMPLO. Si $M^n = S^n$ es una esfera, entonces, $H^k(S^n) = 0$ cuando $k \neq 0, n$.

DEMOSTRACION. Si $k > n$, la afirmación es evidente por definición. Si $0 < k < n$ y (M^k, f) es un ciclo cualquiera, entonces, por el teorema de Sard ([1], parte II, § 10), la imagen $f(M^k)$ no cubre siquiera, un punto $Q \in S^n$. Por eso, el ciclo (M^k, f) se encuentra, de hecho, en $R^n = S^n \setminus Q$. Ya sabemos (lema de Poincaré) que en R^n cualquier forma es exacta. Por eso todos los períodos son iguales a cero, si $0 < k < n$. De ahí que $H^k(S^n) = 0$, cuando $0 < k < n$.

Otra conclusión de este hecho puede ser obtenida del razonamiento análogo al cálculo de cohomologías de la circunferencia S^1 (más arriba). Utilizando un grupo de movimientos $SO(n+1)$ sobre una esfera S^n se puede reducir cualquier clase de cohomologías a una forma cerrada invariante con relación a $SO(n+1)$ sobre la esfera S^n. La forma invariante φ se determina por el valor en un punto de la esfera y en este punto tiene que ser invariante con relación a un grupo estacionario $SO(n) \subset SO(n+1)$. Tales formas de ω no existen, excepto las dimensiones cero y n (¡compruébese!).

De manera análoga calculamos las cohomologías de grupos de Lie y los espacios simétricos.

Recordemos (véase [1], parte II, § 6), que un espacio homogéneo M de un grupo G con un grupo de isotropía H se llama simétrico, si en el grupo G es dada una «involución», es decir, un automorfismo $I: G \to G$, $I^2 = 1$ tal, que $I|_H = 1$ (los puntos del subgrupo H son inmóviles respecto al automorfismo I). Con esto, la ecuación $I(x) = x$ para los x próximos a 1, da solamente los elementos del subgrupo H.

Sobre tal variedad homogénea M se determina la «simetría» s_x con relación a cualquier punto x, donde $s_x^2 = 1$. La aplicación s_x de la variedad M en sí misma se da así: sea $g(x)$ un punto cualquiera de M; hacemos

$$g(x) \to s_x(g(x)) = I(g)(x); \quad s_x(x) = x \text{ (cuando } g = 1); \tag{18}$$

donde g es un elemento cualquiera del grupo G que actúa en M.

La aplicación s_x para cualquier punto x se determinó correctamente, al mismo tiempo $(s_x)_*$ es una aplicación de un espacio tangente en el punto x respecto al origen de las coordenadas (véase [1], parte II, § 6). En particular, cada grupo compacto de Lie G es un espacio simétrico del grupo $G \times G$. La acción del grupo $G \times G$ se determina así:

$$T_{(g,h)}(x) = gxh^{-1}. \tag{19}$$

La involución H tiene la forma: $I(g, h) = (h, g)$. El subgrupo H es una diagonal $\{(g, g)\}$. La simetría s_x con relación a la unidad del grupo G, $x = e$, se determina por la fórmula

$$s_e(g) = g^{-1}. \tag{19'}$$

En cualquier espacio homogéneo se eligen tales formas invariantes diferenciales, que $g^*\omega = \omega$; g es cualquier elemento de G.

La diferencial $d\omega$ de una forma invariante otra vez se representa como una forma invariante:

$$g^* \, d\omega = dg^*\omega = d\omega. \tag{20}$$

El producto $\omega_1 \wedge \omega_2$ de dos formas invariantes es invariante también:

$$g^* (\omega_1 \wedge \omega_2) = g^*\omega_1 \wedge g^*\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2. \tag{21}$$

Por eso se determina el anillo de las formas invariantes del espacio homogéneo M. Resulta que para cualquier espacio homogéneo de un grupo compacto de Lie conexo el anillo de cohomologías puede ser calculado sólo con ayuda de las formas invariantes. Al mismo tiempo, para los espacios simétricos tiene lugar una afirmación más fuerte:

TEOREMA 4. *Sea M un espacio compacto simétrico de un grupo compacto de Lie G. Entonces:*

a) *cualquier forma invariante sobre M es cerrada;*

b) *cualquier forma cerrada sobre M es cohomológica a la invariante;*

c) *una forma invariante (no nula) nunca es cohomológica a cero.*

DEMOSTRACIÓN. a) Sea ω una forma invariante de rango k. Consideremos la forma $s_x^*\omega = \hat{\omega}$. Mostremos que forma ω es también invariante. Por la igualdad (18) tenemos:

$$s_x T_g = T_{Ig} s_x \quad (T_g \leftrightarrow g) \tag{22}$$

En realidad, si $y = T_h(x)$, entonces

$$T_{Ig} s_x T_h(x) = T_{Ig} T_{Ih}(x) = I_{I(gh)}(x),$$

y

$$s_x T_g T_h(x) = s_x T_{gh}(x),$$
$$s_x T_{gh}(x) = T_{I(gh)}(x) \leftarrow s_x T_g(y) = T_{Ig} s_x(y).$$

Entonces

$$T_g^*\hat{\omega} = T_g^* s_x^* \omega = (s_x T_g)^* \omega = s_x^* T_{Ig}^* \omega = \hat{\omega},$$

es decir, la forma $\hat{\omega}$ es invariante.

Como s_x determina la aplicación sobre un espacio tangente en un punto x, entonces, $\hat{\omega}\,|_x = (-1)^k \omega\,|_x$.

Como las formas $\hat{\omega}$ y ω son invariantes, la última igualdad es justa para cualquier punto x:

$$\hat{\omega} = (-1)^k \omega \tag{23}$$

Por eso $d\hat{\omega} = (-1)^k d\omega$. Pero las formas $d\hat{\omega}$ y $d\omega$ de rango $k+1$ son también invariantes, mientras que $s_x^* d\omega = d\hat{\omega}$. Por eso

$$d\hat{\omega} = (-1)^{k+1} d\omega \tag{24}$$

debido a los mismos razonamientos expuestos arriba (el rango de estas formas es igual a $k+1$). En consecuencia $d\omega = 0$; la primera parte del teorema queda demostrada.

b) Sea cerrada la forma ω sobre una variedad M: $d\omega = 0$. Sobre el grupo G, debido a la compacidad, existe una métrica invariante (métrica de Killing) (véase [1], parte I, § 24 y parte II § 8). Esta métrica determina un elemento invariante de volumen que designemos por $d\mu(g)$:

$$d\mu(hg) = d\mu(g). \tag{25}$$

Normalicemos un elemento de volumen sobre el grupo G de tal manera que el volumen de todo el grupo sea igual a 1:

$$\int_G d\mu(g) = 1 \tag{26}$$

Determinamos por la forma ω la forma $\tilde{\omega}$, haciendo

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega d\mu(g). \tag{27}$$

Comprobemos que la forma $\tilde{\omega}$ es invariante y cohomológica a la forma ω. Calculemos la forma $T_h^* \tilde{\omega}$. Tendremos

$$T_h^* \tilde{\omega} = \int_G T_{hg}^* \omega \, d\mu(g) = \int_G T_{hg}^* \omega \, d\mu(hg) = \int_G T_{g'}^* \omega \, d\mu(g') = \tilde{\omega}, \tag{28}$$

donde hacemos $g' = hg$, tal sustitución del variables es suave e invertible.

Así, la forma $\tilde{\omega}$ es invariante. Mostremos que las formas $\tilde{\omega}$ y ω son cohomológicas. La aplicación T_g de la variedad M en sí misma es homotópica a la idéntica. En efecto, sea $g(t)$ una curva en un grupo G, que liga un punto g con una unidad del grupo (recordemos, que el grupo G es conexo). Entonces, $T_{g(t)}$ es la homotopía buscada. Por eso las formas $T_g^* \omega$ y ω son cohomológicas en virtud del teorema 1: $T_g^* \omega \sim \omega$. Por consiguiente,

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega \, d\mu(g) \sim \int_G \omega \, d\mu(g) = \omega \int_G d\mu(g) = \omega. \tag{29}$$

La segunda parte queda demostrada.

c) Vamos a demostrar ahora, que una forma invariante sobre un espacio compacto simétrico no puede ser cohomológica a cero (si ella es no nula). Recordemos, que sobre la variedad M puede ser introducida una métrica de Riemann $(h_{i,j})$ que es invariante con relación a la acción del grupo G (véase [1], parte II, § 8). La métrica de Riemann sobre una variedad determina el producto escalar de las formas sobre esta variedad. El cuadrado escalar de la forma ω es igual a

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_M \omega \wedge * \omega. \tag{30}$$

Este valor siempre es mayor que cero si $\omega \neq 0$. En efecto, si $\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, entonces

$$\int \omega \wedge * \omega = \int h^{i_1 j_1} \ldots h^{i_k j_k} a_{i_1 \ldots i_k} a_{j_1 \ldots j_k} \sqrt{h}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n > 0$$

(aquí h^{ij} es una matriz inversa a h_{ij}, $h = \det (h_{ij})$, $n = \dim M$).

Sea ω una forma invariante. En vigor de invariación de la métrica (h_{ij}) todos los operadores T_g^* conmutan con el operador $*$. Por eso la forma $* \omega$ es invariante también y, por consiguiente, es cerrada: $d * \omega = 0$.

Supongamos $\omega = d\omega'$. Entonces, $d (\omega' \wedge * \omega) = d\omega' \wedge * \omega \pm \pm \omega' \wedge d * \omega = \omega \wedge * \omega$. Por eso, según la fórmula de Stokes, tenemos

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_M \omega \wedge * \omega = \int_M d (\omega' \wedge * \omega) = 0. \tag{31}$$

Entonces, la forma ω es un cero idéntico. El teorema queda totalmente demostrado.

Consideremos ahora algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. El toro $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$, donde Γ es un retículo entero numérico en $\mathbb{R}^n$, engendrado por n vectores linealmente independientes. El toro es un grupo de Lie abeliano compacto.

Sean $x^1, \ldots, x^n$ coordenadas euclídeas en $\mathbb{R}^n$. Todas las formas del tipo $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ son las formas invariantes (respecto a los desplazamientos) sobre $\mathbb{R}^n$. Por eso ellas determinan las formas invariantes sobre el toro T^n. Si la forma $\omega = a_{i_1 \ldots i_k} (x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ sobre el toro es invariante, esto significa que

$$a_{i_1 \ldots i_k} (x + y) = a_{i_1 \ldots i_k} (x), \tag{32}$$

es decir, los coeficientes de la forma ω son constantes:

$$a_{i_1 \ldots i_k} = \text{const}. \tag{33}$$

Así, cualquier forma invariante sobre T^n es una combinación lineal con los coeficientes constantes de los productos exteriores de las formas $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$.

DEDUCCIÓN. El anillo de cohomologías del toro $H^*(T^n)$ es un álgebra exterior $\wedge(e_1, \ldots, e_n)$ con las generatrices $e_1, \ldots, e_n$ de grado 1. Aquí e_i es una clase de cohomologías de la forma dx^i.

EJEMPLO 2. Un grupo de Lie compacto. Las formas invariantes sobre G son formas bilateralmente invariantes diferenciales sobre un grupo (respecto a los desplazamientos a la izquierda y a la derecha). Consideremos, al principio, las formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda sobre el grupo G. Demos un ejemplo de una 1-forma invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda con valores vectoriales que toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G: $\omega(g) = g^{-1}\, dg$. Para un grupo matricial G, donde $g = (g_{ik})$, $dg = (dg_{ik})$ es una matriz con elementos dg_{ik}, φ es también una matriz de las 1-formas, $\omega = (\omega_{ik})$.

Otra construcción de la misma forma ω no emplea la realización matricial del grupo y por eso conviene para cualquier grupo G. Sea el vector ξ tangente del grupo G en un punto g. Actuando sobre ξ con un desplazamiento a la izquierda $(L_{g^{-1}})_*$, obtenemos un vector de un espacio tangente en la unidad del grupo, es decir, del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Todo componente de la forma ω es invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda:

$$\omega(hg) = g^{-1}h^{-1}d(hg) = g^{-1}dg = \omega(g). \tag{34}$$

Sea $\theta^1, \ldots, \theta^N$ una base en un espacio de las 1-formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda. Para un grupo matricial en calidad de las formas θ^i pueden ser tomados los componentes de la forma $\omega = (\omega_{ik}) = g^{-1}dg$ escogiendo entre ellos los linealmente independientes. Por ejemplo, para un grupo $G = SO(n)$, donde la matriz (ω_{ik}) es antisimétrica, en calidad de base pueden ser tomadas las formas ω_{ik}, donde $i < k$.

LEMA 2. *El número N, o sea la dimensión del espacio de las 1-formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda, es igual a la dimensión de un grupo.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquier 1-forma invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda θ se determina totalmente por su valor sobre un espacio tangente en la unidad del grupo, además, este valor puede ser arbitrario. El lema queda demostrado.

COROLARIO. *El espacio de las 1-formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda, coincide con el espacio $\mathfrak{g}^*$ de todas las funciones lineales sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G.*

Aquí el álgebra de Lie se considera como un espacio tangento en la unidad del grupo.

LEMA 3. *Cualquier k-forma invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda ω posee la forma*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_k}, \tag{35}$$

donde $a_{i_1 \ldots i_k}$ *son constantes.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del lema 2 la forma ω en la unidad del grupo puede ser escrita así:

$$\omega(e) = \sum_{< i_1 \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \theta^{i_1}(e) \wedge \ldots \wedge \theta^{i_k}(e). \tag{36}$$

Según la invariación respecto a los desplazamientos a la izquierda de las formas ω y θ^i, la igualdad (36) es justa en cualquier punto del grupo. El lema queda demostrado.

COROLARIO. *El álgebra de las formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda sobre el grupo de Lie G es isomorfa al álgebra exterior* $\wedge(\mathfrak{g}^*)$ *por encima del espacio* $\mathfrak{g}^*$ *de las funciones lineales sobre el álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$. *En otras palabras, esta álgebra coincide con un espacio de las funciones antisimétricas polilineales sobre el álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$.

Aclaremos qué formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda son, al mismo tiempo, formas invariantes respecto a los desplazamientos a la derecha. Señalemos, que con los desplazamientos a la derecha por h^{-1}, la forma $\omega = g^{-1}dg$ se transforma de la manera siguiente:

$$\omega \mapsto (gh^{-1})^{-1} d(gh^{-1}) = h\omega h^{-1}.$$

De aquí es justo el

LEMA 4. *La función antisimétrica polilineal* $\varphi(X_1, \ldots, X_k)$ *de* $\wedge(\mathfrak{g}^*)$ *responde a la forma invariante respecto a los desplazamientos a la derecha si, y sólo si, es justa la igualdad:*

$$\varphi(hX_1h^{-1}, \ldots, hX_kh^{-1}) = \varphi(X_1, \ldots, X_k) \tag{37}$$

para cualquier elemento h del grupo G.

DEDUCCION. El anillo de cohomologías de un grupo de Lie compacto conexo G coincide con el anillo $\wedge_{\text{inv}}(\mathfrak{g}^*)$ de las funciones antisimétricas polilineales sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ invariantes respecto a los automorfismos interiores.

Sea que $\langle\ ,\ \rangle$ significa una forma de Killing sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G. Determinemos la función 3-lineal $\Omega(X, Y, Z)$ sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, haciendo

$$\Omega(X, Y, Z) = \langle [X, Y,] Z \rangle. \tag{38}$$

Esta forma es antisimétrica, debido a la invariación de la forma de Killing (véase [1], parte I, § 24). Además, en virtud de la igualdad $[hXh^{-1}, hYh^{-1}] = h[X, Y]h^{-1}$, la forma Ω es invariante respecto a los automorfismos interiores del grupo G. Por eso es justa la

AFIRMACIÓN 6. *El grupo $H^3(G)$ es no trivial para cualquier grupo de Lie compacto G con una forma regular de Killing (es decir, para un grupo no abeliano).*

EJEMPLO 3. Sea M un espacio simétrico del grupo G; H, un grupo de isotropía. Fijando un punto x en la variedad M, obtenemos una aplicación $G \xrightarrow{p} M$, donde un elemento del grupo g pasa a $p(g) = T_g(x)$. Todo el subgrupo H (y sólo él) pasa al punto x. Si ω es una forma sobre la variedad M, entonces se determina una forma $p^*\omega$ sobre el grupo G. Esta forma se anula sobre el espacio tangente al subgrupo H. Cualquier clase derecha contigua $\{gH\}$ por el subgrupo H pasa a un punto, al aplicarse p. Por eso la forma $p^*\omega$ es invariante respecto a los desplazamientos a la derecha con ayuda de los elementos del grupo H.

Sea ω una forma invariante sobre la variedad M. Entonces la forma $p^*\omega$ sobre el grupo G es invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda.

TEOREMA 5. *El anillo de las formas invariantes diferenciales sobre el espacio homogéneo M del grupo G con el grupo de isotropía H es isomorfo al álgebra exterior $\Lambda_{\mathrm{inv}}((\mathfrak{g}/h)^*)$ (aquí h es el álgebra de Lie del subgrupo H), es decir, al álgebra de las funciones antisimétricas polilineales sobre $\mathfrak{g}$, anuladas sobre h, invariantes respecto a los automorfismos interiores con ayuda de los elementos de H.*

DEMOSTRACIÓN. A cada forma invariante ω sobre M le confrontemos la forma $p^*\omega$ sobre el grupo G. La forma $p^*\omega$ es invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda y se anula sobre h, por eso determina cierto elemento de $\Lambda((\mathfrak{g}/h)^*)$. La forma $p^*\omega$ es invariante también respecto a los desplazamientos a la derecha en los elementos del grupo H. Es suficiente para esto, en virtud de la invariación respecto a los desplazamientos a la izquierda, que la forma $p^*\omega$ sea invariante respecto a los automorfismos interiores en los elementos del grupo H. El teorema queda demostrado.

EJEMPLO 4 Calculemos el anillo de cohomologías de un espacio complejo proyectivo:

$$\mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(1) \times U(n). \tag{39}$$

$\mathbb{C}P^n$ es un espacio compacto simétrico. El grupo $U(n+1)$ también es conexo y compacto. Por eso, el anillo de cohomologías $\mathbb{C}P^n$ se determina por las formas invariantes diferenciales.

Sean $(z^0, \ldots, z^n)$ coordenadas homogéneas sobre $\mathbb{C}P^n$, es decir, coordenadas sobre $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$, determinadas con exactitud hasta un

factor complejo no nulo. Consideremos en $\mathbb{C}^{n+1}$ una 2-forma real diferencial

$$\Omega = \frac{i}{2}\sum_{k} dz^k \wedge dz^{-k}. \qquad (40)$$

A la restricción de esta forma sobre la esfera S^{2n+1}: $\sum_{k=0}^{n} |z^k|^2 = 1$ también la designemos por Ω. La forma Ω es invariante respecto al grupo $U(n+1)$. Mostremos que esta forma se obtiene de cierta forma Ω sobre CP^n: $\Omega = p^*\omega$, donde p: $S^{2n+1} \to CP^n$ es una proyección natural.

Hay que verificar que con las transformaciones

$$z^k \to e^{i\varphi} z^k, \qquad dz^k \to e^{i\varphi}(dz^k + iz^k\, d\varphi), \qquad (41)$$

$$\bar{z}^k \to e^{-i\varphi}\bar{z}^k, \qquad d\bar{z}^k \to e^{-i\varphi}(d\bar{z}^k - i\bar{z}^k\, d\varphi). \qquad (41')$$

La forma Ω pasa en sí misma. Sobre la esfera S^{2n+1}, donde $\sum_{k=0}^{n} z^k\bar{z}^k = 1$, tenemos $\sum z^k\, d\bar{z}^k + \sum \bar{z}^k\, dz^k = 0$; por eso

$$\frac{i}{2}\sum dz^k \wedge d\bar{z}^k \to \frac{i}{2}\sum dz^k \wedge d\bar{z}^k + i\, d\varphi \wedge \sum (z^k\, d\bar{z}^k + \bar{z}^k\, dz^k) = \frac{i}{2}\sum dz^k \wedge d\bar{z}^k.$$

Así obtenemos la 2-forma invariante ω sobre el espacio simétrico $\mathbb{C}P^n$. Todos sus grados exteriores ω^k son distintos de cero cuando $k \leqslant n$, ya que los grados correspondientes de la forma Ω también son distintos de cero (¡verifíquese!).

DEDUCCIÓN. El álgebra de cohomologías $H^*(\mathbb{C}P^n)$ del espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^n$ contiene en sí el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[\omega]$ de la generatriz ω de dimensión 2, además, $\omega^{n+1} = 0$.

En el § 4 se mostrará, que no hay otros elementos en $H^*(\mathbb{C}P^n)$.

§ 2. Homologías de los complejos algebraicos

DEFINICIÓN 1. Se llama complejo (complejo de cadenas o cocadenas) un grupo abeliano C escrito aditivamente, si:

1) El grupo C se representa como una suma directa $C = \sum_{k \geqslant 0} C_k$ de sus subgrupos C_k de la dimensión o del grado k (se dice que el grupo C es graduado).

2) Es dado un operador lineal (homomorfismo) ∂: $C_k \to C_{k\pm 1}$ tal, que $\partial\partial = 0$; el homomorfismo ∂ aumenta (o reduce) la dimensión en 1 simultáneamente para todos los k: $\partial(C_k) \subset C_{k+1}$ o $[\partial(C_k) \subset C_{k-1}]$. Si $\partial C_k \subset \partial C_{k+1}$, se trata de un complejo de «cocadenas». Si $\partial C_k \subset C_{k-1}$, se trata de un complejo de «cadenas».

DEFINICION 2. El grupo k-dimensional de homologías $H_k(C)$ del complejo de cadenas C se denomina grupo cociente del grupo de ciclos k-dimensionales $Z_k = \mathrm{Ker}\,\partial$ (o sea $\partial Z_k = 0$) por un subgrupo de fronteras $B_k = \mathrm{Im}\,\partial = \partial C_{k+1}$ $(B_k \subset Z_k)$:

$$H_k(C) = Z_k/B_k \tag{1}$$

Al grupo de cohomologías del complejo de cocadenas se lo llamará grupo cociente de los cociclos $Z^k = \mathrm{Ker}\,\partial$ por cofronteras $B^k = \partial C_{k-1}$:

$$H^k(C) = Z^k/B^k. \tag{2}$$

Al grupo completo de homologías $H_*(C)$ o de cohomologías $H^*(C)$ se lo llamará suma directa: $H_*(C) = \sum_{k\geq 0} H_k(C)$, o $H^*(C) = \sum_{k\geq 0} H^k(C)$.

EJEMPLO 1. El complejo de formas diferenciales $C = \sum_{k=0} C_k$ sobre la variedad M^n es conexo con cada variedad M^n. Aquí C_k son todas las k-formas (suaves) sobre la variedad M^n; el operador ∂: $C_k \to C_{k+1}$ es un operador de la diferenciación exterior $d = \partial$. Las homologías de tal complejo se denominaban en el § 1 cohomologías de variedad.

EJEMPLO 2. Se determina un complejo de las formas invariantes diferenciales sobre un grupo de Lie o sobre un espacio simétrico. Todas estas formas son cerradas, por eso el operador $\partial = d$ es trivial, o sea, nulo. Del teorema 1.4 se deduce que las homologías de este complejo coinciden (para un espacio simétrico) con las homologías del complejo de todas las formas diferenciales.

En los párrafos siguientes encontraremos una serie de ejemplos de los complejos.

Sean dados dos complejos $(C^{(1)}, \partial^{(1)})$, $(C^{(2)}, \partial^{(2)})$.

DEFINICION 3. El homomorfismo f: $C^{(1)} \to C^{(2)}$ que conserva la graduación, se denomina homomorfismo de complejos, si él conmuta con la operación de las diferenciales:

$$f\partial^{(1)} = \partial^{(2)} f, \quad f(C_k^{(1)}) \subset C_k^{(2)}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Tiene lugar la sencilla

AFIRMACION 1. *Un homomorfismo f de los complejos algebraicos, induce un homomorfismo f de los grupos de homologías*:

$$f: H_k(C^{(1)}, \partial^{(1)}) \to H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)}), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

DEMOSTRACION. El homomorfismo f traslada los ciclos $Z_k^{(1)}$ a los ciclos $Z_k^{(2)}$ y las fronteras $B_k^{(1)}$ a las fronteras $B_k^{(2)}$ para cualquier k. Por eso él determina correctamente el homomorfismo de los grupos de homologías. La afirmación queda demostrada.

Por ejemplo, una aplicación suave de variedades $f: M \to N$ determina una aplicación f^* de los complejos de las formas diferenciales sobre estas variedades, que actúa al lado inverso:

$$f^*: C(N) \to C(M).$$

Esta aplicación es lineal y conmutada con la diferencial: $f^*d\omega = df^*\omega$ para cualquier forma ω. Por eso f^* es un homomorfismo de los complejos de formas diferenciales.

DEFINICIÓN 4. Sean $f: C^{(1)} \to C^{(2)}$, $g: C^{(1)} \to C^{(2)}$ dos homomorfismos de los complejos algebraicos. Estos homomorfismos se llaman (algebraicamente) homotópicos, si es dado un homomorfismo $D: C^1 \to C^{(2)}$ tal, que

$$D\partial^{(1)} \pm \partial^{(2)}D = f - g. \tag{5}$$

Si los operadores $\partial^{(1)}$, $\partial^{(2)}$ aumentan (reducen) la graduación, entonces la aplicación D reduce (aumenta) la graduación:

$$D(C_k^1) \subset C_{k-1}^{(2)} \quad \text{o} \quad D(C_k^1) \subset C_{k+1}^{(2)}. \tag{6}$$

AFIRMACIÓN 2. *Las aplicaciones homotópicas de los complejos inducen iguales homomorfismos de los grupos de homologías:*

$$f = g: H_k(C^{(1)}, \partial^{(1)}) \to H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)}). \tag{7}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $c_k \in C_k^{(1)}$ es un ciclo, $\partial^{(1)}c_k = 0$, entonces

$$f(c_k) - g(c_k) = D\partial^{(1)}c_k \pm \partial^{(2)}Dc_k = \pm \partial^{(2)}Dc_k,$$

o sea, $f(c_k) \sim g(c_k)$ en un grupo de homologías $H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)})$. La afirmación queda demostrada.

Este ejemplo de la homotopía algebraica fue dado al demostrar la invariación homotópica de cohomologías en el teorema 1.1. Otros ejemplos los encontraremos en los párrafos siguientes.

DEFINICIÓN 5. Sea b_k un rango del grupo $H_k(C, \partial)$. La suma alternada del tipo

$$\chi(C, \partial) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k b_k = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \operatorname{rang} H_k \tag{8}$$

se denomina característica de Euler del complejo (C, ∂).

AFIRMACIÓN 3. *La característica de Euler del complejo* (C, ∂) *es igual al número siguiente:*

$$\chi(C, \partial) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \operatorname{rang} C_k. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea z_k el rango del grupo de los ciclos Z_k; β_k, el rango del grupo de las fronteras B_k. Entonces, para estos rangos tendremos las relaciones:

$$b_k = z_k - \beta_k, \tag{10}$$

$$\beta_k = \operatorname{rang} C_{k+1} - z_{k+1} \tag{11}$$

(donde el operador ∂ reduce la graduación). Por eso,

$$b_k = z_k + z_{k+1} - \operatorname{rang} C_{k+1}$$

y

$$\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k b_k = z_0 + \sum_{k\leqslant 0} (-1)^{k+1} \operatorname{rang} C_{k+1}.$$

La afirmación queda demostrada, ya que $z_0 = \operatorname{rang} C_0$ (es evidente, que la demostración es justa también cuando el operador aumenta la graduación en 1).

Sea G un grupo abeliano arbitrario (escrito aditivamente). Es determinado el complejo $C \otimes G = \sum_{k\geqslant 0} C_k \otimes G$, o sea el complejo de «cadenas con coeficientes en el grupo G». [Recordemos, que el producto tensorial de dos grupos abelianos $A \otimes B$ se compone de toda clase de sumas finitas del tipo $\sum a_i \otimes b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, mientras que para el símbolo $\otimes$ deben cumplirse las siguientes exigencias:

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b,$$
$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2.$$

De aquí se deduce una relación útil: $ma \otimes b = a \otimes mb$, donde m es cualquier número entero.

PROBLEMA 1. Demostrar que para cualquier grupo G es justa la fórmula $G \otimes \mathbb{Z} = G$. Calcular el producto tensorial de los grupos finitos cíclicos $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$. Demostrar que el producto tensorial de cualquier grupo abeliano finito por un grupo de los números reales (o racionales) es igual a cero.]

El operador ∂ en las cadenas del tipo $c_k \otimes g$, $c_k \in C_k$, $g \in G$, opera del siguiente modo: $\partial (c_k \otimes g) = \partial c_k \otimes g$. El continúa linealmente sobre todo el grupo $C \otimes G$. Aquí es evidente la correlación $\partial\partial = 0$. Las homologías del complejo $C \otimes G$ se llaman también homologías del complejo C con los coeficientes en el grupo G y se designan así:

$$H_k (C; G) = H_k (C \otimes G).$$

Sean G un grupo abeliano escrito aditivamente y (C, ∂) un complejo de cadenas. Introduzcamos un complejo conjugado de cocadenas, que son las formas lineales (homomorfismos) C^* con valor en G, designado en el álgebra por Hom (C, G). Tenemos una descomposición natural en suma

$$C^* = \sum_{k\geqslant 0} C_k^* \tag{12}$$

(C_k^* son formas lineales sobre C_k) y el operador de frontera ∂^* conjugado con ∂:

$$\partial^* : C_k^* \to C_{k+1}^*, \quad \partial : C_k \to C_{k-1},$$

donde

$$(\partial^* x, c) = (x, \partial c); \quad c \in C, \ x \in C^*. \tag{13}$$

Tenemos $\partial^*\partial^* \equiv 0$. Los grupos de cohomologías H_k (C^*, ∂^*) habitualmente se designan por H^k (C; G) y se denominan cohomologías del complejo C con valor en G.

Sea $G = \mathbf{k}$ un campo (por ejemplo, los números reales $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, los complejos $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, los racionales $k = \mathbb{Q}$ o el campo finito $k = \mathbb{Z}_p$ de p elementos, donde p es un número primo) y sea C un complejo de los espacios lineales de dimensión finita C_k sobre un campo $\mathbf{k}$. Tiene lugar el

TEOREMA 1 *Son mutuamente conjugados los espacios lineales* H^k (C; $\mathbf{k}$) *y* H_k (C): *en particular, ellos tienen la misma dimensión.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos, que el operador ∂ reduce la graduación. Demostremos, que un elemento c^k de C_k^* es cociclo en el complejo C^* si, y sólo si, $(c^k, B_k) = 0$, donde $B_k \subset C_k$ es un subgrupo de fronteras. En efecto, para cualquier elemento $\widetilde{c}_{k+1}$ del grupo C_{k+1} obtendremos: $0 = (\partial^* c^k, \widetilde{c}_{k+1}) = (c^k, \partial\widetilde{c}_{k+1})$. Por otro lado, si $(c^k, \partial\widetilde{c}_{k+1}) = 0$ para cualquier elemento $\widetilde{c}_{k+1}$ de C_{k+1}, entonces $\partial^* c^k$ toma valores nulos sobre cualquier elemento $\widetilde{c}_{k+1}$.

Así obtenemos, que un espacio Z^* de cociclos del complejo C^* coincide con un espacio de formas lineales, que se anulan en un subespacio de fronteras B_k. En virtud de que cada espacio C_k tiene una dimensión finita, el complejo $(C^*)^*$ coincide con el complejo C. Por eso tenemos: un espacio de ciclos Z_k que coincide con un espacio de formas lineales sobre C_k^*, que se anulan en un subespacio de fronteras B_k^*. En otras palabras, B_k^* son todas las formas lineales que se anulan sobre Z_k.

Según lo demostrado, cada elemento c^k de C_k^*, donde $\partial^* c^k = 0$, determina una forma lineal sobre las homologías H_k (C). Además, las dimensiones de los espacios H (C; $\mathbf{k}$) y H_k (C) coinciden. El teorema queda demostrado.

Vamos a definir la operación del producto tensorial $C = C^{(1)} \otimes \otimes C^{(2)}$ de dos complejos $(C^{(1)}, \partial^{(1)})$ y $(C^{(2)}, \partial^{(2)})$.

Recordemos, que al valor tensorial $A \otimes B$ de dos espacios lineales A y B con bases $(a_1, \ldots, a_s)$, $(b_1, \ldots, b_p)$ se le llamará un espacio con base $a_i \otimes b_j$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, p$, y la condición $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \otimes b = \lambda_1 a_1 \otimes b + \lambda_2 a_2 \otimes b$ y $a \otimes (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = \lambda_1 a \otimes b_1 + \lambda_2 a \otimes b_2$. (Aquí λ_1 y λ_2 son escalares. Posiblemente, se trata de cualesquier grupos abelianos escritos adi-

tivamente A y B; entonces, λ son únicamente números enteros (véase la pág. 27)).

Sea $C = \sum C_k$, donde

$$C_k = (C^{(1)} \otimes C^{(2)})_k = \sum_{p+q=k} C_p^{(1)} \otimes C_q^{(2)}, \tag{14}$$

$$\partial (c_p^{(1)} \otimes c_q^{(2)}) = (\partial^{(1)} c_p^{(1)}) \otimes c_q^{(2)} + (-1)^p c_p^{(1)} \otimes \partial^{(2)} c_q^{(1)}). \tag{15}$$

Es fácil verificar, que $\partial\partial = 0$.

TEOREMA 2. *Sean $C^{(1)}$ y $C^{(2)}$ complejos de espacios lineales sobre cualquier campo* **k**. *Para las homologías del valor tensorial tenemos la fórmula siguiente*

$$H_k (C^{(1)} \otimes C^{(2)} = \sum_{p+q=k} H_p (C^{(1)}) \otimes H_q (C^{(2)}) \tag{16}$$

(*serán importantes los casos cuando* $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$).

Para demostrar el teorema probemos, al principio, una afirmación auxiliar.

LEMA. *Sea $C = \sum\limits_{n \geqslant 0} C_n$ un complejo de espacios lineales sobre un campo* **k**. *Entonces, en cada espacio C_n se puede elegir una base canónica $(x_{n,i}, y_{n,j}, h_{n,l})$, en la cual la acción del operador ∂ se escribe así*

$$\partial x_{n,i} = y_{n-1,i}, \quad \partial y_{n,j} = 0, \quad \partial h_{n,l} = 0. \tag{17}$$

DEMOSTRACIÓN. Es evidente de las fórmulas (17) que los vectores $y_{n,j}$ son fronteras, los vectores $h_{n,l}$ son ciclos que no se representan como fronteras y así dan una base en las homologías $H_n (C)$; por fin. los vectores $x_{n,l}$ es una base en un espacio de cadenas, y no son ciclos. Por eso, la base que necesitamos se construye fácilmente por inducción, comenzando por el espacio C_0.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Elijamos las bases canónicas $(x_p^{(1)}, y_p^{(1)}, h_p^{(1)})$ y $(x_q^{(2)}, y_q^{(2)}, h_q^{(2)})$ en todos los espacios $C_p^{(1)}$ y $C_q^{(2)}$ (omitimos los índices que numeran los vectores básicos de un espacio). Construimos una base canónica para el espacio $C_k = \sum\limits_{p+q=k} C_p^{(1)} \otimes C_q^{(2)}$.

El primer grupo de los vectores (no ciclos):

$$x_{pq} = x_p^{(1)} \otimes x_q^{(2)}; \quad a_{pq} = \frac{1}{2} [x_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)} + (-1)^{p-1} y_{p-1}^{(1)} \otimes x_{p+1}^{(2)}],$$

$$\alpha_{pq} = x_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}; \quad \beta_{pq} = (-1)^p h_p^{(1)} \otimes x_q^{(2)} \tag{18}$$

(por doquier en estas fórmulas y más abajo $p + q = k$).

La base de fronteras:

$$\begin{gathered} b_{pq} = y_{p-1}^{(1)} \otimes x_{q+1}^{(2)} - (-1)^{p+1} x_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}; \\ y_{pq} = y_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}; \quad \gamma_{pq} = y_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}; \quad \delta_{pq} = h_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}. \end{gathered} \tag{19}$$

Los vectores (18), (19) son linealmente independientes (¡verifíquese!) y, para obtener una base en el espacio C_h, hay que añadir los vectores del tipo $h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}$, $p + q = k$. Calculemos la acción del operador ∂ en la base construida. De las fórmulas (15), (17), obtenemos de inmediato que

$$\partial x_{pq} = b_{pq-1}, \quad \partial a_{pq} = y_{p-1q}, \quad \partial \alpha_{pq} = \gamma_{p-1q}, \quad \partial \beta_{pq} = \delta_{pq-1},$$
$$\partial b_{pq} = \partial y_{pq} = \partial \gamma_{pq} = \partial \delta_{pq} = \partial (h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}) = 0,$$

es decir, la base construida es realmente canónica. De tal manera, los vectores $h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}$ con $p + q = k$ forman una base en el espacio $H_k (C^{(1)} \otimes C^{(2)})$, lo que debíamos demostrar.

§ 3. Complejos simpliciales. Sus homologías y cohomologías. Clasificación de las superficies bidimensionales cerradas

Formulemos, ahora, otro enfoque de la definición y del estudio de los grupos de homologías y cohomologías, que aumenta mucho las posibilidades del empleo de los mismos.

Definimos un *símplex* n-dimensional (de dimensión n). Un símplex 0-dimensional es un punto $[\alpha_0]$; un símplex 1-dimensional es un segmento $[\alpha_0\alpha_1]$; un símplex 2-dimensional es un triángulo $[\alpha_0\alpha_1\alpha_2]$; un símplex 3-dimensional es un tetraedro $[\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ (fig. 2).

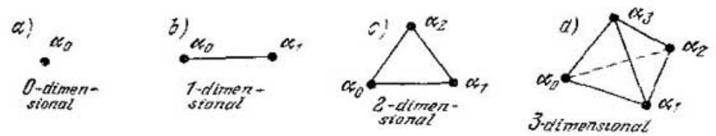


Fig. 2. Simplex.

Por inducción, si un símplex n-dimensional $\sigma^n = [\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n]$ está definido y se encuentra en un espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$, entonces, para construir un símplex $(n + 1)$-dimensional, hay que tomar un vértice nuevo α_{n+1} fuera de este hiperplano $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y examinar el conjunto de todos los puntos pertenecientes a los segmentos que ligan este vértice nuevo α_{n+1} con los puntos del símplex $[\alpha_0 \ldots \alpha_n]$. El cuerpo obtenido será un símplex $(n + 1)$-dimensional $[\alpha_0 \ldots \alpha_{n+1}] = \sigma^{n+1}$.

En forma más general, al símplex n-dimensional lo denominaremos cápsula convexa del $(n + 1)$ punto (vértice) de un espacio euclídeo.

Las caras de un símplex n-dimensional $[\alpha_0 \ldots \alpha_n]$ son los símplex tendidos en los vértices $[\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}]$, $[\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2}\alpha_n]$, ...

$\ldots, [\alpha_1 \ldots \alpha_n]$. Así, la i-ésima cara se obtiene al separar el i-ésimo vértice α_i del conjunto $[\alpha_0 \ldots \alpha_n]$, y ella es opuesta a este vértice: la i-ésima cara $\sigma_{(i)}^{n-1}$ del símplex σ^n es

$$[\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_n] = \sigma_{(i)}^{n-1} \tag{1}$$

(el i-ésimo vértice se ha separado).

Las caras de menor dimensión se obtienen, formalmente, de un símplex $[\alpha_0 \ldots \alpha_n]$ al separar cierto número de cualesquiera vértices.

DEFINICIÓN 1. La frontera orientada del simplex $\sigma^n = [\alpha_0 \ldots \ldots \alpha_n]$ es una combinación lineal formal de sus caras del tipo:

$$\partial\sigma^n = \partial [\alpha_0 \ldots \alpha_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1}. \tag{2}$$

Por ejemplo, para los símplex 0-, 1- y 2-dimensionales tenemos:

$$\partial [\alpha_0] = 0, \tag{3}$$

$$\partial [\alpha_0\alpha_1] = [\alpha_1] - [\alpha_0], \tag{4}$$

$$\partial [\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1]. \tag{5}$$

De la fig. 2 está claro, que las caras tienen signos regulares.

LEMA 1 *Para un símplex n-dimensional tiene lugar la fórmula*

$$\partial\partial [\alpha_0 \ldots \alpha_n] = 0. \tag{6}$$

La demostración consiste en el cálculo directo. Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos

$$\partial [\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1],$$

$$\partial\partial [\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = \{[\alpha_2] - [\alpha_1]\} - \{[\alpha_2] - [\alpha_0]\} + \{[\alpha_1] - [\alpha_0]\} = 0.$$

El cálculo es analógico para todos los n: $\partial\partial\sigma^n = \partial\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1}\right)$; en esta suma la cara $\sigma_{(ij)}^{n-2}$ (los vértices α_i, α_j están separados) se incluye dos veces — en la frontera $\partial\sigma_{(i)}^{n-1}$ y $\partial\sigma_{(j)}^{n-1}$ — con signos opuestos.

DEFINICIÓN 2. *El complejo simplicial* es un conjunto de símplex de dimensión arbitraria que tiene las siguientes propiedades:

1) junto con cualquier símplex, sus caras de todas las dimensiones pertenecen a este conjunto;

2) dos símplex pueden intersecarse (tener puntos comunes) sólo por una cara entera de alguna dimensión y, con esto, en no más de una cara.

Un complejo simplicial finito se compone de un número finito de símplex.

Enumeremos de algún modo todos los vértices de un complejo simplicial finito $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$. Entonces, los símplex r-dimensional $[\alpha_{i_0}\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_r}]$ se determinan por ciertos subconjuntos de los vértices en la enumeración dada.

Sea G cualquier grupo conmutativo, donde la ley de grupo se escribe como la adición (+). Las cadenas de la dimensión k en un complejo simplicial son combinaciones finitas lineales formales del tipo $c_k = \sum_i g_i\sigma_i$, donde σ_i son diferentes símplex k-dimensionales escritos en la numeración dada de los vértices del complejo; g_i, son elementos arbitrarios del grupo G. La adición de las cadenas se determina así: si $c_k = \sum g_i\sigma_i$, $c_k' = \sum g_i'\sigma_i$, entonces, $c_k + c_k' = \sum (g_i + g_i')\sigma_i$. Las cadenas forman un grupo abeliano.

La frontera de la cadena ∂c_k es la cadena de la dimensión $k - 1$, determinada por la fórmula

$$\partial c_k = \sum_i g_i\, \partial\sigma_i. \tag{7}$$

Es evidente la fórmula (según el lema 1): $\partial\partial c_k = 0$. Los ciclos son tales cadenas de c_k, que $\partial c_k = 0$. Los ciclos forman también el grupo Z_k. Los ciclos homológicos a cero (que son fronteras) son tales ciclos de c_k, que $c_k = \partial c_{k+1}$. Estos ciclos forman un grupo de fronteras B_k.

DEFINICIÓN 3. Al grupo de homologías $H_k(M, G)$ de un complejo simplicial M lo denominaremos con un grupo cociente del grupo Z_k de todos los ciclos de la dimensión k por ciclos B_k homológicos a cero (dos ciclos son equivalentes si, y sólo si, $c_k' - c_k'' = \partial c_{k+1}$).

Son interesantes los casos $G = \mathbb{Q}$ (números racionales), $G = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{Z}$ (números enteros), $G = \mathbb{Z}_2$ (residuos por el módulo 2) y en general, $G = \mathbb{Z}_m$ (residuos por el módulo m, en especial, cuando m es un número primo y $\mathbb{Z}_m$ es un campo). Cuando $G = \mathbb{R}$, todos los $H_i(M, \mathbb{R})$ son espacios lineales sobre el campo $\mathbb{R}$. A la dimensión b_i del espacio $H_i(M, \mathbb{R})$ se la llama i-ésimo número de Betti del complejo M.

Para un complejo simplicial finito se determina la característica de Euler:

si γ_i es el número de símplex de dimensión i en un complejo M, entonces la característica de Euler del complejo M es igual a

$$\chi(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \gamma_i. \tag{8}$$

TEOREMA 1 *Sean b_i las dimensiones de los espacios $H_i(M; \mathbb{R})$ (números de Betti). Entonces tenemos la igualdad:*

$$\chi(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \gamma_i = \sum_{j \geq 0} (-1)^j b_j. \tag{9}$$

DEMOSTRACION. Un grupo de cadenas i-dimensionales C_i es un espacio lineal de la dimensión γ_i. Por eso la demostración se deduce de la afirmación 2.3.

OBSERVACION. La característica de Euler $\chi(M)$ puede ser determinada (véase [1], parte II, § 15) como una suma de singularidades de un campo vectorial (o de una función suave). Obtenemos la posibilidad de calcular $\chi(M)$ partiendo de las homologías.

Determinemos ahora los objetos conjugados. Una cocadena k-dimensional c^k es una función lineal sobre las cadenas k-dimensionales con los coeficientes enteros del complejo M con valores en el grupo G. De manera que la cocadena c^k compara cada símplex k-dimensional σ_i con un elemento $c^k(\sigma_i)$ del grupo G, al mismo tiempo

$$c^k(a\sigma_{i1}+b\sigma_{i2})=ac^k(\sigma_{i1})+bc^k(\sigma_{i2}),$$

a, b, son números enteros. La suma de estas funciones lineales es otra vez una cocadena, por eso las cocadenas forman un grupo.

Una cofrontera δc^k de cualquier cocadena c^k es una cocadena $(k+1)$-dimensional que se determina con la igualdad

$$\delta c^k(\sigma_i)=c^k(\partial\sigma_i) \tag{10}$$

(o $\delta=\partial^*$ en las connotaciones del § 2), donde σ_i es cualquier símplex de la dimensión $k+1$. Señalemos que $\delta\delta=0$. En realidad,

$$\delta\delta c^k(\sigma_i)=\delta c^k(\partial\sigma_i)=c^k(\partial\,\partial\sigma_i)=0.$$

Los cociclos son cocadenas c^k tales, que $\delta c^k=0$. Los cociclos equivalentes (cohomológicos) a cero son de tipo $c^k=\delta c^{k-1}$.

DEFINICION 4. Un grupo de cohomologías $H^k(M;G)$ es un grupo cociente de un grupo de cociclos por un subgrupo de cociclos, equivalentes a cero ($c^k\sim c^{k\prime}$, si $c^k-c^{k\prime}=\delta c^{k-1}$).

Un complejo de cocadenas se conjuga con un complejo de cocadenas simpliciales. Para el caso, cuando $G=\mathbf{k}$ es un campo, obtenemos del teorema 2.1 el siguiente

COROLARIO. *Las dimensiones de los espacios $H_i(M;\mathbf{k})$ y $H^i(M;\mathbf{k})$, donde* $\mathbf{k}$ *es un campo, coinciden.*

Consideremos el caso $G=\mathbb{Z}_m$ (residuos del mod m), en especial, si $m=p$ es un número primo, cuando $G=\mathbb{Z}_p$ es un campo. Sea $x\in H_q(M;G)$ y $\bar{x}$ una cadena con coeficientes enteros, que da un ciclo $x=\bar{x}$ (mod m). Tenemos

$$\partial\bar{x}=mu, \quad \text{o} \quad u=\frac{\partial\bar{x}}{m}$$

en las cadenas con coeficientes enteros. Si el elemento $\bar{x}$ cambia en la clase de homologías $x \in H_q(M, \mathbb{Z}_m)$, $\bar{x} \to \bar{x} + \partial y + mz$, entonces obtenemos

$$\frac{\partial\bar{x}}{m} \to \frac{\partial\bar{x}}{m} + \frac{\partial\,\partial y}{m} + \partial z = \frac{\partial\bar{x}}{m} + \partial z = u + \partial z.$$

Con esto, $\partial u = 0$.

De manera que surge el «homomorfismo de Bokshtein» unívoco correctamente determinado:

$$x \to \frac{\partial\bar{x}}{m}, \text{ donde } \bar{x}\,(\mathrm{mod}\, m) \sim x \in H_q(M; \mathbb{Z}_m), \tag{11}$$

$$H_q(M; \mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(M; \mathbb{Z}).$$

Análogamente, en las cohomologías obtendremos un homomorfismo

$$H^q(M; \mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\delta_*} H^{q+1}(M; \mathbb{Z}). \tag{12}$$

AFIRMACIÓN 1. *Para cualquier elemento* $x \in H_q(M; \mathbb{Z}_m)$ $\partial_* x = 0$ *en* $H_{q-1}(M; \mathbb{Z})$ *si, y sólo si,* x *se obtiene del elemento* $y \in H_q(M; \mathbb{Z})$ *con ayuda de la reducción* (módulo m):

$$x = y \ (\mathrm{mod}\ m) \leftrightarrow \partial_* x = 0.$$

Análogamente, en las cohomologías: $x = y$ (mod m) $\leftrightarrow \delta_* x = 0$. (*Aquí* $x \in H^q(M; \mathbb{Z}_m)$, $y \in H^q(M; \mathbb{Z})$.)

DEMOSTRACIÓN. Si $x = y\,(\mathrm{mod}\, m)$, entonces se puede escoger una cadencia $\bar{x}$ de manera que $\partial\bar{x} = 0$ y $\partial_* x = \frac{\partial\bar{x}}{m} = 0$ en $H_{q-1}(M; \mathbb{Z})$. Por el contrario, si $\partial_* x = 0$ en $H_{q-1}(M; \mathbb{Z})$, entonces $\frac{\partial\bar{x}}{m} = \partial z$ para cierta cadena z. Supongamos $y = \bar{x} - mz$. Tenemos $\partial y = 0$ e $y\,(\mathrm{mod}\, m) = x$. La afirmación queda demostrada.

Así, el conocimiento de ∂_* y δ_* nos permite reconocer las imágenes de las homologías con coeficientes enteros en las homologías de mod m. Otro empleo: la imagen $\partial_* H_q(M, \mathbb{Z}_m)$ en los grupos $H_{q-1}(M, \mathbb{Z})$ escoge los elementos u, $u \in H_{q-1}(M, \mathbb{Z})$ tales, que $mu = 0$ (torsión).

En efecto, $\partial_*(mx) = m(\partial_* x) = 0$, por definición. Por el contrario, si $mv = 0$ para $v \in H_{q-1}(M, \mathbb{Z})$, entonces $mv = \partial\bar{x}$ para la cadena con coeficientes enteros $\bar{x}$, y tenemos un elemento $x = \bar{x}\,(\mathrm{mod}\, m)$ tal, que $x \in H_q(M, \mathbb{Z}_m)$ y $\partial_* x = v$.

EJEMPLO. Para $M = \mathbb{R}P^2$ tenemos $x \in H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $x \neq 0$. Al mismo tiempo, $\partial_* x \neq 0$ en $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

PROBLEMA 1. Para todas las variedades no orientables hay un ciclo $[M^n] = x$ en el grupo $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$ tal, que $\partial_* x \neq 0$ y un elemento $\partial_* x \in H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z})$ de orden 2.

Y para las cohomologías, al contrario: tenemos $u \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$, donde $\delta_* u \neq 0$ y tiene el orden 2 en $H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})$.

Sea la variedad M^n dividida en símplex y transformada en un complejo simplicial. Entonces, se pueden determinar y calcular los grupos de homologías y de cohomologías.

Un símplex suave σ^k de dimensión k, es una inmersión (encaje) diferenciable de un símplex (junto con algún entorno abierto de un símplex en σ^k en un espacio $\mathbb{R}^k$) en la variedad M^n. Consideremos una variedad *triangulada*, si es dividida en un complejo simplicial con ayuda de los símplex suaves.

Formulemos dos casos importantes (la demostración del punto *A* será dada en el § 6):

A. Los grupos de homologías y de cohomologías no dependen de la triangulación de la variedad y son homotópicamente invariantes.

B. Para $G = \mathbb{R}$ los grupos de cohomologías coinciden con los que se definieron por las formas diferenciales (véase el § 14).

Aclaremos la última afirmación. Sean: σ^k, un símplex suave k-dimensional en la variedad M^n; ω_k, una forma diferencial de grado k. Está determinada la integral de la forma ω_k por el símplex σ^k:

$$\langle \omega_k, \sigma^k \rangle = \int_{\sigma^k} \omega_k. \tag{13}$$

Si $c_k = \sum_i r_i \sigma_i^k$ es una cadena con coeficientes reales; entonces puede ser determinada la integral de la forma por la cadena c_k:

$$\langle \omega_k, c_k \rangle = \sum_i r_i \int_{\sigma_i^k} \omega_k. \tag{14}$$

En virtud de la fórmula de Stokes (véase [1], parte I, § 26) es correcta la igualdad:

$$\langle d\omega_k, c \rangle = \langle \omega, \partial c \rangle \leftrightarrow \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \tag{15}$$

Por eso cualquier forma cerrada ω, donde $d\omega = 0$, determina una función lineal sobre las clases de las homologías simpliciales: si c_1, c_2, son ciclos homológicos, $c_1 = c_2 + \partial c'$, entonces

$$\langle \omega, c_1 \rangle = \langle \omega, c_2 \rangle + \langle d\omega, c' \rangle = \langle \omega, c_2 \rangle.$$

Cualquier forma exacta ω, donde $\omega = d\omega'$, se anula en cualquier ciclo (verifíquese).

DEDUCCIÓN. Cada clase de cohomologías $H^k(M; \mathbb{R})$ determinadas por formas diferenciales, define una función lineal sobre el grupo de homologías simpliciales $H_k(M; \mathbb{R})$.

La afirmación B formulada más arriba significa que así se obtiene cualquier función lineal sobre el grupo $H_k(M; \mathbb{R})$ y una forma cerrada no trivial (no exacta) siempre da una forma no trivial lineal sobre $H_k(M; \mathbb{R})$.

Sea M^n una variedad conexa cerrada. Es evidente que su triangulación cualquiera (partición en símplex) tiene la siguiente propiedad: cualquier símplex de dimensión $n-1$ es una cara justamente de dos símplex n-dimensionales.

TEOREMA 2. *Tiene lugar la igualdad*

$$H_n(M^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$$

(aquí $\mathbb{Z}_2$ es un grupo de dos elementos, residuos por el módulo 2).

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la cadena $z = \sum_i \sigma_i^n$, donde la adición se realiza por todos los símplex n-dimensionales, con todo eso, su orientación es arbitraria. Sobre el campo $\mathbb{Z}_2$ es justa la igualdad de las cadenas:

$$\partial\sigma^n = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i^{n-1}, \qquad (16)$$

donde σ_i^{n-1} son caras del símplex σ^n. En la suma $\partial z = \sum_i \partial\sigma_i^n$ cada símplex $(n-1)$-dimensional se encuentra exactamente dos veces. Por eso $\partial z = 0$. Es evidente que aquí no hay otros ciclos no nulos n-dimensionales. El teorema está demostrada.

Y ahora sea la variedad M^n orientada.

AFIRMACIÓN 2. *Para una variedad cerrada conexa orientada un grupo n-ésimo de homologías $H_n(M^n; G)$ es igual a G (G es un grupo cualquiera).*

DEMOSTRACIÓN. En cada punto de la variedad M^n es dada una clase de orientación de los repers (jalones) tangentes. Orientemos los símplex n-dimensionales en concordancia con la orientación de estos repers, sea que los símplex σ_1^n y σ_2^n tengan frontera por un símplex σ^{n-1} (véase la fig. 3 para $n = 2$). Este símplex se incluye en las fronteras $\partial\sigma_1^n$ y $\partial\sigma_2^n$ con signos opuestos. En consecuencia la cadena $[M^n] = \sum_i \sigma_i^n$ (la suma por todos los símplex n-dimensionales) es un ciclo. Es evidente que cualquier otro ciclo n-dimensional se escribe así: $z = g[M^n]$, donde g es un elemento de un grupo G. Ya que no hay fronteras n-dimensionales, la afirmación queda demostrada.

AFIRMACIÓN 3. *Sea $G = \mathbb{Z}$ un grupo de números enteros. Entonces para una variedad cerrada conexa no orientada n-dimensional tendremos:*

$$H_n(M^n, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_n(M^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

DEMOSTRACIÓN. Cualquier ciclo n-dimensional debe tener el aspecto $z = \lambda \sum_i \sigma_i^n$, donde $\lambda \neq 0$ es un número entero y los símplex σ_i^n están orientados de manera conveniente. Si los símplex σ_1^n y σ_2^n tienen frontera por el símplex σ^{n-1}, entonces este símplex se incluye en $\partial\sigma_1^n$ y $\partial\sigma_2^n$ con los signos opuestos si, y sólo si, los símplex σ_1^n y σ_2^n son orientados igualmente en la variedad M^n (verifíquese).

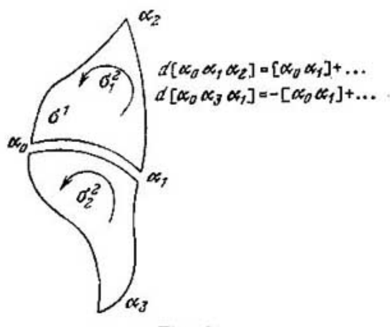


Fig. 3.

Por eso $\partial z = 0$ si, y sólo si, en todos los símplex σ_i^n puede ser escogida la única orientación, es decir, si la variedad M^n es orientable. La afirmación queda demostrada.

COROLARIO. *Sea* $[M^n] = \sum_i \sigma_i^n$ *la suma de todos los símplex n-dimensionales de la variedad no orientable* M^n *(generatriz en el grupo* $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$*). Entonces*

$$\partial_* [M_n] \neq 0 \text{ en el grupo } H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z}) \text{ y } 2\partial_* [M^n] = 0.$$

Pasamos ahora a la triangulación de las variedades suaves bidimensionales y a su clasificación con ayuda de los complejos simpliciales.

Clasifiquemos las variedades bidimensionales suaves compactas cerradas conexas. De aquí en adelante vamos a considerar sólo tales variedades, y por eso no mencionaremos cada vez las restricciones impuestas a la variedad, enumeradas más arriba.

LEMA 2. *Cualquier variedad suave bidimensional* M^2 *se puede triangular suavemente (es decir, partir con curvas suaves en triángulos suaves tales, que dos triángulos cualesquiera de esta división no se intersecan, tienen un vértice común, o bien un lado común).*

DEMOSTRACIÓN. Sumergimos (encajamos) M^2 en un espacio euclídeo de dimensión finita (véase [1], parte II, § 9). Entonces

sobre M^2 surge una métrica de Riemann inducida. Para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño dos puntos cualesquiera $x, y \in M^2$, para los cuales $\rho(x, y) < \varepsilon$ (ρ es una distancia sobre M^2 engendrada por la métrica de Riemann), se unen por la única geodésica más corta $\gamma_{x,y}$. Vamos a recubrir M^2 con un sistema finito de discos de radio $< \varepsilon/2$: $D_1, D_2, \ldots, D_N$. El disco D_1 puede ser triangulado suavemente con ayuda de las geodésicas. Para difundir la triangulación en los discos que tienen una intersección no vacía con D_1 (por ejemplo, sobre D_2), es suficiente notar que la geodésica perteneciente a $D_1 \cap D_2$, construida antes en D_1, también se presenta como una geodésica desde el punto de vista del disco D_2 y por eso la triangulación puede ser prolongada en el disco D_2 (anteriormente desmenuzando, probablemente, la triangulación sobre D_1). El proceso se concluye dentro de un número finito de pasos. El lema queda demostrado.

Al principio describamos todos los tipos de variedades bidimensionales. La primera serie es una esfera con g asas M_g^2; g es el género

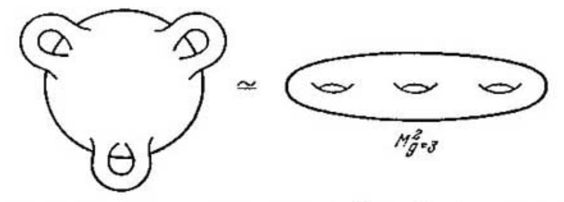


Fig. 4. Esfera con g asas $S^2 + (g) = M_g^2$ (en la figura, $g = 3$).

de la superficie. Por ejemplo, estas variedades aparecen al estudiar las superficies de Riemann de las funciones algebraicas de tipo $w = \pm\sqrt{P_n(z)}$ (el polinomio P_n no tiene raíces múltiples). Recordemos que M_g^2 es igual al conjunto de los ceros de la ecuación $w^2 - P_{2g+1}(z) = 0$ en $\mathbb{C}P^2(z, w)$. Estas variedades se puede realizar suavemente en $\mathbb{R}^3$ como las superficies mostradas en la fig. 4 (véase más detalladamente [1], parte II, § 4).

La segunda serie de las variedades (vamos a designarlas por M_μ^2) se obtiene, si de una esfera S^2 se excluyen los discos D^2 no intersecados de par en par, y en la frontera de cada agujero recubido se identifican los puntos opuestos diametralmente (véase la fig. 5, *a*). Esta operación se llama «pegadura de la esfera S^2 con μ cintas de Moebius».

En particular, si $\mu = 1$, la superficie M_μ^2 es un plano real proyectivo $\mathbb{R}P^2$ (fig. 5, *b*), si $\mu = 2$, la superficie $M^2\mu$ se llamará superficie (botella) de Klein. Notemos, que en [1], parte II, § 18, la superficie de Klein fue definida como un factor del plano por algún grupo

de movimientos discreto. La coincidencia de su realización con $M^2_{\mu=2}$ es evidente de la fig. 5, *c*.

Apriori tendría derecho a una existencia independiente también una serie «mezclada»: una esfera S^2 a la que están unidas g asas y μ cintas de Moebius. Pero esta serie «mezclada» se contiene íntegramente en la serie M^2_μ. En efecto, consideremos S^2 a la que están unidas un asa y una cinta de Moebius (véase la fig. 6). Pero para la superficie de Klein tiene lugar el difeomorfismo representado en la fig. 7.

De maner a que la pegadura a S^2 de un asa y una cinta de Moebius es equivalente a la pegadura a S^2 de tres cintas de Moebius (véase la fig. 8). Por consiguiente, en presencia de por lo menos una cinta de Moebius cada asa puede ser reemplazada difeomorfamente con dos cintas de Moebius.

Como vamos a demostrarlo rigurosamente ahora, las variedades M^2, en realidad, se escriben íntegramente con esas dos series infinitas: M^2_g y M^2_μ.

Consideremos una M^2 arbitraria (véase las restricciones al principio de la parte) con una triangulación suave (véase el lema). Cortemos M^2 a lo largo de todas las aristas de esta triangulación, poniendo, de antemano, en ambos lados de cada corte las mismas letras (diferentes para distintos cortes) y fijando la misma orientación en ambas orillas del corte (véase la fig. 9).

De manera que hemos transformado M^2 en un conjunto de triángulos, cuyos lados están designados con letras y está dada la dirección; cada letra se incluye en este conjunto exactamente dos veces, además, dos letras iguales pertenecen a diferentes triángulos. Comencemos un proceso inverso de la pegadura de M^2, exigiendo, sin embargo, que cada vez después de pegar un nuevo triángulo a una región ya obtenida, esta última permanezca plana. Es evidente que, como resultado de este procedimiento (y de las propiedades indicadas de la numeración de los lados) obtendremos un polígono plano conexo, cuyos lados son connotados con letras y poseen orientaciones (cada letra se encuentra exactamente dos veces). A este polígono lo denominamos polígono fundamental (está definido por una triangulación dada no unívocamente). Fijemos una orientación sobre un polígono W y confrontémosle una palabra, que aparece naturalmente al rondar la frontera de W (comenzando desde cualquier vértice): apuntando consecutivamente las letras que numeran los lados de W, al mismo tiempo, poniendo en la palabra la letra en el grado $+1$, si la orientación del lado coincide con la inducida por la orientación de W, y en el grado -1, en el caso contrario. Véase el ejemplo en la fig. 10.

Así, hemos confrontado a cada M^2 (no unívocamente) una palabra $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$; k es un número par de los lados de W; cada letra a_α se incluye en W exactamente dos veces. Estas «palabras»

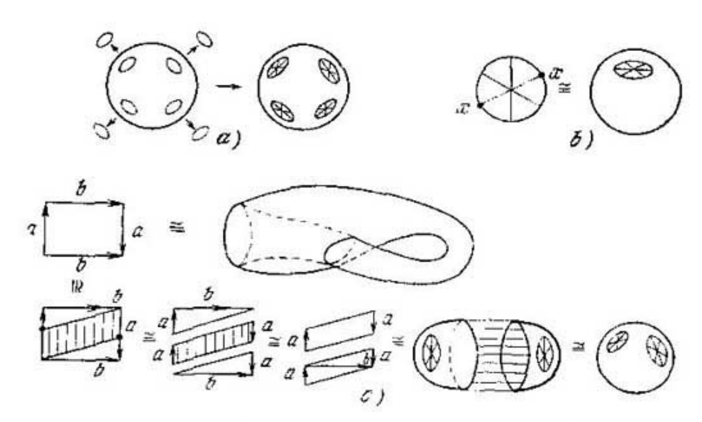


Fig. 5 a) La variedad $M^2_\mu = S^2 + (\mu)$ (en la figura $\mu = 4$), obtenida con la pegadura de la esfera S^2 con μ películas de Moebius;
b) $M^2_{\mu=1} = \mathbb{R}P^2$, plano proyectivo real;
c) $M^2_{\mu=2}$ superficie (botella) de Klein.

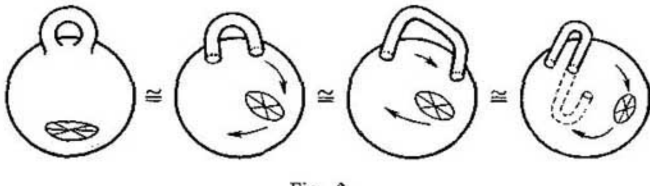


Fig. 6.

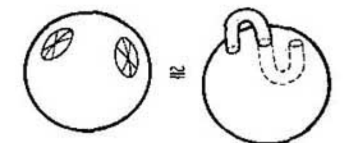


Fig. 7. La esfera S^2 con el asa «vuelta del revés».

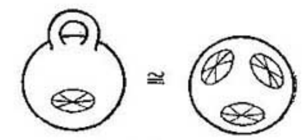


Fig. 8.

codifican $\{M^2\}$; a cada M^2 le corresponde un conjunto infinito de tales códigos. Ahora reconstruiremos estos códigos con operaciones elementales (generadores de los homeomorfismos de M^2), para reducirlos a la forma canónica. Resulta que hay sólo tres formas canónicas (precisamente ellas dan clasificación a $\{M^2\}$).

LEMA 3. *La palabra W puede ser reconstruida de tal modo, que todos los vértices de W (es decir, los vértices del polígono) se peguen en un solo punto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, que existen por lo menos dos clases de equivalencia no vacías de los vértices: $\{P\}$ y $\{Q\}$. Es posible

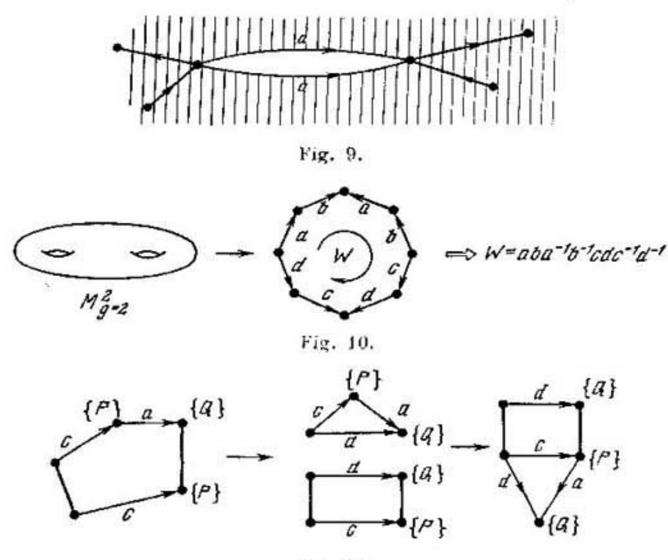


Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

considerar que existe tal arista $a \in \partial W$, que sus puntos finales pertenecen a distintas clases: $\{P\}$ y $\{Q\}$. Efectuamos la siguiente operación elemental (véase la fig. 11). (Con segmentos en negrilla están designadas las aristas de ∂W que no nos interesan ahora.)

Es evidente, que esta operación de volver a pegar el polígono W corresponde a un homeomorfismo de M^2. Por otra parte, esta reconstrucción disminuyó el número de vértices, representantes de la clase $\{P\}$, en uno y aumentó el número de vértices, representantes de la

clase $\{Q\}$, en uno: $(\{P\}, \{Q\}) \to (\{P\} - 1; \{Q\} + 1)$. De manera que exterminamos paulatinamente la clase $\{P\}$, «pasando» los vértices de esta clase a otras. El último paso será la operación del exterminio del último vértice de la clase $\{P\}$ (véase la fig. 12). (Notemos, que en el proceso del exterminio de la clase $\{P\}$, las clases $\{Q\}$, a los cuales se pasan los vértices de la clase $\{P\}$, pueden transformarse.) El polígono (o la palabra) W que tiene sólo una clase de vértices, se llama, habitualmente, «reducido».

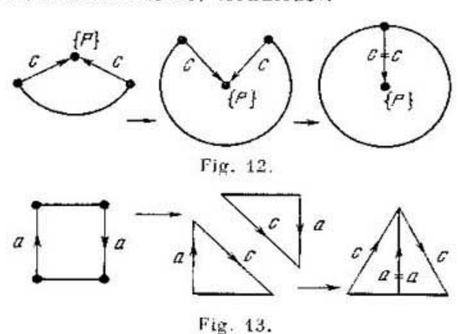


Fig. 12.

Fig. 13.

LEMA 4. *Sea que la palabra W tiene la forma $W = -aa^{-1}-$ Entonces existe un homeomorfismo que transforma la palabra W en una palabra equivalente $W' = -1-$.*

DEMOSTRACIÓN. *Véase la fig.* 12.

LEMA 5. $W = -a-a- \simeq W' = -aa-$.

DEMOSTRACIÓN. Véase la fig. 13. Queda volver a designar a c por a. El lema queda demostrado.

LEMA 6. $W = -a-b-a^{-1}-b^{-1}- \simeq W' = -aba^{-1}b^{-1}-$.

DEMOSTRACIÓN. Véase la fig. 14. El lema está demostrado.

LEMA 7. *Si $W = -a\overset{\alpha}{-}a^{-1}-$, donde el conjunto de letras $\alpha \neq \varnothing$, entonces existe un $b \in \alpha$ tal, que $b^{-1} \notin \alpha$:*

$$W = -\underbrace{a-b-a^{-1}}_{\alpha}-b^{-1}-$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario: sea para cualquier $b \in \alpha$, $b^{-1} \in \alpha$. Pero entonces, en un conjunto de vértices de W aparecen, por lo menos, dos clases de vértices no equivalentes, ya que los vértices $\in\alpha$, interactúan (pegan) sólo con los vértices $\in\alpha$ (véase la fig. 15). Como $\alpha \neq \varnothing$ y $W \setminus \{\alpha \cup a \cup a^{-1}\} \neq \varnothing$ (véase el lema 4), obtenemos una contradicción con la afirmación del lema 3, según

el cual consideramos W un polígono reducido. El lema queda demostrado.

LEMA 8. $W = -aba^{-1}b^{-1} - cc - \simeq W' = -a^2 - b^2 - c^2$

DEMOSTRACIÓN. Véase la fig. 16. El lema 8 se deduce definitivamente del lema 5.

Así hemos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 3 (sobre la clasificación de las superficies bidimensionales). *Cualquiera variedad M^2 bidimensional suave compacta conexa*

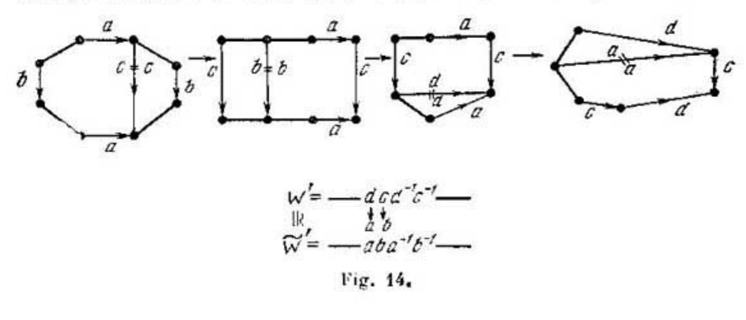


Fig. 14.

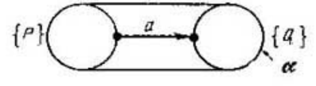


Fig. 15.

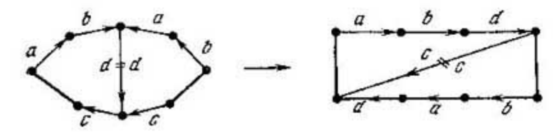


Fig. 16.

cerrada es difeomorfa a una de las variedades determinadas con las siguientes palabras (códigos) W:

1) $W = aa^{-1}$;
2) $W = a_1b_1a_1^{-1}b^{-1}, a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$;
3) $W = c_1^2c_2^2 \ldots c_\mu^2$.

Cualquier variedad suave bidimensional conexa compacta con borde, se obtiene de un disco bidimensional D^2 según las siguientes operaciones: a) con exclusión de un número finito de puntos (es decir, de un número finito de discos con radios suficientemente pequeños);

b) con pegadura de un número finito de asas; c) con pegadura de un número finito de cintas de Moebius. Con todo esto, las operaciones enumeradas no deben tocar la frontera del disco inicial D^2.

Describamos más detalladamente la estructura de las variedades M^2 en concordancia con esta clasificación.

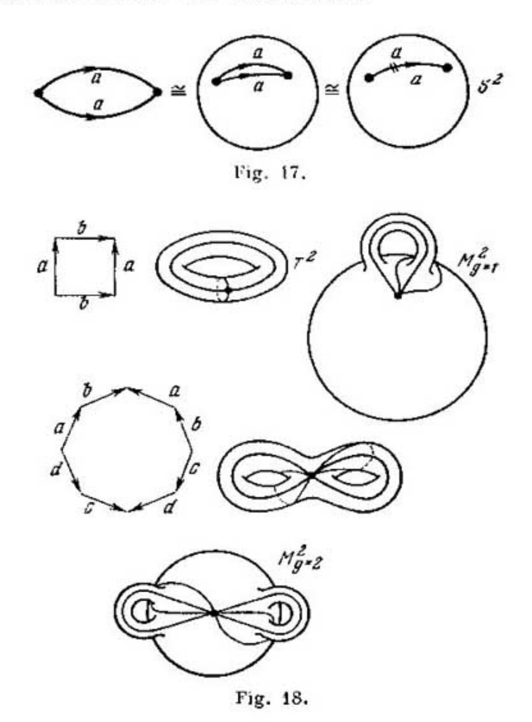


Fig. 17.

Fig. 18.

La variedad del tipo 1) es difeomorfa a la esfera S^2 (véase la fig. 17).

La variedad del tipo 2) es difeomorfa a la esfera S^2 con g asas (las variedades orientables M^2_g). Véase la fig. 18.

La variedad del tipo 3) es difeomorfa a la esfera S^2 con cintas de Moebius (las variedades no orientables M^2_μ). Véase la fig. 19.

OBSERVACIÓN 1. El cálculo de los grupos de homologías de las variedades del tipo 1), 2), 3) (por ejemplo, con coeficientes enteros)

es un ejercicio elemental. El cálculo muestra que todas las formas canónicas enumeradas no son homeomorfas entre sí.

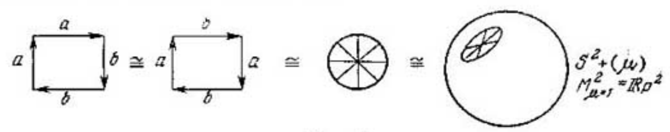


Fig. 19.

OBSERVACIÓN 2. También hay otros métodos cómodos para codificar $\{M^2\}$. Cualquier M^2 puede ser representada de la siguiente forma:

$$W=a_1a_2\ldots a_Na_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_{N-1}^{-1}a_N^{\varepsilon},\qquad \varepsilon=\pm 1,$$

donde $\varepsilon=-1$ si, y sólo si, $M^2=M_g^2$ es una variedad orientable (entonces $N=2g$ es par); $\varepsilon=+1$ (para cualquier N) si, y sólo si, $M^2=M_\mu^2$ es no orientable.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el caso $M_g^2: W=a_1\ldots a_Na_1^{-1}\ldots$ $\ldots a_{N-1}^{-1}a_N^{-1}$; $N=2g$. Con ayuda de transformaciones elementales

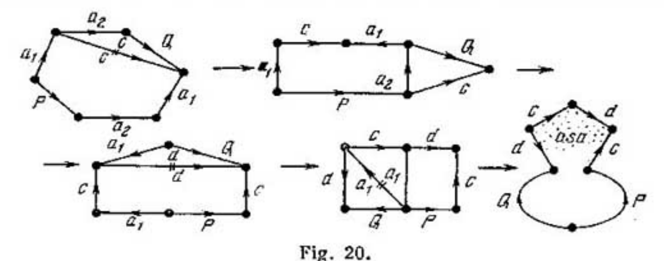


Fig. 20.

(véanse más arriba los lemas 3—8) llevamos W a la forma canónica M_g^2 (véase el teorema precedente). Esta reducción la realizamos desprendiendo consecutivamente las asas estandarizadas del tipo $aba^{-1}b^{-1}$. Consideremos

$$W=\underset{a}{a_1}\underset{b}{a_2}\underbrace{a_3\ldots a_N}_{Q}\underset{a^{-1}}{a_1^{-1}}\underset{b^{-1}}{a_2^{-1}}\underbrace{a_3^{-1}\ldots a_N^{-1}}_{P}.$$

Luego véase la fig. 20.

De manera que destacamos la primera asa en forma explícita: $d^{-1}cdc^{-1}$ pero cambiando, al mismo tiempo, los segmentos P y Q.

Siguiendo la operación de destacar las asas y recordando que $N = 2g$ es par, obtenemos una palabra $W = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} \simeq \simeq M_g^2$. Así presentamos todas las variedades orientables. Para el «caso orientado» el teorema queda demostrado. Para el «caso no orientable» la demostración es completamente análoga (véase los lemas 3—8), y por eso la dejamos a cargo del lector.

§ 4. Operación de pegadura de célula a un espacio topológico. Espacios celulares. Teoremas sobre reducción de los espacios celulares. Homologías y el grupo fundamental de superficies y algunas otras variedades.

Sean: X, un espacio topológico; D^n, un disco n-dimensional; $S^{n-1} = \partial D^n$, su frontera, una esfera $(n-1)$-dimensional. Consideramos fijada la orientación del disco D^n; esta orientación induce la orientación de la frontera S^{n-1}. Sea dada la aplicación de esta esfera en el espacio X:

$$f;\ S^{n-1} \to X \tag{1}$$

Construimos un nuevo espacio $D^n \cup_f X$, identificando cada punto x sobre la esfera S^{n-1} con un punto $f(x)$ en el espacio X. Se dice que el espacio $D^n \cup_f X$ se obtiene del espacio X mediante pegadura de una célula n-dimensional (D^n, f).

La topología se introduce en el espacio $D^n \cup_f X$ de la siguiente manera. Al conjunto $K \subset D^n \cup_f X$ lo llamaremos cerrado, si su intersección $K \cap X$ es cerrada y una preimagen completa $K \cap D^n$ es cerrada en el disco D^n.

EJEMPLO 1. La esfera S^n se obtiene de un punto * mediante la pegadura de una célula n-dimensional: $S^n = D^n \cup_f *$, donde f: $S^{n-1} \to *$, es una aplicación en un punto.

EJEMPLO 2. Un espacio real proyectivo $\mathbb{R}P^n$ puede ser considerado como un disco D^n que tiene pegados los puntos diametralmente opuestos en la frontera S^{n-1}. Nótese que la esfera S^{n-1} con los puntos identificados diametralmente opuestos, es $\mathbb{R}P^{n-1}$. Por consiguiente, $\mathbb{R}P^n$ puede considerarse como $\mathbb{R}P^{n-1}$ con una célula n-dimensional pegada

$$\mathbb{R}P^n = D^n \cup_{f_n} \mathbb{R}P^{n-1}. \tag{2}$$

Aquí la aplicación $f_n : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ es un cubrimiento estándar.

Lema 1. *Si las aplicaciones f, g: $S^{n-1} \to X$ son homotópicas, entonces los espacios $D^n \cup_f X$ y $D^n \cup_g X$ son equivalentes homotópicamente.*

DEMOSTRACIÓN. Que la aplicación F: $S^{n-1} \times I \to X$ de la homotopía de las aplicaciones f y g, donde I es un segmento unidad. Pega-

mos al espacio X el producto $D^n \times I$ por la aplicación F de una parte de su frontera:

$$\hat{X} = (D^n \times I) \cup_F X. \tag{3}$$

Entonces los espacios $D^n \cup_f X$ y $D^n \cup_g X$ se encuentran en $\hat{X}$:

$$D^n \cup_f X = ((D^n \times 0) \cup_F X) \subset \hat{X}, \quad D^n \cup_g X = ((D^n \times 1) \cup_F X) \subset \hat{X}. \tag{4}$$

Sea φ_t una homotopía, que aprieta $D^n \times I$ sobre $D^n \cup S^{n-1} \times I$ por los rayos trazados del punto * (véase la fig. 21). La homotopía

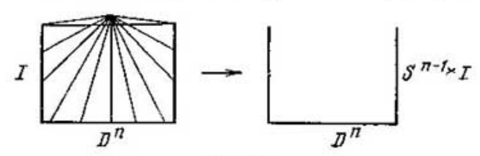


Fig. 21.

φ_t es constante sobre $D^n \cup S^{n-1} \times I$, por eso determina una equivalencia homotópica $\hat{X} \sim D^n \cup_f X$. Análogamente, $\hat{X} \sim D^n \cup_g X$. El lema queda demostrado.

DEFINICIÓN 1. Al espacio X se lo llamaremos *celular*, si el mismo está obtenido de un conjunto finito de puntos mediante la iteración de la operación de pegar las células de diferentes dimensiones.

El conjunto inicial de puntos también puede considerarse como células 0-dimensionales.

OBSERVACIÓN. Para los espacios celulares con un número de células infinito, exigiremos que tengan un número finito de células en cada dimensión.

DEFINICIÓN 2. Un espacio celular X se denomina *complejo celular*, si cada célula está pegada a células de una dimensión menor.

A la unión de todas las células de dimensión $k \leqslant n$ la llamaremos armazón celular n-dimensional del complejo X. Designamos el armazón celular n-dimensional del complejo X mediante X_n. Obtenemos un sistema de los armazones sumergidos (encajados)

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \ldots \subset X. \tag{5}$$

OBSERVACIÓN. Un complejo simplicial es un caso particular de un complejo celular. Un armazón n-dimensional de un complejo simplicial, es el conjunto de todos sus simplex hasta una dimensión n inclusive.

TEOREMA 1. *Cualquier espacio celular es equivalente homotópicamente a un complejo celular.*

DEMOSTRACIÓN. Basta mostrar que cada aplicación de una esfera S^k en un complejo celular Y es homotópica a la aplicación de S^k en su armazón k-dimensional Y_k. Entonces, en vigor del lema 1, el resultado de cada pegadura de una célula será homotópicamente equivalente a un complejo celular.

Así, sean: Y, un complejo celular; $f\colon S^k \to Y$ una aplicación. La imagen de la esfera S^k al aplicar f se interseca sólo con un número finito de células. Si la imagen $f(S^k)$ se interseca con el interior de alguna célula D^n, donde $n > k$, entonces esta parte de la imagen puede ser desplazada en la frontera. Efectivamente, la aplicación f

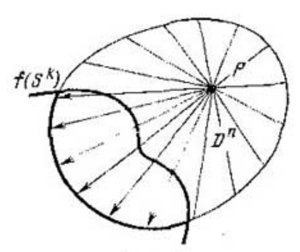


Fig. 22.

sobre una preimagen entera del interior de la célula $f^{-1}(D^n)$ puede ser sustituida por una aplicación suave, homotópica a ella (véase [1], parte II, § 12), y por el teorema de Sard esta imagen no cubre por lo menos un punto interior P en D^n. Al proyectar $D^n \setminus P$ del punto P en la frontera, desplazamos una parte de la imagen $f(S^k)$ en la frontera, o sea, en el armazón Y_{n-1} (véase la fig. 22).

Repitiendo este razonamiento para todas las células con una dimensión mayor que k, al fin y al cabo apretaremos la imagen $f(S^k)$ en el armazón Y_k del complejo Y. Así el teorema está demostrado íntegramente.

DEFINICIÓN 3. Una aplicación $f\colon X \to Y$ de los complejos celulares se llama *celular*, si traslada un armazón k-dimensional X_k de un complejo X en un armazón k-dimensional Y_k de un complejo Y (para cualquier k).

TEOREMA 2. *Cualquier aplicación continua de los complejos celulares es homotópica a una aplicación celular.*

La demostración de este teorema (teorema sobre la «aproximación celular») es totalmente análoga a la del teorema 1, por eso la dejamos al lector como ejercicio.

Sean: X, un complejo celular; X_{k-1} y X_{k-2}, sus armazones $(k-1)$-dimensional y $(k-2)$-dimensional. Nótese que el espacio X_{k-1}/X_{k-2}, donde X_{k-2} está identificado en un punto, es simplemente

un ramo de esferas $(k-1)$-dimensionales (una para cada célula D^{n-1}). A la pegadura de una célula k-dimensional (D^k, f) le corresponde la aplicación

$$S^{k-1} \xrightarrow{f} X_{k-1} \to X_{k-1}/X_{k-2} \tag{6}$$

de la esfera S^{n-1} en el ramo de las esferas $(k-1)$-dimensionales.

Sean $\sigma^k = (D^k, f)$, $\sigma_i^{k-1} = (D^{k-1}, f_i)$, células de dimensiones k y $(k-1)$. Definimos el "coeficiente de incidencia" o sea el número $[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}]$ para el par de células σ^k y σ_i^{k-1}, como el grado de la aplicación (6) sobre el i-ésimo sumando del ramo X_{k-1}/X_{k-2} (la esfera S_i^{k-1}, correspondiente a la célula σ_i^{k-1}).

Definimos ahora un complejo de cadenas celulares del complejo X designado por $C(X; G) = \sum_{k \geqslant 0} C_k(X; G)$. Una cadena celular de la dimensión k es una combinación de células formal lineal: $c_k = \sum_i g_i \sigma_i^k$, donde σ_i^k son células de la dimensión k, g_i son elementos de un grupo G abeliano arbitrario escrito aditivamente. Definimos un operador de frontera por la fórmula

$$\partial \sigma^k = \sum_i [\sigma^k : \sigma_i^{k-1}] \, \sigma_i^{k-1}, \quad \partial : C_k(X; G) \to C_{k-1}(X; G). \tag{7}$$

(El operador ∂ se prolonga linealmente en cualesquiera cadenas.)

OBSERVACIÓN 1. Si X es un complejo simplicial, entonces el operador ∂ definido aquí coincide con un operador de frontera del § 3 (verifíquese).

OBSERVACIÓN 2. Para $G = \mathbb{Z}$ (cadenas con coeficientes enteros) tenemos una aplicación $\pi_k(X_k, X_{k-1}) \xrightarrow{\alpha} C_k(X; \mathbb{Z})$ sobre todo el grupo de cadenas.

LEMA 2. $\partial\partial = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Se puede considerar que cada célula σ_i^k: $D^k \to X_k$ representa un elemento $[\sigma_i^k]$ de un grupo relativo $\pi_k(X_k, X_{k-1})$ (véase [1], parte II, § 21). El operador de frontera ∂ está engendrado por el homomorfismo de frontera de la sucesión exacta del par (X_k, X_{k-1})

$$\partial : \pi_k(X_k X_{k-1}) \to \pi_{k-1}(X_{k-1}) \tag{8}$$

y por el homomorfismo j: $\pi_{k-1}(X_{k-1}) \to \pi_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2})$ (véase [1], parte II, § 21). Tenemos para σ_i^k, que es una cadena de $C_k(X; \mathbb{Z})$:

$$\partial(\sigma_i^k) = \alpha(j\partial[\sigma_i^k]) \in C_{k-1}(X; \mathbb{Z}). \tag{9}$$

En vigor de la identidad $\partial j = 0$ obtenemos $\partial\partial = 0$ para las cadenas con coeficientes enteros. Las células σ_i^k dan una base también para las cadenas con cualquier grupo de coeficientes G. El lema queda demostrado.

Ahora es posible determinar las homologías y cohomologías de un complejo de las cadenas celulares de una manera ordinaria. Obtendremos las homologías y cohomologías celulares. Para los complejos simpliciales estas homologías coinciden con las simpliciales.

Ejemplos de los complejos celulares.

EJEMPLO 1. Esfera S^n. Ya hemos visto que la esfera S^n se obtiene mediante la pegadura de una célula n-dimensional σ^n a otra de dimensión nula σ^0. Aquí tenemos: $\partial\sigma^0 = 0$, $\partial\sigma^n = 0$. Lo último es evidente para todos los $n > 1$. Para $n = 1$ la frontera de una célula σ^1 es una esfera de dimensión nula S^0 (un par de puntos), además, estos dos puntos son de signo distinto.

Da aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} &H_0(S^n; G) = G, \quad n \geqslant 1, \\ &H_n(S^n; G) = G, \\ &H_k(S^n; G) = 0, \quad k \neq 0, n. \end{aligned} \tag{10}$$

Si hay un ramo q de las esferas $S^n_{(j)}$, $n \geqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, q$, unidas en un punto, entonces hay un vértice σ^0 y q células n-dimensionales $\sigma_1^n, \ldots, \sigma_q^n$, donde $\partial\sigma_i^n = 0$. A tal ramo se reduce un dominio obtenido de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$ mediante la exclusión de un conjunto de q puntos. Designemos a este ramo por K_q^n. Tenemos:

$$\begin{aligned} &H_0(K_q^n; G) = G, \\ &H_n(K_q^n; G) = G + G + \ldots + G \ (q \text{ piezas}) \\ &H_l(K_q^n; G) = 0, \quad l \neq 0, n. \end{aligned} \tag{11}$$

EJEMPLO 2. La partición celular del toro. Aquí tenemos células σ^0, σ_1^1, σ_2^1, σ^2 (véase la fig. 23), además, $\partial\sigma^0 = \partial\sigma_1^1 = \partial\sigma_2^1 = \partial\sigma^2 = 0$;

$$H_0(T^2) = G, \quad H_1(T^2) = G + G, \quad H_2(T^2) = G. \tag{12}$$

EJEMPLO 3. La superficie (botella) de Klein tiene las siguientes células: σ^0, σ_1^1, σ_2^1, σ^2 (véase la fig. 24), al mismo tiempo $\partial\sigma^0 = \partial\sigma_1^1 = \partial\sigma_2^1 = 0$, $\partial\sigma^2 = 2\sigma_1^1$

$$H_0(K^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_2(K^2; \mathbb{Z}) = 0, \quad H_1(K^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2;$$
$$H_2(K^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2. \tag{13}$$

EJEMPLO 4. La superficie proyectiva $\mathbb{R}P^2$. Aquí tenemos 3 células: σ^0, σ^1, σ^2; $\partial\sigma^0 = \partial\sigma^1 = 0$, $\partial\sigma^2 = 2\sigma^1$ (véase la fig. 25),

$$H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2, \quad H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = 0. \quad (14)$$

EJEMPLO 5. Una superficie orientable del género g: tenemos un $4g$-ágono (véase la fig. 26 para $g = 2$). Las células: σ^0, σ_1^1, ..., σ_{2g}^1, σ^2. Son nulas las fronteras de todas las células. Tenemos

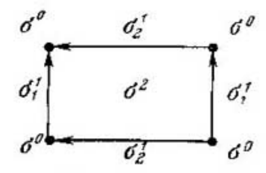


Fig. 23. Toro.

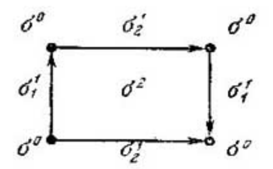


Fig. 24. Superficie de Klein.

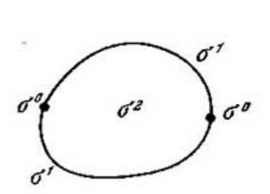


Fig. 25. Plano proyectivo.

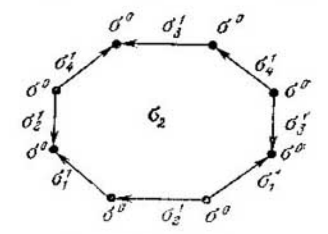


Fig. 26. Rosquilla.

las homologías ($G = \mathbb{Z}$): $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}$ ($2g$ sumandos).

EJEMPLO 6. Un espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$. Hemos visto más arriba que $\mathbb{R}P^n = D^n \cup_{f_n} \mathbb{R}P^{n-1}$, donde $f_n \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ es un cubrimiento estándar. Obtenemos por una célula $\sigma^k = (D_k, f_k)$ en cada dimensión k: $\sigma^0, \ldots, \sigma^n$. Mostremos que $\partial\sigma^{2k+1} = 0$, $\partial\sigma^{2k} = 2\sigma^{2k-1}$. La aplicación de la frontera S^m de una célula σ^{m+1} en un armazón m-dimensional de un espacio proyectivo, es un cubrimiento estándar $S^m \to \mathbb{R}P^m$. Por eso es necesario calcular el grado de la aplicación

$$S^m \to \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^m/\mathbb{R}P^{m-1} = S^m. \quad (15)$$

Esta aplicación se representa en la figura 27. Es una suma (en el sentido del grupo $\pi_m(S^m)$) de dos aplicaciones S^m en S^m. Para m impar estas dos aplicaciones tienen grado $+1$, por eso $\partial\sigma^{m+1} = 2\sigma^m$. Si m es par, los signos de los grados son opuestos y $\partial\sigma^{m+1} = 0$.

Así obtenemos una forma de homologías del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ para $G = \mathbb{Z}$ y $G = \mathbb{Z}_2$:

$$\text{a) } H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \mathbb{Z}, & n = 2k+1, \end{cases}$$
$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & k = 2l \\ \mathbb{Z}_2, & k = 2l+1, \text{ donde } 0 < k < n. \end{cases} \tag{16}$$

$$\text{b) } H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{17}$$

EJEMPLO 7. El espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^n$. Sean $(z_0, \ldots, z_n)$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{C}P^n$. La ecuación $z_0 = 0$

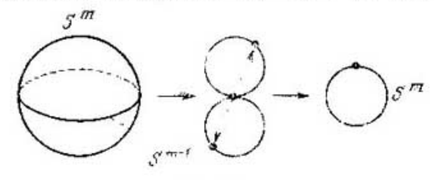


Fig. 27.

determina en $\mathbb{C}P^n$ una subvariedad coincidente con $\mathbb{C}P^{n-1}$. La diferencia $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ es un espacio complejo n-dimensional $\mathbb{C}^n$ (con las coordenadas $z_1/z_0, \ldots, z_n/z_0$). Por eso la diferencia $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ determina una célula $2n$-dimensional σ^{2n}. Continuando este proceso obtendremos la partición del espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^n$ en las células de dimensión par $\sigma^0, \sigma^2, \ldots, \sigma^{2n}$. Es evidente que aquí todas las fronteras son nulas. Por eso $H_{2k}(\mathbb{C}P^n; G) = G$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $H_{2k+1}(\mathbb{C}P^n; G) = 0$.

Los complejos celulares convienen para calcular homotopías. Recordemos que a un espacio X lo llamaremos n-conexo, si es linealmente conexo y todos los grupos $\pi_i(X) = 0$, cuando $i \leqslant n$.

TEOREMA 3. *Todo complejo celular n-conexo K es equivalente homotópicamente a un complejo celular $\widetilde{K}$ con vértice único σ^0 y sin las células de dimensiones* 1, 2, . . ., n.

Antes de demostrar el teorema consideremos dos ejemplos.

EJEMPLO 8. Sea $n = 0$. La reducción del complejo linealmente conexo K al $\widetilde{K}$ con un vértice es así: si se tiene una arista σ_i^1 (una célula unidimensional), cuya frontera $\partial\sigma_i^1 = \sigma_{1i}^0 \cup \sigma_{2i}^0$ se compone de dos vértices distintos, $\sigma_{1i}^0 \neq \sigma_{2i}^0$, entonces ponemos la identificación, reduciendo toda la arista σ_i^1 a un punto $\widetilde{\sigma}_{1i}^0 = \widetilde{\sigma}_{2i}^0$ que será un vértice. Las demás células no las cambiamos. Se obtiene un nuevo complejo K' con un menor número de vértices, etc., hasta que lleguemos a un complejo con un vértice. Los complejos K y K' son homotó-

picamente equivalentes (la demostración se da más abajo). Como resultado, obtenemos el complejo $\widetilde{K}$ con un vértice $\widetilde{\sigma}^0$, 1-célula $\widetilde{\sigma}_i^1$ y 2-célula $\widetilde{\sigma}_i^2$. El 1-armazón $\widetilde{K}_1$ es un ramo de circunferencias $\widetilde{\sigma}_i^1$: $\widetilde{K}_1 = S_1^1 \vee \ldots \vee S_N^1$, donde N es un número 1-célula $\widetilde{\sigma}_i$, $i = 1, \ldots, N$. Un grupo $\pi_1(\widetilde{K}_1)$ es libre con generatrices $\{\widetilde{\sigma}_i^1\} = a_i$ (véase [1], parte II, § 19). Las células $\widetilde{\sigma}_j^2$ se pegan mediante las aplicaciones de una frontera $S_j^1 = \partial\widetilde{\sigma}_j^2 \to \widetilde{K}_1$, que dan algunos elementos V_J de un grupo libre $\pi_1(\widetilde{K}_1)$ con las generatrices $a_1, \ldots, a_N$. Así, el grupo $\pi_1(K)$ es dado por las generatrices $a_1, \ldots, a_N$ y las relaciones $V_j = 1$ para todas las σ_i^2 2-celulares en el complejo $\widetilde{K}$ (con un vértice). Pasando a un grupo $H_1(K; \mathbb{Z})$ obtenemos los ciclos básicos $[a_1], \ldots, [a_N]$ y las relaciones $V_j = 0$ (en una escritura aditiva) en un grupo conmutado. De este modo se verifica la definición del grupo de homologías $H_1(K; \mathbb{Z}) = \pi_1(K)/[\pi_1(K), \pi_1(K)]$ dada en [1], parte II, § 19.

EJEMPLO 9. Si $n > 0$, entonces los grupos $H_{n+1}(\widetilde{K}; \mathbb{Z})$ y $\pi_{n+1}(\widetilde{K})$ son conmutativos. Ellos son dados por las mismas generatrices a_i, es decir, por las $\widetilde{\sigma}_i^{n+1}$ $(n+1)$-células en $\widetilde{K}$ $(i = 1, \ldots, N)$ y por las relaciones iguales de las fronteras de las σ_j^{n+2} $(n+2)$-células. Obtenemos el:

COROLARIO (teorema de Hurewicz). *Tiene lugar la igualdad* $\pi_{n+1}(K) = H_{n+1}(K, \mathbb{Z})$ *para un complejo n-conexo* $(n > 0)$.

DEMOSTRACIÓN. Cada aplicación de una esfera $(n+1)$-dimensional en un complejo celular K, es homotópica a una aplicación en un armazón $(n+1)$-dimensional (véase el teorema 2). Por eso, cualquiera aplicación de este tipo se representa en forma de combinación lineal con los coeficientes enteros de las células σ_i^{n+1} en $K(i = 1, \ldots, N)$. Cada relación $\sum_i \lambda_i\sigma_i^{n+1} \sim 0$ en el grupo $\pi_{n+1}(K)$ es una aplicación de un disco D^{n+2} en un complejo K tal, que su restricción en la frontera S^{n+1} es una combinación lineal $\sum_i \lambda_i\sigma_i^{n+1}$.

Semejante aplicación es homotópica a una aplicación que traslada D^{n+2} a un armazón de dimensión $n+2$; además la homotopía es constante en la frontera S^{n+1} (la demostración es completamente análoga a la del teorema 1). Por eso, cada relación de la forma «$\sum \lambda_i\sigma_i^{n+1}$ es homotópica a cero» en el grupo $\pi_{n+1}(K)$, es equivalente a la relación» $\sum \lambda_i\sigma_i^{n+1}$ es homológica a cero» en el grupo $H_{n+1}(K; \mathbb{Z})$. El corolario queda demostrado.

PROBLEMA 1. Demuestre la afirmación inversa. Sea K un complejo celular conexo, simplemente conexo. Si $H_k(K; \mathbb{Z}) = 0$,

cuando $0 < k < n$, entonces $\pi_k(K) = 0$ con los mismos k y $\pi_n(K) = H_n(K; \mathbb{Z})$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3. Fijamos un vértice σ^0 y lo unimos con los demás vértices σ_i^0 mediante las vías (curvas) γ_i. Se puede considerar que todas estas vías se encuentran en un armazón unidimensional del complejo K. Peguemos al complejo K semicírculos por cada vía γ_i. Obtendremos un nuevo complejo celular $\hat{K}$, que contiene el complejo K y, además, las células σ_i^1 y σ_i^2 (véase la fig. 28). Los interiores de las células σ_i^1 no se intersecan, por eso la

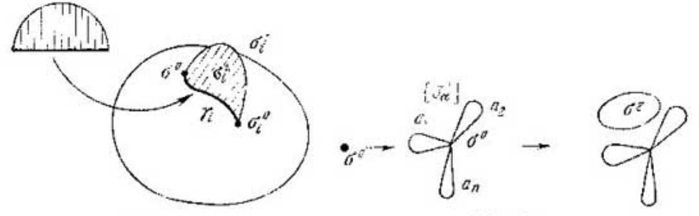


Fig. 28. Fig. 29.

unión de ellas está contraída en $\hat{K}$. Así, un espacio cociente $\widetilde{K} = \hat{K} / \bigcup_i \sigma_i^1$ obtenido mediante contracción de todas las células σ_i^1 en σ^0 es equivalente homotópicamente a $\hat{K}$. Por otro lado, el complejo $\hat{K}$ se contrae en K (el semicírculo se contrae en el diámetro), por eso $K \sim \hat{K} \sim \widetilde{K}$. El complejo $\widetilde{K}$ tiene exactamente una célula 0-dimensional (vértice).

Luego, sea que el complejo K tiene un vértice y ya no contiene células de dimensión $1, 2, \ldots, k-1$, $k < n$. Entonces un armazón k-dimensional del complejo K es un ramo de esferas k-dimensionales S_i^k. Cada esfera S_i^k es homotópica a cero en K en virtud de la n-conexión, por eso es posible pegarla por un disco D_i^{k+1} (se puede considerar que el disco D_i^{k+1} se encuentra en un armazón $(k+1)$-dimensional del complejo K). Peguemos a la aplicación del disco D_i^{k+1} un disco D^{k+2} (por la mitad de la frontera). De este modo obtendremos un complejo $\hat{K}$ equivalente homotópicamente a K, que contiene por una célula excesiva σ_i^{k+1} y σ_i^{k+2} en cada célula k-dimensional en K. El conjunto de las células σ^{k+1} es contraíble en $\hat{K}$, por eso $\widetilde{K} = \hat{K} / \bigcup_i \sigma_i^{k+1} \sim \widetilde{K} \sim K$. El complejo $\widetilde{K}$ es equivalente homotópicamente a K y no tiene células de la dimensión $1, 2, \ldots, k-1, k$. El teorema 3 queda demostrado.

El teorema de la clasificación de las superficies cerradas (véase el § 3) permite indicar una representación estándar M^2 en forma de un conjunto de células: $M^2 = \sigma^0 \cup (\bigcup_\alpha \sigma^1_\alpha) \cup \sigma^2$, donde σ^0 es un punto; a él está pegado un ramo de circunferencias $\bigvee_\alpha S^1_\alpha$ y después a este ramo, en concordancia con una palabra W, se pega el disco D^2 (una célula bidimensional σ^2) (véase la fig. 29).
Un caso especial de M^2_g cuando $g = 1$ se muestra en la fig. 30.

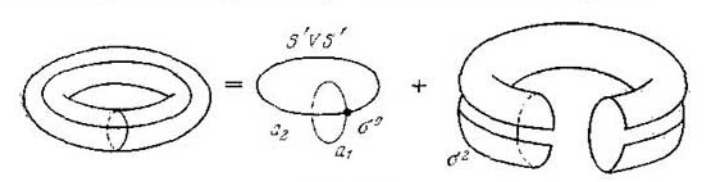


Fig. 30.

De manera que las circunferencias $\{S^1_\alpha\}$ se pueden numerar con las letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n = 2g$ para M^2_g y $n = \mu$ para M^2_μ) y un polígono fundamental W se puede identificar con una célula bidimensional σ^2. Como un grupo $\pi_1(\bigvee_{\alpha=1}^{n} S^1_\alpha)$ es libre con generatrices $a_1, \ldots, a_n$, la pegadura de una célula σ^2 por la palabra $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{i_n}^{\varepsilon_n}$ introduce una única relación en $\pi_1(M^2)$.
Así, un grupo fundamental $\pi_1(M^2)$ admite la siguiente representación por las generatrices y relaciones:

$$\pi_1(M^2) = \begin{cases} 1 \text{ para } S^2; \\ a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g; \\ W = a_1 b_1 a_1^{-1}, b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \text{ para } M^2_g, \\ a_1, \ldots, a_\mu; \quad W = a_1^2 a_2^2 \ldots a_\mu^2 = 1 \text{ para } M^2_\mu. \end{cases} \tag{18}$$

PROBLEMA 2. Demostrar el isomorfismo de los siguientes grupos, correspondientes a diferentes representaciones de $\pi_1(M^2)$:

1. a) $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$; $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.
   b) $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \ldots, \bar{a}_g \bar{b}_g$; $\bar{W} = \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_g \bar{b}_1 \ldots \bar{b}_g \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1^{-1} \ldots \bar{a}_g^{-1} \bar{b}_g^{-1}$.
2. a) $a_1, \ldots, a_\mu$; $W = a_1^2 \ldots a_\mu^2$.
   b) $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_k$; $\bar{W} = \bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1 \ldots \bar{a}_k \bar{b}_k \bar{a}_k^{-1} \bar{b}_k$, $k = \mu/2$, μ es par.
   c) μ es arbitrario; $\bar{\bar{a}}_1, \ldots, \bar{\bar{a}}_\mu$; $\bar{\bar{W}} = \bar{\bar{a}}_1 \ldots \bar{\bar{a}}_\mu \bar{\bar{a}}_1^{-1} \ldots \bar{\bar{a}}_{\mu-1}^{-1} \bar{\bar{a}}_\mu$.

PROBLEMA 3. Demostrar que para diferentes superficies, los grupos $\pi_1(M^2)$, e incluso $(H_1(M^2) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ son no isomorfos.

PROBLEMA 4. Clasificar todas las superficies bidimensionales suaves conexas (no compactas).

PROBLEMA 5. Demostrar que la igualdad a cero del índice de la intersección de cualesquiera dos ciclos unidimensionales es la condición necesaria y suficiente para la realización de una variedad bidimensional orientable suave conexa M^2 (abierta o con frontera) en forma de un dominio plano. (La variedad bidimensional plana es orientable automáticamente).

PROBLEMA 6. Para que la variedad bidimensional abierta M^2 sea homeomorfa a un dominio abierto en una variedad bidimensional compacta cerrada, es necesario y suficiente que un grupo $H_1(M^2; \mathbb{Z})$ (o $\pi_1(M^2)$) tenga un número finito de generatrices. Demuéstrelo.

PROBLEMA 7. Demostrar que cualquiera variedad abierta conexa bidimensional M^2 tiene un grupo fundamental libre, y que tal variedad M^2 es equivalente homotópicamente a un ramo finito $\bigvee_{i=1}^{k} S_i^1$ $(k < \infty)$, o bien a un ramo infinito de las circunferencias $\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i^1$.

OBSERVACIÓN. Se puede introducir una métrica de Riemann de curvatura constante sobre cada variedad compacta conexa suave cerrada bidimensional. Con esto, sobre la esfera S^2 y el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ se puede introducir una métrica de curvatura constante positiva (esta afirmación es evidente); sobre el toro y sobre la superficie de Klein se puede introducir una métrica de curvatura nula. La existencia de semejante métrica sobre el toro sigue de la representación: $T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$, donde el grupo $\Gamma = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$ tiene dos generatrices a, b, que actúan sobre $\mathbb{R}^2$ como traducciones. Está claro que el grupo Γ está representado por las isometrías de un plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Una situación análoga tiene lugar también en el caso de la superficie de Klein, que admite la representación de la forma $\mathbb{R}^2/\Gamma$, donde un grupo de movimientos Γ está engendrado por las transformaciones

$$T_1(x, y) = (x, y + 1), \quad T_2(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right),$$

unidas por la relación $T_2^{-1} T_1 T_2 T_1 = 1$.

Sobre todas las demás variedades bidimensionales (conexas compactas suaves cerradas) se puede introducir una métrica de Riemann de curvatura constante negativa. Para estas variedades M^2 existe una representación: $M^2 = L_2/\Gamma$, donde L_2 es un plano de Lobachevski (provisto, por consiguiente, de una métrica de curvatura constante negativa), Γ es un grupo isomorfo a $\pi_1(M^2)$ y que actúa sobre L_2 por las isometrías (movimientos) (véase [1], parte II, § 20).

Realizamos una acotación útil a propósito de las operaciones antedichas de pegadura de asas y de la cinta de Moebius. Resulta que estas operaciones son casos particulares de una operación más general, llamada «suma conexa de dos variedades de igual dimensión». Describamos esa operación más detalladamente.

Sean M_1^n y M_2^n dos variedades suaves cerradas de igual dimensión. Encajemos las variedades M_1^n y M_2^n en un espacio euclídeo $\mathbb{R}N$, donde N es bastante grande, y coloquemos M_1^n y M_2^n en $\mathbb{R}N$ de tal manera que un par de puntos: $x \in M_1$ e $y \in M_2$ tengan una distancia ε entre sí, donde $\varepsilon > 0$ es bastante pequeño, además, sus planos tangentes T_x y T_y son paralelos entre sí. Con esto se puede considerar que M_1 y M_2 no se intersecan en $\mathbb{R}^N$, por ejemplo, se encuentran a diferentes lados de un hiperplano $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ (fig. 31).

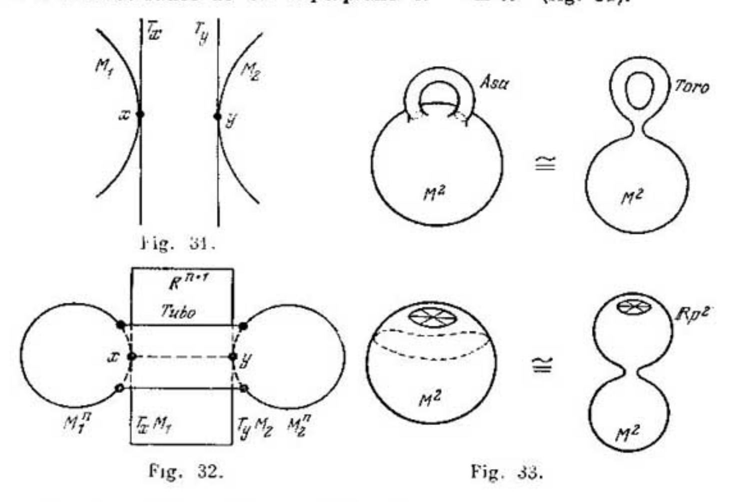


Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

En vigor del paralelismo de los planos T_x y T_y estos dos planos n-dimensionales se pueden incluir en un subespacio euclídeo $(n+1)$-dimensional $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$, y se puede considerar que el segmento $[x, y]$, que une los puntos x e y en $\mathbb{R}^{n+1}$, es ortogonal a T_x (en el punto x) y a T_y (en el punto y). Ahora podemos examinar un cilindro de radio suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$ con un eje $[x, y]$, cuyas bases —esferas S^{n-1}— se encuentran en T_x y T_y (los puntos x e y son los centros de las esferas). Vamos a construir una nueva variedad n-dimensional (designémosla por $M_1 \# M_2$), al cortar M_1 y M_2 discos de radio ε con centro en x y con el centro en y, uniendo las

esferas n-dimensionales obtenidas mediante el cilindro arriba construido (véase la fig. 32).

Nótese, que la variedad obtenida $M_1 \# M_2$ está determinada unívocamente (si M_1 y M_2 son conexas) en el siguiente sentido: al cambiar los puntos x, y por otros puntos $x' \in M_1$, $y' \in M_2$, la variedad $M_1 \# M_2$ es reemplazada por otra difeomorfa. Claro está, que la operación $\#$ es asociativa: $(M \# N) \# Q \approx M \# (N \# Q)$ (difeomorfismo). Además, la operación $\#$ es conmutativa.

Consideremos ahora desde el punto de vista de la operación de tomar una suma conexa, las operaciones de pegar el asa y la cinta de Moebius, introducidas antes. Es evidente que la operación de pegar un asa estándar $aba^{-1}b^{-1}$ es equivalente a la toma de una suma conexa de la variedad inicial M^2 y del toro T^2. Luego, la operación de pegar la cinta de Moebius es equivalente a la toma de una suma conexa de la variedad inicial M^2 y un plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ (véase la fig. 33).

Es evidente que $M^2 \# S^2 \approx M^2$ (difeomorfismo); $M^2_{g_1} \# M^2_{g_2} \approx M^2_{g_1+g_2}$; $M^2_{\mu_1} \# M^2_{\mu_2} \approx M^2_{\mu_1+\mu_2}$; $M^2 \# M^2_{g=1} \# M^2_{\mu=1} \approx M^2 \# M^2_{\mu=3}$.

Así, por ejemplo, la superficie de Klein es una suma conexa de dos planos proyectivos $\mathbb{R}P^2$ (véase más arriba).

De manera que un conjunto de clases de las variedades difeomorfas M^2 (las variedades se suponen compactas cerradas conexas) se transforma en un semigrupo abeliano P con dos generatrices: a (el toro T^2) y b (el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$) entre las cuales existe sólo la relación: $a \# b = b \# b \# b$. (Demuestre que no hay otras relaciones.) Como elemento nulo en el semigrupo P actúa una esfera bidimensional.

Utilizando particiones celulares de las superficies arriba obtenidas, es fácil calcular las homologías de todas las superficies bidimensionales cerradas y también el grupo fundamental:

1 ESFERA S^2. Sus homologías ya fueron calculadas: $H_0(S^2; \mathbb{Z}) = H_2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1 = 0$. Luego, sabemos que $\pi_1(S^2) = 0$ y $\pi_2(S^2) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

2 SUPERFICIES ORIENTABLES M^2_g. En vigor de la orientabilidad tenemos: $H_2(M^2_g; \mathbb{Z}) = H_0(M^2_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. En este caso un grupo fundamental se da por $2g$ generatrices $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$, y por la relación $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1$. Esta relación desaparece en el grupo conmutado $H_1(M^2_g; \mathbb{Z}) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ y obtenemos $H_1(M^2_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}$ ($2g$ sumandos).

3 SUPERFICIES NO ORIENTABLES M^2_μ. En virtud de no orientabilidad (véase § 3), $H_0(M^2_\mu; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_2(M^2_\mu; \mathbb{Z}) = 0$. En un grupo fundamental $\pi_1(M^2_\mu)$ se tienen μ generatrices $a_1, \ldots, a_\mu$, unidas por la relación $a_1^2a_2^2 \ldots a_\mu^2 = 1$. En las homologías $H_1(M^2_\mu; \mathbb{Z}) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ las generatrices $a_1, \ldots, a_\mu$ conmutan y están unidas mediante la relación $2(a_1 + \ldots + a_\mu) = 0$. Por eso $H_1(M^2_\mu; \mathbb{Z}) =$

$= \underbrace{\mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}}_{\mu - 1} + \mathbb{Z}_2$. Aquí las generatrices en los grupos $\mathbb{Z}$, son $a_1, \ldots, a_{\mu-1}$; la generatriz en el grupo $\mathbb{Z}_2$ es $a_1 + \ldots + a_\mu$.

Consideremos ahora el llamado «espacio lenticular» L_p, que se obtiene de la esfera S^3: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ mediante la factorización por la acción del grupo $\mathbb{Z}_p$:

$$(z_1, z_2) \sim \left(z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 e^{\frac{2\pi i}{p}}\right). \tag{19}$$

Cuando $p = 2$, obtenemos un espacio tridimensional proyectivo $\mathbb{R}P^3$.

Para construir la partición celular del espacio lenticular L_p partamos, primeramente, la esfera S^3 de la manera siguiente: sea $q = 0, \ldots, p-1$. Las células σ_q^3 son tales puntos (z_1, z_2), que $z_2 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\frac{2\pi q}{p} < \varphi < \frac{2\pi(q+1)}{p}$; σ_q^2, son tales puntos (z_1, z_2), que $z_2 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi = \frac{2\pi q}{p}$; σ_q^1, son tales puntos $(z_1, 0)$, que $z_1 = e^{i\varphi}$, $\frac{2\pi q}{p} < \varphi < \frac{2\pi(q+1)}{p}$; σ_q^0, son puntos $\left(e^{\frac{2\pi i q}{p}}, 0\right)$.

Está partición celular está representada esquemáticamente en la fig. 34, donde la esfera S^3 se identifica con un espacio tridimensional, compactado por un punto infinitamente alejado ($p = 3$).

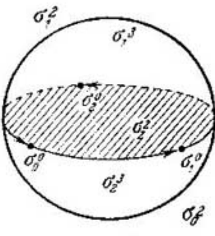


Fig. 34.

Con una orientación necesaria de estas células obtendremos:

$$\partial\sigma_q^3 = \sigma_{q+1}^2 - \sigma_q^2, \quad \partial\sigma_q^2 = \sigma_0^1 + \ldots + \sigma_p^1, \quad \partial\sigma_q^1 = \sigma_{q+1}^0 - \sigma_q^0. \tag{20}$$

(Aquí $(q + 1)$ se reduce por el módulo p). Después de la identificación por la acción del grupo $\mathbb{Z}_p$, las células σ_q^3, σ_q^2, σ_q^1, σ_q^0 con diferentes q se pegarán en una sola. Obtendremos la partición celular de la lente L_p, compuesta de cuatro células: σ^3, σ^2, σ^1, σ^0, además, de las fórmulas (20) se deduce que $\partial\sigma^3 = 0$, $\partial\sigma^2 = p\sigma^1$, $\partial\sigma^1 = 0$.

De aquí se deduce:

$$H_3(L_p;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}=H_0(L_p;\mathbb{Z}),\quad H_2(L_p;\mathbb{Z})=0,$$
$$H_1(L_p;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_p. \tag{21}$$

Para los coeficientes $\mathbb{Z}_p$ tendremos:

$$H_i(L_p;\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p,\ i=0,1,2,3,\ldots \tag{22}$$

PROBLEMA 8. Hallar los grupos de cohomologías $H^i(L_p;\mathbb{Z})$.

La variedad general de lente de dimensión $2n-1$ se denomina factor de la esfera S^{2n-1} por la acción de un grupo $\mathbb{Z}_m$, donde la acción de la generatriz tiene la forma

$$(z_1,\ldots,z_n)\to\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}z_1,\ e^{\frac{2\pi i q_1}{m}}z_2,\ldots,e^{\frac{2\pi i q_{n-1}}{m}}z_n\right). \tag{23}$$

Con esto, todos los números $q_1,\ldots,q_{n-1}$ deben ser recíprocamente primos con m, para que un espacio cociente sea una variedad (verifíquese). Esta variedad se designa así:

$$S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m=L^{2n-1}(q_1,\ldots,q_{n-1}). \tag{24}$$

Evidentemente, tenemos $\pi_1(L^{2n-1})=\mathbb{Z}_m$.

PROBLEMA 9. Construya sobre la esfera S^{2n-1} una partición celular para que el grupo $\mathbb{Z}_m$ actúa trasladando libremente las células (es decir, engendra la partición celular de la lente). Calcule las homologías de las variedades lenticulares.

PROBLEMA 10. Muestre, que para $q_1=q_2=\ldots=q_{n-1}=1$ un espacio lenticular es un espacio fibrado suave con base Cp^{n-1} y con fibra, que es la circunferencia S^1

$$L^{2n-1}(1,\ldots,1)\xrightarrow{p}CP^{n-1},\qquad F=S^1. \tag{25}$$

PROBLEMA 11. Calcule el anillo de cohomologías de los espacios lenticulares (con los coeficientes en el grupo $G=\mathbb{Z}_m$).

Es interesante la partición de una serie de espacios fibrados suaves. Consideremos aquí los casos más simples, cuando una fibra F es la esfera S^{n-1} partida en las células $\sigma_F^0\cup\sigma_F^{n-1}=S^{n-1}$. Un ejemplo importante es una variedad de los elementos lineales:

$$M^{2n-1}\xrightarrow{p}M^n,\quad \text{la fibra}\quad F=S^{n-1}.$$

Si la base M^n está partida en las células σ_j^q, entonces las células en un espacio fibrado M^{2n-1} se determinan de la condición

$$p^{-1}(\sigma_j^q)=\sigma_j^q\times F=\sigma_j^q\times(\sigma_F^0\cup\sigma_F^{n-1}), \tag{26}$$

ya que el espacio fibrado sobre un disco es trivial (producto directo), véase [1], parte II, § 24. Así, tenemos en M^{2n-1} las células

$$\sigma_j^q\times\sigma_F^0,\quad \sigma_j^q\times\sigma_F^{n-1}, \tag{27}$$

donde σ_j^q es una célula arbitraria (de dimensión q) en la base M^n. Pero es difícil calcular un operador de la frontera de estas células. Consideremos un ejemplo: un espacio M^3 de los elementos lineales hacia una superficie cerrada M_g^2 del género $g > 0$, con una partición celular estándar (véase más arriba):

$$M_g^2 = \sigma^0 \cup \{\sigma_j^1, \ \ldots, \ j = 1, \ \ldots, \ 2g\} \cup \sigma^2. \tag{28}$$

En el espacio M^3 obtendremos las células de dimensión 0, 1, 2, 3

$$\begin{aligned} &\sigma^0 \times \sigma_F^0, \quad \sigma_j^1 \times \sigma_F^0, \quad \sigma^2 \times \sigma_F^0, \\ &\sigma^0 \times \sigma_F^1, \quad \sigma_j^1 \times \sigma_F^1, \quad \sigma^2 \times \sigma_F^1. \end{aligned} \tag{29}$$

Un vértice es una $\sigma^0 \times \sigma_F^0$, todas las células unidimensionales son ciclos. La variedad M^3 es orientable. Por eso la célula tridimensional $\sigma^2 \times \sigma_F^1$ es un ciclo. Verifíquese que la célula $\sigma_j^1 \times \sigma_F^1$ en una fibra es también un ciclo en las homologías; pero en $\pi_1(M^3)$ la frontera $\partial(\sigma_j \times \sigma_F^1)$ da un conmutador de las curvas σ_j^1 y σ_F^1. La célula $\sigma^2 \times \sigma_F^0$ no es un ciclo. Tiene lugar la fórmula

$$\partial(\sigma^2 \times \sigma_F^0) = [(\partial\sigma^2) \times \sigma_F^0] \cup [\sigma^0 \times (\sigma_F^1)^{2-2g}]. \tag{30}$$

El símbolo $(\sigma_F^1)^{2-2g}$ significa que en la frontera de la célula $\sigma^2 \times \sigma_F^0$ se incluye el ciclo unidimensional σ_F^1 repetido $2 - 2g$ veces (con una orientación conveniente). Eligiendo una de las particiones en la base M_g^2, tenemos para $\partial\sigma^2$:

$$\partial\sigma^2 = \prod_{i=1}^{g} (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = W(a, \ b), \tag{31}$$

donde las curvas a_i están representadas por las células σ_i^1, y las curvas b_i, por las células σ_{g+i}^1 en la base M_g^2.

PROBLEMA 12. Demuestre la fórmula (30) para la frontera de la célula $\sigma^2 \times \sigma_F^0$, utilizando un campo vectorial sobre M_g^2, que tiene exactamente un punto singular con el grado $2 - 2g$ (véase [1], parte II, § 15).

Para el grupo $\pi_1(M^3)$ tenemos las generatrices $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, \gamma$ (aquí γ es una fibra $F = S^1$) y las relaciones

$$[a_i, \ \gamma] \ a_i \gamma a_i^{-1} \gamma^{-1} = 1, \quad [b_i \gamma] = b_i \gamma b_i^{-1} \gamma^{-1} = 1, \tag{32}$$

$$\gamma^{2-2g} = W(a, \ b) = \prod_{i=1}^{g} (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = \prod_{i=1}^{g} [a_i, \ b_i]. \tag{33}$$

Verificar que las homologías $H_i(M^3)$ tienen la forma:

$$H = \mathbb{Z}, \ H_1 = \underbrace{\mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}}_{2g \text{ piezas}} + \mathbb{Z}_{2g-2}, \ H_2 = \underbrace{\mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}}_{2g \text{ piezas}}, \ H_3 = \mathbb{Z}. \tag{34}$$

§ 5. Homologías y cohomologías singulares. Invariación homotópica de ellas. Sucesión exacta del par. Homologías relativas.

El método más general para la determinación homotópicamente invariante de las homologías y cohomologías, que vamos a utilizar aquí, no exige la estructura de variedad, ni del complejo simplicial o del celular

Sea X cualquier espacio topológico.

DEFINICIÓN 1. *Un símplex singular k-dimensional* se denomina par (σ^k, f), donde $f: \sigma^k \to X$ es una aplicación continua de un símplex estándar k-dimensional $\sigma = [\alpha_0 \ldots \alpha_k]$ en un espacio X. *Cadena singular k-dimensional* se denomina la operación formal finita lineal $c_k = \sum_i g_i (\sigma_i^k, f_i)$, donde g_i son elementos de un grupo abeliano escrito aditivamente G, y (σ_i^k, f_i) son símplex regulares de dimensión k.

A la frontera de un símplex singular se la llama combinación formal lineal del tipo

$$\partial (\sigma^k, f) = \sum_q (-1)^q (\sigma_q^{k-1}, f|_{\sigma_q^{k-1}}),$$

donde $\sigma_q^{k-1} = [\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_q \ldots \alpha_k]$ es la q-nésima cara de un símplex estándar, $f|_{\sigma_q^{k-1}}$ es la restricción de la aplicación f sobre la cara σ_q^{k-1} (la cara de un símplex singular, es también un símplex singular). La frontera de una cadena singular tiene, por definición, la forma:

$$\partial c_k = \sum_i g_i \partial (\sigma_i^k, f_i).$$

Del lema 3.1 se deduce que $\partial\partial c_k = 0$. Un ciclo singular es una cadena c_k tal, que $\partial c_k = 0$. Una frontera singular es una cadena c_k tal, que $c_k = \partial c_{k+1}$. La frontera singular es un ciclo. Los grupos de homologías singulares (simpliciales) $H_k (X; G)$ son clases de equivalencia de los ciclos k-dimensionales con exactitud hasta las fronteras.

Los grupos de cohomologías singulares $H^k (X; G)$ se determinan como en el § 2: las cocadenas son formas lineales en las cadenas y un operador δ está conjugado a ∂. La comodidad en la utilización de las homologías singulares consiste en que para cualquiera aplicación continua de los espacios $\varphi: X \to Y$ los homomorfismos inducidos φ_* y φ^* de los grupos de homologías y cohomologías singulares

$$\varphi_* : H_k (X; G) \to H_k (Y; G), \qquad (1)$$

$$\varphi^* : H^k (Y; G) \to H^k (X; G) \qquad (1')$$

se construyen de una manera evidente. Aquí la cadena singular $c_k = \sum g_i (\sigma_i^k, f_i)$ pasa a ser una cadena singular $\varphi_* (c_k) = \sum g_i (\sigma_i^k, \varphi \circ f_i)$. Las cohomologías se aplican en el lado opuesto: $\varphi^*: H^k (Y; G) \to H^k (X; G)$, donde la cocadena c^k pasa a ser $\varphi^* (c^k)$, además $(\varphi^* (c^k), \widetilde{c}_k) = (c^k, \varphi_* (\widetilde{c}_k))$ por definición. Las aplicaciones φ_* y φ^* sobre las cadenas y cocadenas son conmutativas con un operador de frontera y por eso son definidas sobre las clases de homologías y cohomologías.

De la definición de las homologías singulares (cohomologías), se deduce con evidencia que los espacios equivalentes topológicamente (homeomorfos) tienen iguales homologías y cohomologías. Demostremos una afirmación más fuerte: la invariación homotópica de las homologías singulares (para las cohomologías todos los razonamientos son los mismos).

TEOREMA 1. *Sean $\varphi_0: X \to Y$, $\varphi_1: X \to Y$, aplicaciones homotópicas. Entonces, los homomorfismos inducidos de los grupos de homologías φ_{0*}, $\varphi_{1*}: H_k (X; G) \to H_k (Y; G)$ coinciden: $\varphi_{0*} \equiv \varphi_{1*}$ (para las cohomologías $\varphi_0^* \equiv \varphi_1^*$).*

DEMOSTRACIÓN. Sean: I, un segmento $[0, 1]$; Φ, una homotopía, que une las aplicaciones φ_0 y φ_1:

$$\Phi (x, t) : X \times I \to Y, \quad \Phi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \Phi|_{t=1} = \varphi_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in X. \tag{2}$$

Para cualquier símplex singular (σ, f) está determinada la aplicación de un cilindro $\sigma \times I$ en un espacio Y:

$$\Phi (f \times 1) (\sigma, t) = \Phi (f (\sigma), t): \sigma \times I \to X \times I \to Y. \tag{3}$$

Partimos el cilindro $\sigma \times I$ en símplex: si $\sigma = [\alpha_0 \ldots \alpha_k]$, los vértices en el cilindro $\sigma \times I$ tendrán una forma α_i^0 (base inferior) y α_i^1 (base superior). Los símplex del cilindro $\sigma \times I$ tienen la forma

$$\sigma_q = [\alpha_0^0 \ldots \alpha_q^0 \alpha_q^1 \alpha_{q+1}^1 \ldots \alpha_k^1], \quad q = 0, \ldots, k \tag{4}$$

(véase la fig. 35 para $k = 1, 2$). La aplicación $\Phi (f \times 1) = \widetilde{f}$ determina una $(k + 1)$-cadena singular simplicial $D (\sigma, f)$:

$$D (\sigma, f) = (-1)^{k-1} \sum_{q=0}^{k} (-1)^q (\sigma_q, \widetilde{f}). \tag{5}$$

Obtenemos un homomorfismo de los grupos de las cadenas singulares:

$$D : C_k (X) \to C_{k+1} (Y). \tag{6}$$

LEMA 1. *Tiene lugar la identidad:*

$$D \circ \partial + (-1)^{k-1} \partial \circ D = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}. \tag{7}$$

DEMOSTRACIÓN. Designemos por $d[\alpha_0 \ldots \alpha_k]$ a la suma de los símplex del tipo (4):

$$d[\alpha_0 \ldots \alpha_k] = (-1)^{k-1} \sum_{q=0}^{k} (-1)^q [\alpha_0^0 \ldots \alpha_q^0 \alpha_q^1 \ldots \alpha_k^1]. \tag{8}$$

Además,

$$\partial[\alpha_0 \ldots \alpha_k] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_k]. \tag{9}$$

Entonces,

$$d\partial[\alpha_0 \ldots \alpha_k] + (-1)^{k-1} \partial d[\alpha_0 \ldots \alpha_k] = [\alpha_0^1 \ldots \alpha_k^1] - [\alpha_0^0 \ldots \alpha_k^0]. \tag{10}$$

Esta igualdad es geométricamente evidente: la frontera del cilindro $[\alpha_0 \ldots \alpha_k] \times I$ consta de un cilindro sobre la frontera del símplex $\partial[\alpha_0 \ldots \alpha_k]$ y de las bases inferior y superior tomando en cuenta el signo. De esta igualdad se deduce la afirmación del lema.

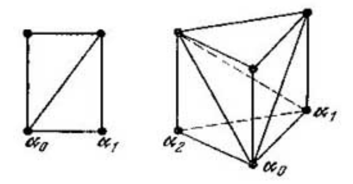


Fig. 35. Partición de cilindros en símplex.

Del lema resulta (véase el § 2), que los homomorfismos de los grupos de homologías $\varphi_{\alpha*}$, $\alpha = 0, 1$ coinciden (para cualquier ciclo z_k tenemos $\varphi_{0*}z_k - \varphi_{1*}z_k = \partial D z_k$). El teorema queda demostrado.

COROLARIO. *Los espacios homotópicamente equivalentes tienen los grupos isomorfos de homologías (cohomologías) singulares (simpliciales).*

EJEMPLO 1. Cualquier espacio contractable (por sí mismo) X es equivalente homotópicamente a un punto. Determinemos las homologías singulares simpliciales de un punto ($X = *$):

Los k-simplex singulares del punto $* = X$:

$$f: \sigma^k \to *; \tag{11}$$

tenemos un símplex singular para cada dimensión k (ya que hay sólo una aplicación f). La frontera de un símplex (σ^k) tiene la forma:

$$\partial(\sigma^k) = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q (\sigma_q^{k-1}). \tag{12}$$

Por eso tenemos:

$$\partial(\sigma_k, f) = \begin{cases} 0, \text{ si } k \text{ es impar o } k=0; \\ (\sigma^{k-1}, f), \text{ si } k \text{ es par.} \end{cases} \quad (13)$$

De aquí: $H_0(*; G) = G$, $H_k(*; G) = 0$ si $k > 0$ (el ciclo σ^{k-1}, f) si k son pares, es la frontera de la cadena (σ^k, f)).

EJEMPLO 2. Si el espacio X es linealmente conexo, entonces $H_0(X; G) = G$. En efecto, todas las cadenas 0-dimensionales son ciclos. La cadena del tipo $\sum_i g_i(\sigma^0, f_i)$, $f_i(\sigma^0) = x_i \in X$ es una frontera si, y sólo si, $\sum g_i = 0$. Dos símplex cualesquiera 0-dimensionales (σ^0, f) y (σ^0, g), $f(\sigma^0) = x_1$, $g(\sigma^0) = x_2$, son homológicos: si φ: $[0, 1] \to X$ es una curva que une los puntos x_1 y x_2, entonces

$$(\sigma^0, g) - (\sigma^0, f) = \partial(\sigma^1, \varphi). \quad (14)$$

Por eso el ciclo $\sum g_i(\sigma_0, f_i)$ es homológico al ciclo $(\sum g_i)(\sigma^0, f)$ por consiguiente, $H_0(X; G) = G$.

De modo análogo se demuestra que para el espacio X que consta de n componentes de conexión lineal, el grupo $H_0(X; G)$ es una suma directa de n ejemplares del grupo G.

Para algunos objetivos convienen más las homologías y cohomologías singulares cúbicas. Demos su definición

Un cubo n-dimensional estándar unidad I^n es un conjunto de puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ en un espacio $\mathbb{R}^n$, que satisface la relación $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. Si $n = 0$, entonces I^0 es un punto. La cara del cubo $\lambda_i^\varepsilon I^n$ $(i = 1, \ldots, n, \varepsilon = 0, 1)$ es un cubo I^{n-1}, donde $x_i = \varepsilon$. En total, el cubo tiene $2n$ caras $\lambda_i^\varepsilon I^n$.

Un n-cubo singular en el espacio X, es un par (I^n, f), donde f: $I^n \to X$ es una aplicación continua.

Las caras del cubo singular (I^n, f) tienen, por definición, la forma

$$\lambda_i^\varepsilon(I^n, f) = (\lambda_i^\varepsilon I^n, f), \quad i = 1, \ldots, n, \ \varepsilon = 0, 1. \quad (15)$$

Ellas se denominan caras i-inferior ($\varepsilon = 0$) e i-superior del cubo singular (I^n, f). Cuando $i < j$, tiene lugar una identidad simple:

$$\lambda_i^\varepsilon \lambda_j^\eta = \lambda_{j-1}^\eta \lambda_i^\varepsilon, \quad \varepsilon, \ \eta = 0, 1. \quad (16)$$

Sea $\hat{C}_n(X; G)$ un grupo de cadenas singulares cúbicas de dimensión n con coeficientes en un grupo G, es decir, un grupo de combinaciones formales finitas lineales de forma

$$c_n = \sum g_i(I^n, f_i), \quad g_i \in G. \quad (17)$$

5—01126

La frontera del cubo singular es de tipo

$$\partial (I^n, f) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [\lambda_i^1 (I^{n-1}, f) - \lambda_i^0 (I^{n-1}, f)]. \quad (18)$$

El operador ∂ se prolonga en todas las cadenas linealmente. De la identidad (16) se deduce, que $\partial\partial (I^n, f) = 0$. Un n-cubo singular (I^n, f) se denomina *degenerado*, si la aplicación $f\colon I^n \to X$ se descompone en la superposición de la proyección sobre una cara $I^n \to I^{n-1}$ y las aplicaciones $g\colon I^{n-1} \to X$.

Las combinaciones lineales de los cubos n-dimensionales singulares forman un subgrupo $D_n (X; G)$ en un grupo de cadenas $\hat{C}_n (X; G)$. Puesto que un operador transforma un cubo degenerado de nuevo en un cubo degenerado, es posible, factorizando por los cubos degenerados singulares, determinar un grupo de cadenas cúbicas singulares «normalizadas» $C_n (X; G)$, suponiendo

$$C_n (X; G) = \hat{C}_n (X; G)/D_n (X; G), \quad (19)$$

y el operador de frontera $\partial\colon C_n (X; G) \to C_{n-1} (X; G)$ (que será designado también por la letra ∂). Como antes, $\partial\partial = 0$. Por eso es posible definir un grupo de homologías singulares cúbicas como un grupo de ciclos normalizados con exactitud hasta los ciclos homológicos a cero (de forma análoga se definen las cohomologías).

Mostremos, que los grupos de homologías construidos son también homotópicamente invariantes.

TEOREMA 2. *Las aplicaciones homotópicas φ_0, $\varphi_1\colon X \to Y$ de los espacios topológicos, inducen iguales* homomorfismos φ_{0*}, $\varphi_{1*}\colon H_n (X; G) \to H_n (Y; G)$ *de los grupos de homologías singulares cúbicas e iguales homomorfismos de los grupos de cohomologías cúbicas* $\varphi_0^* = \varphi_1^*$.

La demostración de este teorema es igual a la demostración del teorema análogo para un caso simplicial (más arriba). Es necesario construir un operador D de homotopía algebraica, que confronta a cada cubo n-dimensional singular en el espacio X un cubo $(n + 1)$-dimensional singular en el espacio Y. Si $\Phi\colon I \times X \to Y$ es una homotopía entre las aplicaciones φ_0, φ_1, entonces el operador D se determina así:

$$D (I^n, f) = (I^{n+1}, \Phi (1 \times f)),$$

ya que

$$I^{n+1} = I \times I^n, \quad 1 \times f\colon I^{n+1} \to I \times X.$$

El operador D transforma los cubos degenerados una vez más en degenerados (verifíquese). Por eso está definido también sobre un grupo de cadenas normalizadas.

La igualdad

$$D\partial \pm \partial D = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}$$

se demuestra íntegramente por analogía al lema 1. La demostración se concluye lo mismo que en el caso de las homologías singulares simpliciales.

EJEMPLO 3. Calculemos homologías singulares cúbicas del punto $X = *$ (y, de este modo, de la homología de cualquier espacio contractable).

En cada dimensión n tenemos exactamente por un cubo (I^n, f_n), donde $f_n(I^n) = *$. Si $n > 0$ todos estos cubos son degenerados. Por eso los grupos de las cadenas normalizadas cúbicas tienen la forma

$$C_0(X; G) = G = H_0(X; G), \quad C_n(X; G) = 0 \quad \text{si} \quad n > 0.$$

Quiere decir que las homologías cúbicas de un punto son las mismas que las homologías simpliciales arriba construidas.

OBSERVACIÓN. Si se construye las homologías $\hat{H}_n(X; G)$, partiendo de los grupos completos de cadenas singulares cúbicas $\hat{C}_n(X; G)$, entonces, las homologías de un punto en esta teoría serán no triviales.

PROBLEMA 1. a) Determinar un grupo $\hat{H}_n(*; \mathbb{Z})$; b) demostrar que $\hat{H}_n(X; \mathbb{Z}) = \sum_{k \geqslant 0} H_{n-k}(X, \hat{H}_k(*, \mathbb{Z}))$ para cualquier espacio X.

Definamos ahora las homologías relativas singulares. Las definiciones aquí son iguales que para las variantes simplicial y cúbica.

Sean: X, un espacio topológico; Y, su subespacio. Entonces, los grupos de cadenas singulares $C_k(Y)$ se encuentran en los grupos $C_k(X)$. Consideremos un grupo de cadenas relativas $C_k(X, Y) = C_k(X)/C_k(Y)$ (no escribimos explícitamente aquí los coeficientes de G, el grupo G es arbitrario). El operador de frontera ∂ transforma $C_k(Y)$ en $C_{k-1}(Y)$, por eso él determina cierto operador de frontera $C_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X, Y)$ para los grupos cocientes. Este homomorfismo lo designamos también con ∂. Tenemos un complejo de cadenas relativas y un complejo conjugado de cocadenas.

Como antes, definimos los ciclos relativos $Z_k(X, Y)$, para los cuales $\partial c_k = 0$. Las fronteras relativas $B_k(X, Y) \subset Z_k(X, Y)$ tienen la forma $c_k = \partial c_{k+1}$. Al grupo cociente $H_k(X, Y) = Z_k(X, Y)/B_k(X, Y)$ se le llamará grupo de homologías relativas (de dimensión k).

Un grupo de homologías $H_k(X)$ tiene una aplicación natural en un grupo de homologías relativas: cada ciclo de $H_k(X)$ se puede considerar como relativo. Obtenemos los homomorfismos

$$H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X, Y), \quad H^k(X, Y) \xrightarrow{j} H^k(X). \qquad (20)$$

Además, la inmersión (el encajo) de los espacios $Y \xrightarrow{i} X$ designado por la letra i determina un «homomorfismo de inmersión»

$$H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X), \quad H^k(X) \xrightarrow{i^*} H^k(Y). \tag{21}$$

Construimos ahora un homomorfismo de frontera ∂_*, que aplica el grupo $H_k(X, Y)$ en un grupo $H_{k-1}(Y)$ (para las cohomologías un homomorfismo δ_*, que aplica $H^{k-1}(Y) \to H^k(X, Y)$). Sea $c_k \in \in C_k(X, Y)$, un ciclo relativo. Es posible considerarlo como una cadena ordinaria (o «absoluta»), es decir, como un elemento de $C_k(X)$, determinada con exactitud hasta una cadena arbitraria de $C_k(Y)$. La frontera $c_{k-1} = \partial c_k$ es un ciclo $(k-1)$-dimensional en Y. Entonces $\partial_*(c_k)$ corresponde a una clase de homologías del ciclo

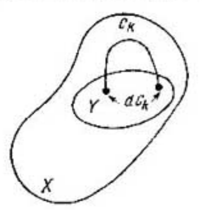


Fig. 36.

$c_{k-1} = \partial c_k$ por definición (véase la fig. 36). La clase de homologías $\partial_* c_k$ no depende de la elección del representante en la clase c_k (verifíquese). Obtenemos un homomorfismo definido correctamente

$$\partial_* : H_k(X, Y) \to H_{k-1}(Y). \tag{22}$$

Combinando homomorfismos i_*, j y ∂_*, obtenemos una sucesión de homomorfismos

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \to H_0(Y) \to H_0(X) \to H_0(X, Y) \to 0 \tag{23}$$

TEOREMA 3. *La sucesión* (23) *es exacta, es decir* a) $\operatorname{Ker} i_* = \operatorname{Im} \partial_*$, b) $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i_*$, c) $\operatorname{Ker} \partial_* = \operatorname{Im} j$.

DEMOSTRACIÓN. a) Verifiquemos que el núcleo $\operatorname{Ker} i_*$ coincide con la imagen $\operatorname{Im} \partial_*$. Sea $c_{k-1} \in C_{k-1}(Y)$ un ciclo tal, que $i_*(c_{k-1}) = 0$. Esto significa que en el espacio X se encontrará una cadena $c_k \in C_k(X)$ tal, que $\partial c_k = c_{k-1}$. La cadena c_k es un ciclo relativo y la clase de homologías del ciclo c_{k-1} coincide con $\partial_*(c_k)$ por definición. El punto a) queda demostrado.

b) Sea c_k un ciclo en el espacio X tal, que $j(c_k) = 0$. Esto significa que $\partial c_k = 0$ y se encontrarán una cadena c_{k+1} en el espacio X y una cadena $\tilde{c}_k$ en el espacio Y tales, que

$$\tilde{c}_k + \partial c_{k+1} = c_k.$$

Entonces, $\partial c_k = \partial \tilde{c}_k = 0$, por eso $\tilde{c}_k$ es un ciclo en el espacio Y homológico al ciclo c_k. Hemos mostrado que la clase de homología del ciclo c_k tiene un representante en el espacio Y, o sea, $c_k \in \operatorname{Im} i_*$.

c) Sea c_k un ciclo relativo en $C_k(X, Y)$, además, $\partial_* c_k = 0$ en un grupo $H_{k-1}(Y)$. Esto significa, que el ciclo ∂c_k es homológico a cero en el espacio Y: $\partial c_k = \partial \tilde{c}_k$; $\tilde{c}_k$ es una cadena en $C_k(Y)$. Entonces, la cadena $c_k - \tilde{c}_k$ es un ciclo «absoluto» en el espacio X y da un elemento equivalente al ciclo c_k en un grupo relativo $H_k(X, Y)$. De manera que el ciclo $c_k \sim c_k - \tilde{c}_k$ se encuentra en una imagen del homomorfismo j. Verifique la exactitud en el término $H_0(X, Y)$. El teorema queda demostrado íntegramente. Para las cohomologías son análogas la secuencia de los razonamientos y la verificación de la exactitud.

La sucesión (23) se denomina sucesión exacta (homológica) del par (X, Y).

Observemos que si Y es un subcomplejo simplicial (celular) en un complejo simplicial (celular) X, entonces los homomorfismos de la sucesión homológica (y cohomológica) del par para las homologías simpliciales y celulares se determinan de una manera evidente. Le dejamos como ejercicio al lector la verificación de la exactitud de las sucesiones obtenidas, que es totalmente análoga a la demostración del teorema 3.

COROLARIO. *De la sucesión exacta del par se deduce la igualdad*

$$\begin{aligned} H_k(X, *) &= H_k(X), \quad k > 0, \\ H_0(X, *) &= 0, \qquad\quad k = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

donde X es un espacio linealmente conexo.

DEMOSTRACIÓN. Realmente, si $k > 0$ tenemos:

$$H_k(*) \to H_k(X) \to H_k(X, *) \to H_{k-1}(*)(X) \to \ldots$$

Si $k - 1 = 0$, la inmersión $H_0(*) \to H_0(X)$ es un isomorfismo, como se mostraba antes. Por eso para todo $k > 0$ tenemos una sucesión exacta

$$0 \to H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X, *) \to 0. \tag{25}$$

Esto da de inmediato un isomorfismo de estos grupos, ya que $\operatorname{Ker} j = 0$ e $\operatorname{Im} j = H_k(X, *)$.

Para $k = 0$ tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccc} H_0(*) & \xrightarrow{i} & H_0(X) \to H_0(X, *) \to 0, \\ \| & & \| \\ G & & G \end{array} \qquad (26)$$

donde i_* es un isomorfismo. Por eso el corolario queda demostrado.

Una propiedad extraordinariamente importante da las homologías relativas es su «naturalidad» con las aplicaciones continuas de los pares

$$(X, X') \xrightarrow{f} (Y, Y'), \qquad (27)$$

donde $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ y $f(X') \subset Y'$, tenemos las aplicaciones

$$f_*: H_k(X) \to H_k(Y), \quad f^*: H^k(Y) \to H^k(X), \qquad (28)$$

$$f_*: H_k(X, X') \to H_k(Y, Y'), \quad f^*: H^k(Y, Y') \to H^k(X, X'), \qquad (29)$$

$$f_*: H_k(X') \to H_k(Y'), \quad f^*: H^k(Y') \to H^k(X'). \qquad (30)$$

Todas las construcciones de los homomorfismos de la sucesión exacta eran «naturales»: conmutaban con las aplicaciones continuas. Por eso se tiene un homomorfismo de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} \xrightarrow{\partial^*} & H_k(X') & \xrightarrow{i_*} & H_k(X) & \xrightarrow{j} & H_k(X, X') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(X') & \to \\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_k(Y') & \xrightarrow{i_*} & H_k(Y) & \xrightarrow{j} & H_k(Y, Y') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(Y') & \to \end{array} \qquad (31)$$

Para las cohomologías tenemos analogamente:

$$\begin{array}{ccccccccc} \xrightarrow{\delta^*} & H^k(X, X') & \xrightarrow{j} & H^k(X) & \xrightarrow{i^*} & H^k(X') & \xrightarrow{\delta^*} & H^{k+1}(X, X') & \to \\ & \uparrow f^* & & \uparrow f^* & & f^* & & \uparrow f^* & \\ \xrightarrow{\delta^*} & H^k(Y, Y') & \xrightarrow{j} & H^k(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^k(Y') & \xrightarrow{\delta^*} & H^{k+1}(Y, Y') & \to \end{array} \qquad (32)$$

Esta propiedad es muy útil. Por ejemplo, tiene lugar tal

AFIRMACION 1. *Que se tenga la aplicación de los pares*

$$f: (X, X') \to (Y, Y'), \qquad (33)$$

donde el homomorfismo f_* es un isomorfismo para

$$H_k(X) \xrightarrow[\approx]{f_*} H_k(Y) \quad \text{y} \quad H_k(X') \xrightarrow[\approx]{f_*} H_k(Y') \qquad (34)$$

Entonces, los grupos relativos $H_k(X, X')$ *y* $H_k(Y, Y')$ son *isomorfos también y* f_* *da su isomorfismo (analógicamente para las cohomologías).*

DEMOSTRACION. Consideremos el diagrama (31). Si $\alpha \in H_k(X, X')$ y $f_*\alpha = 0$, entonces, tenemos

$$f_*\partial_*\alpha = \partial_* f_*\alpha = 0. \qquad (35)$$

Por eso $f_* (\partial_* \alpha) = 0$, donde $\partial_* \alpha \in H_{k-1} (X')$. De la condición (sabemos, que $f_*: H_{k-1} (X') \to H_{k-1} (Y')$ es un isomorfismo) obtenemos $f_* (\partial_* \alpha) = 0 \Rightarrow \partial_* \alpha = 0$. Por eso $\alpha = j (\beta)$. Puesto que $f_* (\alpha) = 0$, tenemos $f_* j (\beta) = j (f_* (\beta)) = 0$ y por eso $f_* (\beta) = i_* (\gamma)$. Consideremos $\delta = f_*^{-1} (\gamma) \in H_k (X')$. Entonces $\beta = i_* (\delta)$ y $\alpha = j i_* (\delta) = 0$. Por eso, $\alpha = 0$, si $f_* (\alpha) = 0$.

Demostremos que cualquier elemento γ del grupo $H_k (Y, Y')$ tiene la forma $\gamma = f_* (\delta)$. Si $\partial_* \gamma = 0$, entonces $\gamma = j (\beta)$. Consideremos un elemento $j f_*^{-1} (\beta) = \alpha$. Tenemos $f_* (\alpha) = \gamma$. Si $\partial_* \gamma \neq 0$, entonces, introducimos el elemento $f_*^{-1} \partial_* (\gamma) = \partial_* \beta$. Entonces, la imagen $f_* (\beta)$ será tal, que $\partial_* (f_* (\beta) - \gamma) = 0$. De esta manera la afirmación queda demostrada.

OBSERVACIÓN. La afirmación y su demostración siguen siendo correctas en la siguiente forma: si se exige un isomorfismo de aplicaciones en las homologías en cualquier par de los tres grupos $H_* (X)$, $H_* (X')$, $H_* (X, X')$, entonces, la tercera aplicación en las homologías también será un isomorfismo. Para las cohomologías todo esto es análogo.

Más adelante se demostrará que las homologías singulares coinciden con las celulares y simpliciales para los complejos celulares y simpliciales, utilizando las propiedades formales de las homologías, demostradas más arriba, y una importante propiedad que ahora vamos a demostrar.

Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 4. *Sean: K, un complejo celular; L, su subcomplejo. Entonces, es correcta la igualdad*

$$H_k (K, L) = H_k (K/L), \quad k > 0. \tag{36}$$

Con K/L designamos un espacio cociente, obtenido mediante contracción de todo L en un punto. Notemos, que K/L es equivalente homotópica-

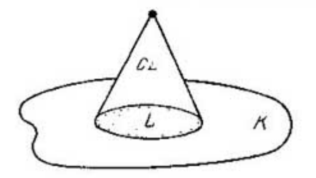


Fig. 37. $K \cup CL$.

mente a un complejo celular $K \cup CL$ (véase la fig. 37), *donde CL es un cono sobre L, obtenido de $L \times I$ mediante la contracción de la base superior en un punto.*

Damos la demostración para las homologías simpliciales (singulares). Introducimos un operador de subpartición baricéntrica.

Definimos la subpartición de un símplex $[\alpha_0 \ldots \alpha_k] = \sigma^k$. A la subpartición de un símplex unidimensional se la llama su partición en dos con un vértice nuevo en el centro. Para subpartir un símplex bidimensional $[\alpha_0\alpha_1\alpha_2]$ (triángulo), vamos a subpartir, primeramente, todas las caras unidimensionales. Después tomamos el vértice nuevo en el centro del triángulo y lo unimos con todos los vértices en las caras, los antiguos y los nuevos (véase la fig. 38).

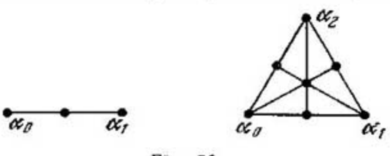


Fig. 38.

Luego obramos análogamente: tomemos un punto en el centro de un símplex k-dimensional; las caras ya están subpartidas. El conjunto de rayos que unen este vértice nuevo con un símplex σ^{k-1}_i en la frontera, da nuevos símplex σ^k_i en una subpartición baricéntrica.

Sea (σ^k, f) un símplex singular en el espacio X. Sean $\sigma^k_1, \ldots$ $\ldots, \sigma^k_N$ todos los símplex k-dimensionales de una subdivisión baricéntrica de un símplex σ^k. Designamos por $\beta(\sigma^k, f)$ a una cadena de forma

$$\beta(\sigma^k, f) = \sum_{i=1}^{N} (\sigma^k_i, f|_{\sigma^k_i}) \tag{37}$$

(se toma la suma por todos los símplex de la subpartición σ^k). El operador β se prolonga linealmente en todo el grupo de las cadenas singulares simpliciales $C_k(X)$:

$$\beta : C_k(X) \to C_k(X), \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{38}$$

Tiene lugar

LEMA 2 *El operador β conmuta con el homomorfismo de frontera ∂ y es homotópico algebraicamente a un operador idéntico.*

DEMOSTRACIÓN. La igualdad $\partial\beta = \beta\partial$ es evidente (caras «interiores» de la subpartición del símplex se incluyen en la cadena $\partial\beta$ dos veces con diferentes signos). Construiremos una homotopía algebraica D tal, que $\partial D \pm D\partial = \beta - 1$. Determinamos para esto una triangulación del producto directo $\sigma^k \times I$ del símplex σ^k sobre un segmento I tal, que $\sigma^k \times 0$ es un símplex y $\sigma^k \times 1$ es una subpartición baricéntrica σ^k. Para $k = 0, 1, 2$ la triangulación $\sigma^k \times I$ se indica en la fig. 39. En el caso general, la triangulación $\sigma^k \times I$ se construye así: sea construida la triangulación de un símplex $\sigma^{k-1} \times I$; de esta manera, las caras laterales en $\sigma^k \times I$ ya están trianguladas.

La base inferior de $\sigma^k \times I$ la dejamos sin cambios; en la base superior tomamos una subpartición baricéntrica. Ahora ya está triangulada toda la frontera $\partial(\sigma^k \times I)$. Uniendo el centro de la base superior con todos los vértices de la triangulación de la frontera $\partial(\sigma^k \times I)$ obtenemos la triangulación $\sigma^k \times I$.

Sea (σ^k, f) un simplex singular en el espacio X. Está definida una aplicación «trivial»:

$$\hat{f}: \sigma^k \times I \to X, \quad \hat{f}(x, t) = f(x). \tag{39}$$

Designamos por $D(\sigma^k, f)$ la cadena $(k+1)$-dimensional $(\sigma^k \times I, \hat{f}) = D(\sigma^k, f)$, donde $\sigma^k \times I$ está triangulado así, como se indica más

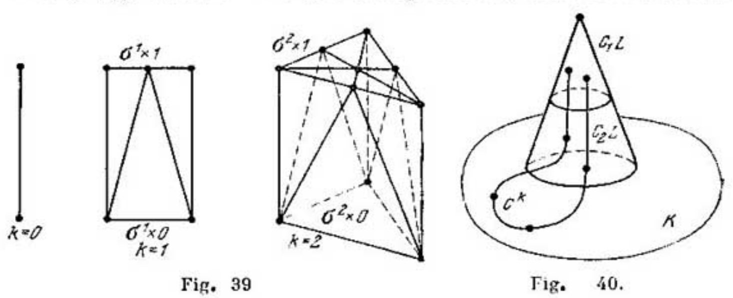


Fig. 39 Fig. 40.

arriba. El operador D, por construcción, da una homotopía buscada. El lema queda demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. En virtud de la invariación homotópica de homologías, tenemos la igualdad:

$$H_k(K \cup CL, CL) = H_k(K \cup CL, *),$$

puesto que el cono CL se contrae en un punto. Además,

$$H_k(K \cup CL, *) = H_k(K \cup CL) = H_k(K/L)$$

cuando $k > 0$ (véase el corolario del teorema 3). Es suficiente con demostrar, que

$$H_k(K \cup CL, CL) = H_k(K, L). \tag{40}$$

Sea c^k cualquier ciclo k-dimensional relativo en $H_k(K \cup CL, CL)$. Construimos un ciclo homológico a c^k que se encuentra en un grupo $H_k(K, L)$.

Partimos el cono CL en dos mitades C_1L y C_2L (véase la fig. 40). En virtud del lema 2 se puede reemplazar el ciclo c^k por un ciclo $\beta^N c^k$ homológico a él, con simplex pequeños. Aumentando N (ite-

rando la subpartición), obtenemos que el símplex que se interseca con C_1L, se encuentra íntegramente en el cono CL. Excluyamos todos los símplex, que se intersecan con C_1L. Con esto no cambiamos la clase de las homologías relativas (modulo CL) del ciclo $\beta^N c^k \sim c^k$. El ciclo obtenido $\hat{c}^k$ ya se encuentra en el grupo $H_k(K \cup C_2L, C_2L) = H_k(K, L)$ (ya que C_2L se contracta en L). Por lo tanto se ha construido un ciclo $\hat{c}^k$ en el grupo $H_k(K, L)$, homológico al ciclo c^k.

Si el ciclo c^k para el par (K, L) es homológico a cero en el grupo $H_k(K \cup CL, CL)$, entonces el razonamiento idéntico se utiliza para «quitar» una cadena limitante de véctice superior del cono, subpartiendo c^k y la cadena que lo limita.

El teorema queda demostrado.

§ 6. Homologías singulares de complejos celulares. Coincidencia de ellas con las homologías celulares. Dualidad de Poincaré para las homologías simpliciales

Calculemos las homologías singulares de las esferas S^n, $n = 1, 2, \ldots$ Por doquier en este párrafo vamos a tomar en calidad de grupo de coeficientes al grupo de los números enteros.

TEOREMA 1. *Para $n > 0$ tiene lugar la igualdad*

$$H_i(S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, \quad i = n, \\ 0, & i \neq 0, \quad n. \end{cases} \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $n = 1$. Calculemos homologías de una circunferencia S^1 de una sucesión exacta del par $(D^1, \partial D^1)$, donde $\partial D^1 = S^0$ son dos puntos, con esto $H_k(D^1, S^0) = H_k(S^1)$ en virtud del teorema 5.4. Tenemos:

$$H_1(D^1) \to H_1(D^1, S^0) \to H_0(S^0) \to H_0(D^1) \to 0 \tag{2}$$

Pero $H_1(D^1) = 0$, $H_0(D^1) = \mathbb{Z}$, $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, porque S^0 consta de dos componentes conexos. Por eso la sucesión (2) obtiene la forma

$$0 \to H_1(S^1) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0, \tag{3}$$

de donde $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Si $k > 1$, tenemos

$$H_k(D^1) \to H_k(D^1, S^0) \to H_{k-1}(S^0), \tag{4}$$

donde $H_k(D^1) = H_{k-1}(S^0) = 0$, eso es, $H_k(D^1, S^0) = H_k(S^1) = 0$. Las homologías de la circunferencia están calculadas.

Ya ha sido demostrado el teorema para las homologías de una esfera S^{n-1}. De la sucesión exacta del par (D^n, S^{n-1}) obtendremos

$$\ldots \to H_k(D^n) \to H_k(D^n, S^{n-1}) \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to H_{k-1}(D^n) \to \ldots \tag{5}$$

Si $k > 1$ obtenemos una sucesión exacta de forma

$$0 \to H_k(S^n) \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to 0, \tag{6}$$

de donde $H_k(S^n) = H_{k-1}(S^{n-1})$, $k > 1$. Si $k = 1$, obtenemos una sucesión

$$H_1(D^n) \to H_1(D^n, S^{n-1}) \to H_0(S^{n-1}) \to H_0(D^n) \to 0,$$

o sea,

$$0 \to H_1(D^n, S^{n-1}) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

En virtud de la exactitud de esta sucesión, el homomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es un isomorfismo por eso $H_1(D^n, S^{n-1}) = H_1(S^n) = 0$. De aquí se desprende la corrección de la afirmación del teorema también para la esfera S^n. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Identifiquemos un símplex n-dimensional σ^n con un disco D^n; entonces, la aplicación idéntica $\sigma^n \to \sigma^n$ determina un ciclo relativo singular en el grupo $H_n(D^n, S^{n-1}) = H_n(S^n)$. Este ciclo es una generatriz en un grupo de homologías singulares $H_n(S^n)$.

PROBLEMA 1. Sean $\sigma^n = [\alpha_0 \ldots \alpha_n]$ un símplice n-dimensional; P es una permutación de los vértices $\alpha_0 \ldots \alpha_n$. P determina la aplicación $\sigma^n \to \sigma^n$. Calcular un elemento correspondiente en el grupo $H_n(S^n)$.

COROLARIO 1. *Las homologías singulares de un ramo de esferas n-dimensionales $S_1^n, \ldots, S_N^n$ tienen la forma:*

$$H_k(\bigvee_i S_i^n) = 0,\ k \neq 0,\ n,\quad H_0(\bigvee_i S_i^n) = \mathbb{Z},\quad H_n(\bigvee_i S_i^n) = \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}}_{N \text{ veces}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el par: $(\bigcup_i D_i^n = K,\ \bigcup_i \partial D_i^n = L)$.

Evidentemente tenemos $H_j(K, L) = \sum H_j(D^n, \partial D^n)$. Si $j > 0$, según el teorema, tenemos $H_j(D^n, \partial D^n) = H_j(S^n)$. El corolario queda demostrado.

COROLARIO 2. *La aplicación $f\colon S^n \to S^n$ del grado $\deg f$ determina un homomorfismo $f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$, que es multiplicación por el número $\deg f$.*

DEMOSTRACIÓN. La aplicación f del grado $k = \deg f$ de la esfera S^n en sí misma, es posible construirla del modo señalado en la fig. 41 (cualquier otra aplicación de grado k es homotópica a ésta). Aquí todas las esferas del ramo se aplican en una sola, idénticamente en cada sumando. La aplicación de esfera en el ramo de k esferas transforma la generatriz del grupo $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ en la suma de todas las generatrices del ramo. La aplicación del ramo de esferas en una esfera transforma cada generatriz de homologías n-dimensionales del ramo

en una generatriz del grupo $H_n(S^n)$. Por eso la aplicación pasante $H_n(S^n) = \to H_n(S^n)$ multiplica la generatriz del grupo $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ en $k = \deg f$. De aquí se deduce el corolario requerido.

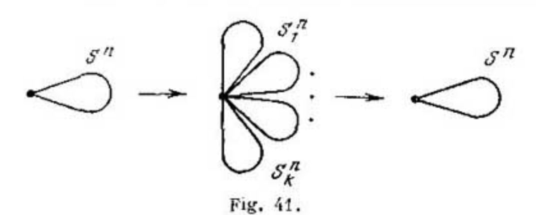


Fig. 41.

COROLARIO 3. *Para un complejo celular K tenemos*

$$H_j(K_n K_{n-1}) = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}, & j = n, \end{cases} \tag{7}$$

donde el número de sumandos es igual al número de células n-dimensionales.

La demostración se deduce inmediatamente del corolario 1 y el teorema 1.

TEOREMA 2. *Las homologías singulares de un complejo celular coinciden con las homologías celulares.*

COROLARIO. *Las homologías celulares son homotópicamente invariantes. Las homologías simpliciales son un caso particular de las celulares y por eso coinciden también con las singulares, y son homotópicamente invariantes.*

Primero demostraremos el teorema para los complejos simpliciales, que se deduce muy simplemente de hechos ya demostrados. Cada símplex puede ser considerado como un símplex singular (σ^k, f). Esto da un encaje (inmersión) de un complejo de cadenas simpliciales en las singulares

$$C^{\text{simpl}}(K) \to C^{\text{sing}}(K), \tag{8}$$

que, evidentemente, conmuta con un operador de frontera ∂. Por eso tenemos la aplicación de homologías

$$H_k^{\text{simpl}}(K) \to H_k^{\text{sing}}(K). \tag{9}$$

Si L es un subcomplejo simplicial en K, entonces tenemos la aplicación de grupos relativos

$$H_k^{\text{simpl}}(K, L) \to H_k^{\text{sing}}(K, L) \tag{10}$$

y de toda la sucesión exacta del par (K, L). Sea que está demostrado, por inducción, el teorema para los complejos de dimensión $\leqslant n-1$.

Para los complejos n-dimensionales K_n tenemos la aplicación de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccc} H_{j+1}^{\text{simpl}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_j^{\text{simpl}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_j^{\text{simpl}}(K^n) \to \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \to H_{j+1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \to & H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) & \to & H_j^{\text{sing}}(K^n) \to \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \to H_j^{\text{simpl}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{simpl}}(K^{n-1}) \to \\ \downarrow & & \downarrow \\ \to H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \to \end{array} \qquad (11)$$

Sabemos lo siguiente: a) por inducción $H_*^{\text{simpl}}(K^{n-1}) \approx \approx H_*^{\text{sing}}(K^{n-1})$;

b) $H_j^{\text{simpl}}(K^n, K^{n-1}) = H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ \mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}, & j = n \end{cases}$

(el número de los sumandos es igual al número de los símplex de dimensión n), como se muestra más arriba. Por consiguiente, teniendo la aplicación de sucesiones exactas (11), concluimos, que la aplicación

$$H_j^{\text{simpl}}(K^n) \to H_j^{\text{sing}}(K^n) \qquad (12)$$

es un isomorfismo para todas las j (véase la afirmación 5.1).

El teorema queda demostrado para los complejos simpliciales.

DEMOSTRACIÓN. Sean: K, un complejo celular general; K^n, su armazón n-dimensional, o sea, la reunión de todas las células de dimensión no superior a n. Entonces, K^n/K^{n-1} es un ramo de esferas n-dimensionales, con una esfera en cada célula n-dimensional. De los teorema 5.4 y 1 obtenemos:

$$H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K), \quad H_i(K^n, K^{n-1}) = 0, \quad i \neq n \qquad (13)$$

(coeficientes enteros), donde $C_n(K)$ es un grupo de cadenas celulares.

Queda determinado el homomorfismo $\partial = j \cdot \partial_*$

$$C_n(K) \approx H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \approx C_{n-1}(K) \qquad (14)$$

como una superposición

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$$

LEMA 1. *El operador ∂: $C_n(K) \to C_{n-1}(K)$, dado por la fórmula $\partial = j\partial_*$, coincide con un operador de frontera en un complejo de cadenas celulares.*

DEMOSTRACIÓN. Sea σ^n una célula n-dimensional en el complejo K. Ella es generatriz en el grupo $H_n(\sigma^n, \partial\sigma^{n-1}) \subset H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$. Con un homomorfismo de frontera $H_n(\sigma^n, \partial\sigma^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$, la σ^n pasará a ser la generatriz del grupo $H_{n-1}(S^{n-1})$. Su imagen en el grupo $H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) = C_{n-1}(K)$ es de forma

$$\partial\sigma^n = \sum_i [\sigma^n : \sigma_i^{n-1}]\, \sigma_i^{n-1} \tag{15}$$

(suma por todas las células de dimensión $n-1$), en virtud del corolario 2 del teorema 1. Aquí $[\sigma^n : \sigma_i^{n-1}]$ es un coeficiente de incidencia de células, calculable como grado de la aplicación $\partial\sigma^n \to K^{n-1}/K^{n-2}$ en el i-ésimo sumando. (véase el § 5). La fórmula (15) coincide con un operador de frontera en las cadenas celulares, determinado antes en el § 4. El lema queda demostrada.

Las homologías celulares poseen las siguientes propiedades:

a) son iguales a cero en dimensiones mayores que la dimensión del complejo $H_j^{\text{cel}}(K^n) = 0$, $j > n$.

b) el grupo $H_n^{\text{cel}}(K^n)$ es isomorfo a un grupo de ciclos $Z_n^{\text{cel}} \subset C_n(K^n)$, ya que no hay fronteras.

c) el grupo $H_j^{\text{cel}}(K^n)$ depende sólo del armazón K^{j+1}, o sea, es el mismo grupo para $K^{j+1}, K^{j+2}, \ldots, K^{n-1}, K^n$.

Sea que está demostrada, por inducción, la coincidencia de homologías celulares y singulares para los complejos de dimensión $\leqslant n-1$. Consideremos el par (K^n, K^{n-1}):

$$\xrightarrow{\partial_*} H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_j^{\text{sing}}(K^n) \xrightarrow{j} $$
$$\xrightarrow{j} H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{j-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \to . \tag{16}$$

Tenemos $H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) = 0$ si $j \neq n$. Por eso, de (16) deducimos que

$$H_j^{\text{sing}}(K^n) = H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) \quad \text{si} \quad j \neq n-1,\ n. \tag{17}$$

De aquí tenemos

$$H_j^{\text{sing}}(K^n) = \begin{cases} 0, & j \geqslant n+1, \\ H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) = H_j^{\text{cel}}(K^{n-1}), & j \leqslant n-2. \end{cases} \tag{18}$$

Quedan las dimensiones $j = n,\ n-1$.

De (16) tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to H_n^{\text{sing}}(K^n) & \to & H_n^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} \\ \| & & \| & & \| & \\ 0 \to H_n^{\text{sing}}(K^n) & \to & C_n^{\text{cel}}(K^n) & \xrightarrow{\partial} & Z_{n-1}^{\text{cel}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \to H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n) & \to & H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) \\ \| & \searrow & \\ H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n) \to 0. & & \end{array}$$

De aquí, utilizando el lema 1 sobre la coincidencia de un homomorfismo ∂ en las cadenas celulares con el homomorfismo

$$j\partial_*: H_n^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \xrightarrow{j} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}),$$

llegamos a la conclusión de que:

a) el grupo $H_n^{\text{sing}}(K^n)$ se halla en $C_n^{\text{cel}}(K^n)$ como un núcleo de ∂ o sea, coincide con $H_n^{\text{cel}}(K^n)$.

b) el grupo $H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n)$ coincide con $Z_{n-1}^{\text{cel}}/\text{Im}\,\partial$ y por eso coincide con $H_{n-1}^{\text{cel}}(K^n)$.

El teorema queda demostrado.

La demostración del teorema para las cohomologías es totalmente análoga.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. Para la demostración dada aquí del teorema de coincidencia de las homologías celulares con las singulares simpliciales la construcción explícita de estas homologías no es esencial. Son importantes sólo las propiedades formales de estas teorías de homologías. La separación de estas propiedades puras permite dar una definición «axiomática» a la teoría de homologías (Steenrod—Eulenberg). Esta definición es la siguiente.

a) Se llamará teoría de homologías a una «función» (de otro, modo: «functor»), que confronta a cada complejo celular K (o a cada par (K, L), donde $L \subset K$ es un subcomplejo) un surtido de grupos abelianos $H_i(K)$ (o $H_i(K, L)$), $i = 0, 1, 2, \ldots$, y a cada aplicación continua (puede considerársela celular) de complejos $f: K \to K'$ (o $f: (K, L) \to (K', L')$, donde $f(L) \subset L'$) es un surtido de homomorfismos

$$f_*: H_i(K) \to H_i(K'), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$
$$f_*: H_i(K, L) \to H_i(K', L'),$$

Se requiere que a la superposición de aplicaciones le corresponda la superposición de homomorfismos

$$(fg)_* = f_* g_*; \tag{19}$$

a la aplicación idéntica le debe corresponder el homomorfismo idéntico: $1_* = 1$.

b) La teoría de homologías introducida debe tener las siguientes propiedades («axiomas de la teoría de homologías»):

1. *Invariación homotópica.* Si las aplicaciones f y g son homotópicas, entonces los homomorfismos f_* y g_* coinciden:

$$f \sim g \Rightarrow f_* = g_*.$$

2. *Están determinados los operadores de frontera*

$$\partial: H_m(K, L) \to H_{m-1}(L), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

donde L es un subcomplejo en el complejo K, que conmuta con las aplicaciones continuas de pares de complejos, o sea,

$$\partial f_* = f_* \partial; \quad f\colon (K, L) \to (K', L'), \quad f(L) \subset L'.$$

3. *Exactitud.* Designemos por i, j los encajes evidentes

$$L \overset{i}{\subset} K \overset{j}{\subset} (K, L).$$

Se requiere que sea exacta la sucesión de los grupos y homomorfismos

$$\ldots \to H_{m+1}(K, L) \xrightarrow{\partial} H_m(L) \xrightarrow{i_*} H_m(K) \xrightarrow{j_*}$$
$$\to H_m(K, L) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(L) \to \ldots$$

4. *Corte.* $H_m(K, L) = H_m(K/L, *)$, donde L es un subcomplejo en K; K/L es un complejo cociente, donde L está contraído en un punto $*$.

5. *Normación.* $H_m(*) = 0$ si $m > 0$ (aquí $*$ es un punto).

PROBLEMA 2. Demostrar que la teoría de homologías está determinada por las propiedades enumeradas unívocamente, si $H_0(*) = G$ es un grupo dado.

Para las homologías celulares y singulares todas estas propiedades se cumplen (véanse los §§ 4, 5); precisamente por eso coinciden entre sí. En el § 5 también se examinó un ejemplo de homologías singulares cúbicas (no reducidas), donde no se cumple el axioma de normación (las homologías del punto son no triviales en las dimensiones positivas).

Si se excluye de la teoría de homologías la condición de normación, entonces obtendremos la definición de la *teoría extraordinaria de las homologías*. Las homologías singulares cúbicas es un ejemplo «trivial» de la teoría extraordinaria de las homologías (véase el problema en el § 5). Otro ejemplo más complicado (y más importante) de la teoría extraordinaria de las homologías (la teoría de los bordismos) se encontrará en el capítulo 3.

Por analogía con la definición de la teoría de homologías se da una definición axiomática de la teoría de cohomologías una formulación exacta de los axiomas y la demostración del teorema de unicidad de la teoría de cohomologías se las dejamos al lector en calidad de ejercicios). En este camino es posible obtener la demostración de la coincidencia de las cohomologías, definidas en el § 1 mediante formas diferenciales, con otros tipos de cohomologías. Sólo hay que transformar cualquier complejo en una variedad, tomando un pequeño entorno de su encaje en un espacio euclídeo. No damos aquí tales consideraciones, ya que en el § 14 será indicado otro camino más constructivo de la demostración de coincidencia de cohomologías, definidas por las formas, con otros tipos de cohomologías.

Indiquemos otra aplicación del operador de la subpartición baricéntrica del complejo simplicial en el caso de variedades («dualidad de Poincaré»), véase también el § 18. Sea triangulada una aplicación suave, es decir, transformada en un complejo simplicial compuesto por símplex suaves. Supongamos que la subpartición es bastante pequeña (si es necesario, efectuamos repetidas subparticiones baricéntricas). Sea σ_α^k un símplex en M^n. Definimos los poliedros duales $D(\sigma_k^\alpha) = \bar{\sigma}^{n-k}_\alpha$, que son células de dimensión $n - k$.

a) a un símplex n-dimensional σ_α^n le es dual un vértice $D\sigma_\alpha^n$ de una subpartición baricéntrica, que se encuentra en el centro de un símplex σ_α^n;

b) a un símplex 0-dimensional σ_γ^0 le es dual una célula n-dimensional (poliedro) $D\sigma_\gamma^0$, que es la suma de todos los símplex de una

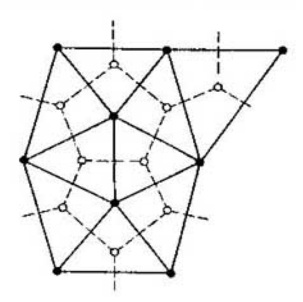


Fig. 42. Triangulación inicial de M^2 indicada con líneas continuas; la partición dual, con líneas de trazos discontinuos.

subpartición baricéntrica con un vértice σ_γ^0 (véase la fig. 42 para $n = 2$);

c) a una arista σ_δ^1 en M^n, le corresponde una célula $(n - 1)$-dimensional $D\sigma_\delta^1$, que es la suma de todos los símplex de la dimensión $n - 1$ de una subpartición baricéntrica, que tienen el centro de la arista σ_δ^1 como su vértice y que son adyacentes transversalmente a esta arista;

d) a una cara σ_s^{n-1} en M^n, le corresponde una célula 1-dimensional $D\sigma_s^{n-1}$, que se compone de todos los símplices 1-dimensionales (en el caso dado, de dos) de una subpartición baricéntrica, que tienen el centro σ_s^{n-1} como su vértice y que son adyacentes transversalmente a σ_s^{n-1} (véase la fig. 42).

e) Es evidente la generalización sucesiva: a un símplex σ_s^k en M^n le es dual una célula $D\sigma_s^k$ de dimensión $n - k$, que es la suma de todos los símplex que tienen el centro σ_s^k como su vértice y son

adyacentes transversalmente a este centro. Las células $D\sigma_s^k$ parten a M^n en un complejo (de poliedros).

Propiedades del operador D.

1) La intersección $\sigma_s^k \cap D\sigma_s^k$ es un punto (el centro σ_s^k).

2) Si no se toman en cuenta los signos es justa la igualdad

$$(\partial\sigma_s^k) \cap D\sigma_t^{k-1} = \sigma_s^k \cap (\partial D\sigma_t^{k-1}) \pmod 2. \qquad (20)$$

Las propiedades 1) y 2) son evidentes directamente para las dimensiones $n = 1, 2, 3$. Es fácil comprender, que son justas para todas las $n > 3$.

La propiedad 1) nos permite definir el producto bilineal escalar $a \circ b$, donde $a \in C_j(M^n)$ es una cadena, $b \in C_D^{n-j}(M^n)$ es una cocadena sobre un complejo dual de las células $D\sigma_\alpha^j$, $a = \sum_i \lambda_i \sigma_i^j$, $b = \sum_k \mu_k D\sigma_k^j$. (En la última igualdad se sobreentiende que a la célula $D\sigma_k^j$ se le confronta una cocadena designada por el mismo símbolo, que tiene el valor 1 en esta célula y 0 en las demás. Tales cocadenas $D\sigma_k^j$ forman una base en el grupo C_D^{n-j}).

Sean λ y μ residuos módulo 2. Supongamos

$$\sigma_i^j \circ D\sigma_k^j = \delta_{ik} \pmod 2), \qquad (21)$$

$$a \circ b = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k \delta_{ik}. \qquad (22)$$

De la propiedad 2) se deduce, por definición,

$$(\partial a) \circ b = a \circ (\partial b), \qquad (23)$$

es decir, los operadores de frontera son conjugados. De (23) se deduce:

$$H_j(M^n; \mathbb{Z}_2) \overset{D}{=} H^{n-j}(M^n; \mathbb{Z}_2), \qquad (24)$$

ya que ambos complejos son las particiones celulares de la misma variedad M^n y tienen iguales homologías en cada dimensión. Esto es corolario del teorema sobre la invariación homotópica de las homologías celulares. Al isomorfismo (24) se lo llama «dualidad de Poincaré». Para las variedades orientables las igualdades (23) y (24) se cumplen sobre $\mathbb{Z}$. Más abajo (véase el § 18) la dualidad de Poincaré se deducirá de una manera algo distinta.

Utilizamos varias veces, antes de definir exactamente los grupos de homologías, los términos «ciclo k-dimensional» y «película $(k+1)$-dimensional» en la variedad M^n, comprendiendo lo siguiente:

«ciclo» se da como (M^k, f), donde M^k es una variedad orientada cerrada y su aplicación $f\colon M^k \to M^n$.

«película» (W^{k+1}, f) se da como una variedad orientada compacta W^{k+1} con borde y la aplicación $f\colon W^{k+1} \to M^n$. La «película» tiene la frontera

$$\partial (W^{k+1}, f) = (\partial W^{k+1}, f|_{\partial W^{k+1}}) \tag{25}$$

«El grupo de ciclos» son las sumas formales de «ciclos»

$$\sum_i (M_i^k, f_i). \tag{26}$$

Factorizando por los ciclos equivalentes a cero, o sea, por las fronteras (25), obtendremos grupos a manera de homologías, llamados «bordismos» y designados por $\Omega_k (M^n)$. Es posible definir los bordismos para cualquier complejo $\Omega_k (X)$, naturalmente se introducen los «bordismos relativos» $\Omega_k (X, Y)$. Para los bordismos es justo el teorema sobre la invariación homotópica, tiene lugar la sucesión exacta del par (X, Y) y hasta la propiedad $\Omega_* (X, Y) = \Omega_* (X/Y)$. Pero para los espacios contractables (por ejemplo, el punto $*$) los bordismos resultan no triviales en las dimensiones positivas. La causa es muy simple: no cada variedad cerrada M^k, ni mucho menos, es frontera de una variedad con borde $(k+1)$-dimensional. Por ejemplo, si la variedad M^4 es un borde de la cinta W^5, entonces la clase $p_1 (M^4) = 0$. En particular, $\mathbb{C}P^2$ no es un borde (véanse los detalles en el § 27).

De forma análoga se definen los «bordismos por el módulo 2» o «bordismos no orientables», donde los ciclos (M^k, f) son las aplicaciones $M^k \xrightarrow{f} X$ de todas las variedades cerradas (no sólo orientadas), y las películas se toman también no orientadas. Ellos se designan por $N_k (X)$

PROBLEMA 3. Demostrar que $\mathbb{R}P^2$ no es borde de ninguna variedad tridimensional. Demostrar que todos sus productos directos en sí mismos $\mathbb{R}P^2 \times \ldots \times \mathbb{R}P^2$ tampoco son bordes.

PROBLEMA 4. Demostrar, que si la variedad M^k es un borde, o sea, $M^k = \partial W^{k+1}$, entonces la característica de Euler $\chi (M^k)$ es par.

Se tienen los homomorfismos naturales

$$\Omega_k (X) \to H_k (X; \mathbb{Z}) \to H_k (X; \mathbb{R}), \quad N_k (X) \to H_k (X; \mathbb{Z}_2). \tag{27}$$

Se dice, que la clase de homologías de la imagen de estos homomorfismos son «ciclos realizables como una imagen continua de la variedad», es decir, lo mismo que hemos comprendido antes como ciclo. Pero el estudio de los mismos bordismos y de los problemas donde se utilizan, es más difícil (véase el § 27)

§ 7. Homologías del producto directo. Multiplicación en las cohomologías. Cohomologías de los H-espacios y de los grupos de Lie. Cohomologías del grupo unitario.

Sean K_1 y K_2 complejos celulares. El producto directo de los mismos $K_1 \times K_2$ es también un complejo celular, sus células son productos de las células de los complejos K_1 y K_2. Por eso, el grupo de las cadenas con coeficientes enteros celulares $C_n(K_1 \times K_2; \mathbb{Z})$ es del tipo

$$C_n(K_1K_2; \mathbb{Z}) = \sum_{k+l=n} C_k(K_1; \mathbb{Z}) \otimes C_l(K_2; \mathbb{Z}).$$

La frontera del producto de dos células $\sigma^i \times \sigma^j$ se obtiene por la fórmula

$$\partial(\sigma^i \times \sigma^j) = (\partial\sigma^i) \times \sigma^j \cup (-1)^i \sigma^i \times (\partial\sigma^j)$$

(el signo $(-1)^i$ tiene en cuenta la orientación). De aquí obtenemos:

AFIRMACIÓN 1. *El complejo de las cadenas con coeficientes enteros del producto directo $K_1 \times K_2$ de los complejos celulares, es el producto tensorial de los complejos $C(K_1; \mathbb{Z})$ y $C(K_2; \mathbb{Z})$:*

$$C(K_1 \times K_2; \mathbb{Z}) = C(K_1; \mathbb{Z}) \otimes C(K_2; \mathbb{Z})$$

(véase el § 2).

Evidentemente, este hecho es correcto también en el caso cuando en vez de los números enteros, en calidad de coeficientes, se toma un anillo conmutativo arbitrario con unidad, en particular, un campo. Aplicando el teorema 2.2, obtenemos:

COROLARIO. *Para las homologías con coeficientes en un campo k es justa la igualdad*

$$H_m(K_1 \times K_2; k) = \sum_{m+l=n} H_m(K_1; k) \otimes H_l(K_2; k).$$

En general, para cualquier anillo G está definido el homomorfismo (no isomorfismo), dado por la multiplicación tensorial de los ciclos

$$\sum_{k+l=m} H_k(K_1; G) \otimes H_l(K_2; G) \to H_m(K_1 \times H_2; G). \tag{1}$$

Aquí los ciclos $c_1 = \sum_i a_i \sigma_i^k$, $c_2 = \sum_i b_i \sigma_i^l$ se transforman en el ciclo $c_1 \otimes c_2 = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^k \times \sigma_j^l)$. Tenemos:

$$\partial(c_1 \otimes c_2) = \partial c_1 \otimes c_2 + (-1)^k c_1 \otimes \partial c_2$$

Por eso la cadena $c_1 \otimes c_2$ es un ciclo. Al cambiar c_1 por $c_1 + \partial c$, sustituimos el ciclo $c_1 \otimes c_2$ por el homológico $(c_1 + \partial c) \otimes c_2 = c_1 \otimes c_2 + \partial(c \otimes c_2)$. La aplicación construida (1) es correcta.

Si $G = k$ es un campo, entonces, la multiplicación tensorial da un isomorfismo.

De forma análoga se define la multiplicación tensorial en las cohomologías con los coeficientes en el anillo:

$$\sum_{h+l=m} H^h(K_1; G) \otimes H^l(K_2; G) \rightarrow H^m(K_1 \times K_2; G)$$

(isomorfismo, si $G = k$ es un campo).

La aplicación diagonal Δ: $K \rightarrow K \times K$, donde x se transforma en (x, x), induce el homomorfismo de cohomologías:

$$H^*(K \times K; G) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(K; G).$$

TEOREMA 1. *Sea G un anillo asociativo conmutativo con unidad. Entonces, la aplicación pasante*

$$\Delta^*(a \otimes b) = ab:\ H^k(K; G) \otimes H^l(K; G) \rightarrow$$
$$\rightarrow H^{k+l}(K \times K; G) \xrightarrow{\Delta^*} H^{k+l}(K; G)$$

da en la suma directa de los grupos de cohomologías $H^*(K; G) = \sum_{i \geqslant 0} H^i(K; G)$ *una estructura del anillo asociativo anticonmutativo con unidad,* $1 \in H^0(K; G)$, $ba = (-1)^{kl}ab$.

DEMOSTRACIÓN. La asociatividad y la anticonmutatividad se deducen de las siguientes propiedades evidentes del producto tensorial:

a) Asociatividad. Si $c_1 \in H^k(K_1; G)$, $c_2 \in H^l(K_2; G)$, $c_3 \in H^m(K_3; G)$, entonces los elementos $(c_1 \otimes c_2) \otimes c_3$, $c_1 \otimes (c_2 \otimes c_3)$ en el grupo $H^{k+l+m}(K_1 \otimes K_2 \otimes K_3; G)$ coinciden.

b) Anticonmutatividad. Si $c \in H^k(K)$, $c' \in H^l(K)$ y f: $K \times K \rightarrow K \times K$ es una aplicación $f(x, y) = (y, x)$, que permuta los factores, entonces, $f^*(c \otimes c') = (-1)^{kl}c' \otimes c$. Hay que aprovechar el hecho que al permutar las células $\sigma^k \times \sigma^l \rightarrow \sigma^l \times \sigma^k$, la orientación del producto cambia por el factor $(-1)^{kl}$.

Como la unidad en el anillo $H^*(K; G)$ será un elemento $1 \in G = H^0(*; G)$. Realmente, la proyección de la diagonal Δ en un factor

$$K \xrightarrow{\Delta} K \times K \xrightarrow{p} K, \qquad p(x, y) = x$$

es una aplicación idéntica. Por eso $\Delta^*(a \otimes 1) = a$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACION 1. Para las formas diferenciales sobre las variedades M_1 y M_2 todo es análogo: si están dados dos formas $\bar{\omega} = \sum f_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $\bar{\bar{\omega}} = \sum g_{j_1 \ldots j_l} dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_l}$,

entonces su producto tensorial $\bar{\omega} \otimes \bar{\bar{\omega}}$ está definido como una forma sobre $M_1 \times M_2$,

$$\omega = \bar{\omega} \otimes \bar{\bar{\omega}} = p_1^* (\bar{\omega}) \wedge p_2^* (\bar{\bar{\omega}}) =$$
$$= (\sum f_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) \wedge (\sum g_{j_1 \ldots j_l} dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_l}),$$

donde p_1: $M_1 \times M_2 \to M_1$, p_2: $M_1 \times M_2 \to M_2$ son proyecciones. Cualquier forma suave sobre $M_1 \times M_2$ puede ser desarrollada en una serie convergente de los productos de formas sobre los factores M_1 y M_2. El producto tensorial de dos formas cerradas está cerrado en $M_1 \times M_2$; el producto tensorial de una forma cerrada en la exacta es una forma exacta. La definición de la multiplicación exterior de las formas se puede comprender así: si $M_1 = M_2$, entonces, tenemos una diagonal $\Delta = \{(x, x)\} = M_1 \subset M_1 \times M_1$ y una acotación en la diagonal $\Delta^* (\bar{\omega} \otimes \bar{\bar{\omega}}) = \bar{\omega} \wedge \bar{\bar{\omega}}$ (en M_1), $\bar{\bar{\omega}} \wedge \bar{\omega} = (-1)^{kl} \bar{\omega} \wedge \wedge \bar{\bar{\omega}}$.

OBSERVACIÓN 2. Para los complejos finitos simpliciales K la multiplicación de las cocadenas simpliciales se puede definir así: ordenemos todos los vértices del complejo K: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$. Cualquier simplex $\sigma^k \subset K$ se escribe, por eso, en forma de un juego ordenado de los vértices

$$\sigma^k = (\alpha_{j_0} \ldots \alpha_{j_k}), \quad \text{donde } j_0 < j_1 < \ldots < j_k.$$

Sean: α, una cocadena de dimensión k; β, una cocadena de dimensión l (o sea, las funciones numéricas de los simplex de dimensiones k y l, correspondientemente). Se define la cocadena de dimensión $k + l$ de la manera siguiente:

$$(\alpha \cup \beta, \sigma^{k+l}) = (\alpha, \sigma_1^k) (\beta, \sigma_2^l), \tag{2}$$

donde $\sigma^{k+l} = (\alpha_{j_0} \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_{k+l}})$,

$$\sigma_1^k = (\alpha_{j_0} \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_k}), \quad \sigma_2^l = (\alpha_{j_k} \alpha_{j_{k+1}} \ldots \alpha_{j_{k+l}}).$$

La unidad de esta multiplicación de cocadenas $\alpha \cup \beta$ es una cocadena, que tiene el valor $1 \in G$ en cada vértice (G es un anillo conmutativo con unidad). Evidentemente, esto es un cociclo. La multiplicación de las cocadenas no es anticonmutativa.

PROBLEMA 1. Verifíquese la igualdad (fórmula de Leibniz):

$$\delta (\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \cup (\delta\beta).$$

PROBLEMA 2. Demuestren, que la siguiente diferencia de dos productos es cohomológica a cero, si α y β son cociclos:

$$\alpha \cup \beta - (-1)^{kl} \beta \cup \alpha = \delta\gamma, \quad k = \deg \alpha, \quad l = \deg \beta, \quad \delta\alpha = \delta\beta = 0.$$

Por eso obtenemos un anillo anticonmutativo de cohomologías (con unidad $1 \in H^0(K; G) = G$) $H^*(K; G) = \sum\limits_{q \geq 0} H^q(K; G)$.

PROBLEMA 3. Demostrar, que esta multiplicación en las cohomologías coincide con la introducida más arriba.

La multiplicación de las cadenas con coeficientes enteros permite definir una operación importante, de tallado (o corte). Si z_{h+l} es una cadena de $C_{h+l}(K; \mathbb{Z})$, α y β son cocadenas correspondientes de $C^h(K; \mathbb{Z})$ y $C^l(K; \mathbb{Z})$, entonces hacemos por definición,

$$(\alpha^h \cup \beta^l, z_{h+l}) = (\alpha^h \cap z_{h+l}, \beta^l). \tag{3}$$

La fórmula (3) para todos los β^l con los α^h y z_{h+l} dados, define una cocadena de dimensión l:

$$z_l = \alpha^h \cap z_{h+l} \in C_l(K; \mathbb{Z}).$$

PROBLEMA 4. Demostrar, que la operación de tallado $\cap$ del ciclo z_{h+l} por un cociclo α^h es correctamente definida sobre los grupos de homologías

$$H^h(K; \mathbb{Z}) \cap H_{h+l}(K; \mathbb{Z}) \subset H_l(K; \mathbb{Z}).$$

PROBLEMA 5. Demostrar, que con las aplicaciones continuas de los complejos $K \xrightarrow{f} L$ tenemos (en homologías)

$$f_*(f^*(\alpha) \cap z) = \alpha \cap f_*(z).$$

PROBLEMA 6. Demostrar, que el operador D (véase el § 6) se da por tallado $\alpha \to \alpha \cap [M^n]$, donde $[M^n] = z$ es la suma de todos los simplex n-dimensionales.

En el caso cuando un grupo de coeficientes G es un campo, los espacios H^h y H_h son conjugados y la operación de tallado se representa como una multiplicación en las homologías. Pero para las homologías con coeficientes enteros ésta es útil.

EJEMPLO. Calculemos un anillo de cohomologías de un espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^n$ con coeficientes reales. Las homologías $\mathbb{C}P^n$ ya las conocemos (véase el § 1), por eso tenemos:

$$\begin{aligned} &H^{2k+1} = H_{2k+1} = 0, \\ &H^{2k}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) = H_{2k}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad k \leqslant n. \end{aligned} \tag{4}$$

En el § 1 fue indicada una 2-forma c_1, que engendra un anillo de polinomios de una generatriz $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R})$ con una relación $c_1^{n+1} = 0$. En virtud de (4) este subanillo coincide con todo el anillo $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R})$. Así obtenemos: para $\mathbb{C}P^n$ el anillo $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R})$ son «polinomios truncados» de una generatriz c_1 de dimensión 2

$$H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[c_1]/c_1^{n+1} = 0, \quad \deg c_1 = 2. \tag{5}$$

Sea $f: K \to L$ una aplicación continua. La misma puede ser considerada como celular, en virtud del teorema 4.2. Ella engendra la aplicación de los productos directos

$$F = f \times f: K \times K \to L \times L,$$

suponiendo $F(x, y) = (f(x), f(y))$. La aplicación F conserva la diagonal $F(\Delta) \subset \Delta$ y transforma un producto tensorial de las clases de homologías (cohomologías) en un producto tensorial de sus imágenes. De aquí se deduce una conclusion importante: como la multiplicación en las cohomologías está definida por la fórmula $ab = \Delta^*(a \otimes b)$ en ambos complejos K y L, entonces la aplicación continua f conmuta con la operación de la multiplicación de las clases de cohomologías, o sea

$$f^*(ab) = f^*(a) f^*(b).$$

De manera que $f^*: H^*(L) \to H^*(K)$ es un homomorfismo de los anillos de cohomologías.

Apliquemos este resultado al estudio de los anillos de cohomologías de los grupos de Lie (y, de modo más general, de H-espacios). Recordemos (véase [1], parte II, § 22), que un H-espacio general X tiene una multiplicación continua $x \circ y = \psi(x, y) \in X$ (o $\psi: X \times X \to X$) con «unidad homotópica», es decir, con un elemento destacado $x_0 \in X$ tal, que las aplicaciones del producto sobre x_0

$$\psi(x_0, x): X \to X,$$
$$\psi(x, x_0): X \to X$$

ambas son homotópicas a una aplicación idéntica. Introduzcamos definiciones algebraicas útiles.

DEFINICIÓN 1. Sea $H = \sum_{k \geq 0} H^k$ un álgebra graduada anticonmutativa con unidad $H^k H^l \subset H^{k+l}$, $yx = (-1)^{kl} xy$, donde $x \in H^k$, $y \in H^l$. A H se la denomina "álgebra de Hopf", si es dado un homomorfismo, que conserva la dimensión

$$\lambda: H \to H \otimes H \quad \lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k,$$

donde $0 < \deg x_i$, $\deg y_i < \deg x$. Este homomorfismo λ se denomina frecuentemente la «diagonal» de álgebra H.

EJEMPLO 1. Sea $H = \mathbb{R}[x]$ un álgebra de polinomios con coeficientes reales de la generatriz x. Consideremos que la dimensión del elemento x es par y positiva. Obtenemos un álgebra graduada que, evidentemente, cumple la condición de anticonmutatividad. Damos sobre H una estructura del álgebra de Hopf, tomando $\lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Entonces, es obvio que

$$\lambda(x^k) = x^k \otimes 1 + 1 \otimes x^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i \otimes x^{k-i}.$$

EJEMPLO 2. Sea $H = \bigwedge [y]$ un álgebra exterior de una generatriz y, donde la dimensión y es impar y positiva. Ésta también es un álgebra graduada anticonmutativa. La estructura del álgebra de Hopf es dada por la fórmula $\lambda(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$.

EJEMPLO 3. Se llama álgebra anticonmutativa libre aquella, donde en una base conveniente no existen relaciones no triviales; tales son los ejemplos 1 y 2 del álgebra de polinomios y del álgebra exterior. Un álgebra general libre anticonmutativa graduada $H = \sum_{k \geqslant 0} H_k$, donde todos los H_k son espacios lineales de dimensión finita y H_0 es un campo de coeficientes ($H_0 = \mathbb{R}$), tiene la forma

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k, \ldots] \otimes \bigwedge [y_1, \ldots, y_s, \ldots],$$

donde las dimensiones $\deg x_i$ de las generatrices x_i son pares, y las dimensiones $\deg y_i$ son impares. O sea, tenemos sencillamente las generatrices (x_j, y_q) y ninguna relación no trivial excepto la anticonmutatividad, de donde se deduce que

$$y_q^2 = -y_q^2 = 0,$$

$$y_i y_j = -y_j y_i, \quad y_i x_j = x_j y_i, \quad x_i x_j = x_j x_i.$$

Es necesario, que sea finito el número de las generatrices de dimensión dada. En semejante álgebra H se puede determinar la estructura del álgebra de Hopf con auyda de muchos procedimientos *): tomamos para las generatrices

$$\lambda(x_j) = x_j \otimes 1 + 1 \otimes x_j + \sum_i \bar{u}_j^{(i)} \otimes \bar{v}_j^{(i)},$$

$$\lambda(y_q) = y_q \otimes 1 + 1 \otimes y_q + \sum_i \bar{\bar{u}}_q^{(i)} \otimes \bar{\bar{v}}_q^{(i)},$$

donde $\deg \bar{u}_j^{(i)}$, $\deg \bar{v}_j^{(i)}$, $\deg \bar{\bar{u}}_q^{(i)}$, $\deg \bar{\bar{v}}_q^{(i)} > 0$ y $\deg \bar{u}_j^{(i)} + \deg \bar{v}_j^{(i)} = \deg x_j$, $\deg \bar{\bar{u}}_q^{(i)} + \deg \bar{\bar{v}}_q^{(i)} = \deg y_q$ (por lo demás, los elementos $\bar{u}_j^{(i)}$, $\bar{v}_j^{(i)}$, $\bar{\bar{u}}_q^{(i)}$, $\bar{\bar{v}}_q^{(i)}$ son arbitrarios). Ya que el álgebra H es libre, entonces, de las condiciones de multiplicatividad y aditividad del homomorfismo λ, se deduce que los elementos $\lambda(x)$, $\lambda(y)$ definen el homomorfismo $H \to H \otimes H$.

TEOREMA 2 (de Hopf). *Un álgebra de cohomologías del H-espacio K es álgebra de Hopf, o sea, se tiene un homomorfismo*

$$\lambda \colon H^*(K, \mathbb{R}) \to H^*(K, \mathbb{R}) \otimes H^*(K, \mathbb{R}),$$

donde

$$\lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_i x^{(i)} \otimes y^{(i)},$$

$$\deg x^{(i)}, \quad \deg y^{(i)} > 0$$

*) Recordemos, que no exigimos la «asociatividad» de la aplicación diagonal λ.

para cualquier elemento $x \in H^q(K, \mathbb{R})$, $q > 0$. (Consideramos que un H-espacio es un complejo celular.)

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $H^*(K \times K; \mathbb{R}) \approx H^*(K; \mathbb{R}) \otimes \otimes H^*(K; \mathbb{R})$, entonces, la multiplicación ψ: $K \times K \to K$ define un homomorfismo

$$\psi^*: H^*(K; \mathbb{R}) \to H^*(K; \mathbb{R}) \otimes H^*(K; \mathbb{R}).$$

Tomamos $\lambda = \psi^*$ y verificamos sus propiedades. Tenemos $\psi^* x = x^{(0)} \otimes 1 + 1 \otimes y^{(0)} + \sum x^{(i)} \otimes y^{(i)}$, donde $\deg x^{(i)}$, $\deg y^{(i)} > 0$. Consideremos el encaje $1 \times i$: $K \times x_0 \subset K \times K$. Como $\psi(x, x_0)$ es homotópica a una aplicación idéntica, entonces, $(1 \times i)^* \psi^* x = x = x^{(0)} \otimes 1$. Por consiguiente, $x^{(0)} = x$; por analogía, $y^{(0)} = x$. El teorema queda demostrado.

La aplicación de este teorema está basada en la siguiente afirmación algebraica, que describe la estructura de las álgebras de Hopf sobre los números reales.

TEOREMA 3. *Cualquier álgebra de Hopf sobre un campo de característica nula, es decir, de números racionales complejos reales, es un álgebra libre anticonmutativa* (véase el ejemplo 3 más arriba).

COROLARIO. *El álgebra de cohomologías de cualquier grupo de Lie (de dimensión finita) es una álgebra exterior* $\Lambda[y_1, \ldots, y_n]$.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Consideremos las generatrices libres (x_j, y_q). Si se tiene aunque sea una sola de dimensión par, entonces, en el álgebra hay elementos de dimensión tan grande como se quiera. Esto no puede suceder en las cohomologías de un complejo de dimensión finita (de una variedad). El corolario queda demostrado.

EJEMPLO 1. La circunferencia S^1 es un grupo de Lie. Tenemos:

$$H^*(S^1, \mathbb{R}) = \Lambda[y_1], \quad \deg y_1 = 1$$

EJEMPLO 2. Calculemos cohomologías de un grupo unitario $U(n)$. Mostremos que tiene lugar la igualdad

$$H^*(U(n), \mathbb{R}) = \Lambda[y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}], \quad \deg y_i = i$$

DEMOSTRACIÓN. Un grupo unitario es equivalente (como una variedad) a un producto directo $U(n) = S^1 \times SU(n)$ (véase [1], par II, § 22), por eso es suficiente demostrar, que

$$H^*(SU(n), \mathbb{R}) = \Lambda[y_3, \ldots, y_{2n-1}]. \tag{6}$$

Cuando $n = 2$, el grupo $SU(2)$ como una variedad, coincide con una esfera S^3, por eso en este caso es evidente la igualdad (6).

Tenemos un espacio fibrado estándar $SU(n) \xrightarrow{SU(n-2)} S^{2n-1}$, donde la esfera S^{2n-1} es un espacio homogéneo del grupo $SU(n)$ y la fibra $SU(n-1)$ es un grupo de isotropía.

Construimos una partición celular del espacio $SU(n)$, basando en la partición de la esfera S^{2n-1} y de la fibra $SU(n-1)$. Al principio, consideremos el caso $n = 3$. Tenemos un espacio fibrado $SU(3) \xrightarrow{SU(2)} S^5$. Fijemos un vértice σ^0 sobre la esfera S^5. En la preimagen entera de este punto, la fibra $SU(2) = S^3$, tomamos las células estándares $S^3 = \sigma^0 \cup \sigma^3$. Es trivial el espacio fibrado sobre el complemento de este punto $S^5 \setminus \sigma^0$ (véase [1], parte II § 24), es decir, se puede introducir sobre él las coordenadas del producto directo: $p^{-1}(S^5 \setminus \sigma^0) = (S^5 \setminus 0) \times SU(2)$. Pero $S^5 \setminus \sigma^0$ es un disco 5-dimensional D^5, por eso $p^{-1}(S^5 \setminus \sigma^0) = D^5 \times S^3$. Este producto se parte en células de la siguiente manera: $D^5 \times S^3 = \sigma^5 \cup \sigma^8$, donde $\sigma^8 = D^5 \times D^3$. Así, la partición celular del grupo $SU(3)$ consiste de cuatro células: $SU(3) = \sigma^0 \cup \sigma^3 \cup \sigma^5 \cup \sigma^8$. Por eso tenemos en las cohomologías de este espacio: $H^0(SU(3), \mathbb{R}) = H^3 = H^5 = H^8 = \mathbb{R}$, las demás cohomólogas son nulas.

Según el teorema de Hopf, es posible escoger las generatrices $y_3 \in H^3(SU(3), \mathbb{R})$, $y_5 \in H^5(SU(3), \mathbb{R})$ tales, que $y_3^2 = y_5^2 = 0$ e $y_3y_5 = -y_5y_3 \neq 0$ son generatrices en el grupo $H^8(SU(3), \mathbb{R})$.

Ahora consideremos un caso general. Sea que está ya demostrada la igualdad (6) para las homologías $H^*(SU(n-1), \mathbb{R})$. La partición celular del grupo $SU(n)$ está engendrada por un espacio fibrado $SU(n) \xrightarrow[p]{} S^{2n-1}$ con una fibra $F = SU(n-1)$, partida en células σ_F^α con un vértice σ_F^0 en la fibra. Las células en la base son σ^0 y σ^{2n-1}. Ya que $p^{-1}(\sigma^0) = F$ y $p^{-1}(\sigma^{2n-1}) = \sigma^{2n-1} \times F$, tenemos las células en $SU(n)$

$$\sigma_F^\alpha \times \sigma^0, \quad \sigma_F^\alpha \times \sigma^{2n-1}. \tag{7}$$

Tenemos por inducción: el número de células en $SU(n-1)$ es igual al número de los cociclos linealmente independientes, y también:

$$H^*(SU(n-1, \mathbb{R}) = \wedge [y_3, \ldots, y_{2n-3}].$$

Mostremos, que las células $\sigma_F^\alpha \times \sigma^0$ y $\sigma_F^\alpha \times \sigma^{2n-1}$ son todos los cociclos. Para $(\sigma_F^\alpha \times \sigma^0)$, que representan los elementos y_i en la fibra, es obvio, ya que una célula nueva aparece en la dimensión $2n-1$. Las demás células en la fibra representan sus productos (por inducción).

Sea $y_{2n-1} = (\sigma_F^0 \times \sigma^{2n-1})$ una cocadena, concentrada en esta nueva célula. Si $\delta y_{2n-1} \neq 0$ en $C^*(SU(n))$, entonces, en el álgebra $H^*(SU(n), \mathbb{R})$ obtendríamos una correlación no trivial entre las generatrices exteriores $y_3, \ldots, y_{2n-3}$. Esto contradice el teorema de Hopf. Por consiguiente, en virtud de este teorema, el álgebra $H^*(SU(n), \mathbb{R})$ contiene un álgebra exterior $\wedge[y_3, \ldots, y_{2n-1}]$.

El rango de esta álgebra en cada dimensión coincide con el número de las células (7). Por eso $H^*(SU(n), \mathbb{R})) = \Lambda[y_1, \ldots, y_{2n-1}]$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3. Sean $x_1, x_2, \ldots$ elementos homogéneos del álgebra H, $x \in H^{\deg x_i}$, donde $0 < \deg x_i \leqslant \leqslant \deg x_j$, $i \leqslant j$; $\{x_j\}$ sea un sistema minimal de generatrices del álgebra de Hopf H. Esto significa, que cualquier elemento del álgebra H se representa en forma de un polinomio $P(x_1, x_2, \ldots)$ de las generatrices (es posible, que no unívocamente), al mismo tiempo, ninguno de los elementos x_k no puede ser representado en forma de un polinomio de los menores x_j: $x_k \neq P(x_1, \ldots, x_{k-1})$. Para un elemento constituyente x_i consideremos sus grados x_i^t.

Sea s_i un número minimal tal, que $x_i^{s_i} = 0$. Por ejemplo, para cualquier elemento de dimensión impar x_i tenemos: $s_i = 2$. Si cualquier grado del x_i constituyente es distinto de cero, consideraremos que $s_i = \infty$.

Primero demostremos que en el álgebra de Hopf no pueden haber otras relaciones, excepto las de forma $x_i^{s_i} = 0$ y correlaciones, deducidas de la anticonmutatividad.

LEMA. *Los monomios de forma $x_k^{r_k} x_{k-1}^{r_{k-1}} \ldots x_1^{r_1}$, donde $0 \leqslant \leqslant r_i < s_i$, son independientes linealmente y forman una base de un espacio vectorial H.*

DEMOSTRACIÓN. Es posible reducir cualquier monomio a la forma indicada en el lema, en virtud de anticonmutatividad. A estos monomios se los denominaremos con normales. El grado (dimensión) de un monomio normal se define por la expresión $n = r_k \deg x_k + \ldots \ldots + r_1 \deg x_1$.

A la combinación lineal de los monomios normales se la llamaremos un polinomio normal. Es necesario demostrar, que un polinomio normal no trivial no es igual a cero. La demostración la vamos a realizar mediante la inducción por el grado de polinomios. Supongamos, que para los grados $<n$ ya está demostrada la afirmación sobre la independencia de los monomios normales en H. De aquí se deduce, en particular, que los productos tensoriales de forma $a \otimes b$ en el álgebra $H \otimes H$, donde a y b son monomios normales del grado menor que n, son también linealmente independientes.

Sea $P(x_k, \ldots, x_1)$ un polinomio normal del grado n. Recolectemos juntos los términos con el mayor grado de la variable x_k y saquemos este grado del paréntesis. Obtendremos:

$$P(x_k, \ldots, x_1) = x_k^r Q(x_{k-1}, \ldots, x_1) + R(x_k, \ldots, x_1), \qquad (8)$$

donde en el polinomio R la variable x_k se contiene ya en un grado menor.

Supongamos, que tenemos una relación de forma $P(x_k, \ldots \ldots, x_1) = 0$, donde r es el mínimo posible. Demostremos que

$r = 1$, $Q = \text{const}$. Sea I_{k-1} un ideal en el álgebra H, engendrado por los elementos $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Entonces, tenemos:

$$\lambda(x_k^r Q(x_{k-1}, \ldots, x_1)) \equiv$$

$$\equiv x_k^r \otimes Q + \sum_{i=0}^{r-1} (C_r^i x_k^i \otimes x_k^{r-i})(1 \otimes Q) \pmod{I_{k-1} \otimes H},$$

al mismo tiempo $\lambda(R(x_k, \ldots, x_1))$ no contiene términos de forma $x_k^i a \otimes x_k^j b$, donde $i + j = r$. Si $\deg Q > 0$, entonces $\deg x_k^r$ y $\deg Q$ son menores que n, por eso las expresiones, que se contienen en $\lambda(P(x_k, \ldots, x_1))$, son linealmente independientes según por supuesto de inducción. Así, $\deg Q = 0$; es posible considerar, que $Q = 1$. $r \deg x_k = n$. Si $r > 1$, entonces en la expresión

$$\lambda(x_k^r) = \sum_{i=1}^{r} C_r^i x_k^i \otimes x_k^{r-i} \pmod{I_{k-1} \otimes H}$$

se incluyen términos linealmente independientes, que no pueden abreviarse con nada en $\lambda(R(x_k, \ldots, x_1))$. Así, $r = 1$, y la relación (8) tiene la forma $x_k = -R(x_{k-1}, \ldots, x_1)$, lo que no es posible en virtud de la condición de minimal del sistema de generatrices. El lema queda demostrado.

Ahora mostremos que si el grado $\deg x_k$ es par, entonces $x_k^s \neq 0$ para cualquier s. Realmente, si ya está demostrado, que $x_k^{s-1} \neq 0$, entonces, en la expresión $\lambda(x_k^s)$ se incluyen términos de la forma $C_s^i x_k^i \otimes x_k^{s-i}$, distintos de cero, para $0 < i < s$. Estos términos son independientes y no pueden abreviarse junto con los demás sumandos en $\lambda(x_k^s)$ (verifíquese).

Así,hemos demostrado que para el sistema minimal de generatrices en el álgebra de Hopf H no hay otras relaciones, excepto la anticonmutatividad. Las generatrices de dimensión par engendran en H una subálgebra de polinomios $\mathbb{R}[x_1', x_2', \ldots]$; las impares a una subálgebra exterior $\Lambda[x_1'', x_2'', \ldots]$. Toda el álgebra H, evidentemente, es su producto tensorial. El teorema está demostrado.

Indiquemos otros ejemplos de H-espacios.

EJEMPLO 1. Si K es un complejo, entonces es posible definir un espacio de curvas $\Omega(K, x_0) = X$, que comienzan y terminan en un punto x_0 (véase [1], parte II, § 22). Aquí se tiene la multiplicación de curvas, una unidad homotópica x_0. Es más, esta multiplicación es «asociativa homotópicamente» y tiene un «elemento homotópicamente inverso» $x \to \bar{x}$;

a) aplicaciones $(x \circ y) \circ z$: $X \times X \times X \to X$ y $x \circ (y \circ z)$: $X \times X \times X \to X$ son homotópicas; b) aplicación $x \to x \circ \bar{x}$: $X \to X$ es homotópica a una aplicación constante $X \to x_0$.

EJEMPLO 2. Además de los grupos de Lie, la ley de multiplicación con unidad se puede introducir sobre una esfera hepta-dimensional S^7, partiendo de los llamados números de Caley: un espacio $\mathbb{R}^8$ es un álgebra con división (pero no asociativa). La multiplicación bilineal se da así: si (q_1, q_2) es un par de cuaternios, (q_1', q_2') es otro par, entonces, supongamos

$$(q_1, q_2)\cdot(q_1', q_2') = (q_1q_1' - \bar{q}_2'q_2,\ q_2'q_1 + q_2\bar{q}_1'),$$
$$(q_1, q_2)^{-1} = \frac{(\bar{q}_1, -q_2)}{|q_1|^2 + |q_2|^2}.$$

Además de los grupos de Lie G y los productos $G \times S^7 \times \ldots \times S^7$ no son conocidos otros ejemplos de los H-espacios simplemente conexos de dimensión finita. Por ejemplo, si se tiene una multiplicación en la esfera S^{n-1} con unidad $x \in S^{n-1}$, entonces tenemos una aplicación de multiplicación:

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\psi} S^{n-1}, \quad (x, y) \to x \bigcirc y.$$

Sucesivamente,

$$S^{2n-1} = (D^n \times S^{n-1}) \cup (S^{n-1} \times D^n)$$

(la pegadura por una frontera común $S^{n-1} \times S^{n-1}$). La aplicación ψ es posible prolongarla hasta la aplicación

$$f(\psi): S^{2n-1} = (D^n \times S^{n-1}) \cup (S^{n-1} \times D^n) \to S^n,$$

donde S^{n-1} es un ecuador en S^n (efectúe esta operación).

Consideremos un complejo

$$K_n = S^n \cup_{f(\psi)} D^{2n}$$

con células σ^0, σ^n, σ^{2n}. Por eso

$$H^j(K_n) = \begin{cases} 0, & j \neq 0,\ n,\ 2n, \\ \mathbb{Z}, & j = 0,\ n,\ 2n. \end{cases}$$

Sean $u_n \in H^n(K_n, \mathbb{Z}_2)$, $u_{2n} \in H^{2n}(K_{2n})$, clases básicas de cohomologías (mod 2).

PROBLEMA 7. Mostrar, que $u_n^2 = u_{2n}$, si la multiplicación tiene unidad, o sea, $\psi: S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ tiene el grado $+1$ en cada factor.

Conocemos ejemplos de multiplicación sobre las esferas S^{n-1} para $n = 1, 2, 4, 8$ (números reales $\mathbb{R}$, complejos $\mathbb{C}$, cuaternios $\mathbb{H}$ y números de Caley $\mathbb{K}$). Se tiene un teorema difícil (Adams) de que para otros $n \neq 1, 2, 4, 8$ tales complejos K_n no existen y ($K_1 = \mathbb{R}P^2$, $K_2 = \mathbb{C}P^2$, $K_4 = \mathbb{H}P^2$, $K_8 = \mathbb{K}P^2$).

Demos un empleo más de la multiplicación cohomológica. Demostremos, que un grupo $\pi_{2n-1}(S^n)$ es infinito para n pares.

Consideremos $S^n \times S^n$, donde n es par. En el anillo $H^*(S^n \times \times S^n)$ escogemos una base 1, $1 \otimes u$, $u \otimes 1$, $u \otimes u$, donde $u \in \in H^n(S^n)$ es un elemento básico. Consideremos una aplicación de un ramo φ:

$$S^n \vee S^n \subset S^n \times S^n, \quad S^n \vee S^n = (S^n \times x_0) \cup (x_0 \times S^n),$$
$$\varphi: S^n \vee S^n \to S^n$$

de grado λ en el primer sumando y de grado μ en el segundo.

Tenemos $\varphi^*(u) = \lambda(u \otimes 1) + (1 \otimes u)\mu$.

Como $u^2 \neq 0$, obtenemos, que con μ, $\lambda \neq 0$ la aplicación φ no se prolonga hasta la aplicación $\hat{\varphi}$: $S^n \times S^n \to S^n$, ya que de la condición $u^2 = 0$ se deduciría $\hat{\varphi}^*(u^2) = 0$. Pero $\hat{\varphi}^*(u^2) = 2\lambda\mu u \otimes \otimes u \neq 0$. La partición celular $S^n \times S^n$ es la siguiente:

$$S^n \times S^n = (\sigma^0 \cup \sigma^n \cup \sigma^n \cup \sigma^{2n}) = (S^n \vee S^n) \cup D^{2n}.$$

La aplicación $S^{2n-1} = \partial D^{2n} \to S^n \vee S^n \xrightarrow{\varphi} S^n$ no es homotópica a cero con cualesquiera μ, $\lambda \neq 0$, ya que, de otra forma, la aplicación se prolongaría sobre un disco D^{2n} y, de este modo, sobre todos los $S^n \times S^n$.

PROBLEMA 8. Demostrar, que el número $\lambda\mu$ es un invariante aditivo de una clase homotópica de una aplicación construida $S^{2n-1} \to \to S^n$ para cualesquiera n pares.

PROBLEMA 9. Construir una aplicación $\psi: S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ para cualesquiera n pares con $\lambda = 2$, $\mu = -1$.

PROBLEMA 10. Sea $S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n$ es correcto en los puntos x_0, $x_1 \in S^n$ (véase [1], parte II, § 10) y $M_1^{n-1} = f^{-1}(x_0)$, $M_2^{n-1} = f^{-1}(x_1)$ son subvariedades cerradas. Sea $\{M_1^{n-1}, M_2^{n-1}\}$ su coeficiente de enganche (véase [1], parte II, § 15) *). Supongamos

$$\gamma = \{M_1^{n-1}, M_2^{n-1}\}.$$

Demostrar, que para las aplicaciones arriba construidas $f = = f(\varphi)$ tiene lugar la igualdad $\gamma = 2\lambda\mu$.

Demostrar, que para un complejo $K = S^n \cup D^{2n}$, donde la pegadura está hecha por la aplicación f: $S^{2n-1} \to S^n$, tenemos $u_n^2 = \gamma u_{2n}$ en el anillo $H^*(K, \mathbb{Z})$.

PROBLEMA 11. Demostrar, que para cualquier espacio fibrado suave

$$S^{2n-1} \xrightarrow{p} S^n$$

el coeficiente $\gamma = \pm 1$.

---

*) El coeficiente de enganche en [1] fue definido sólo para las curvas cerradas en $\mathbb{R}^3$. Pero de modo análogo se define un coeficiente de enganche para las subvariedades M_1^k, M_2^k en $\mathbb{R}^{2k+1}$ (o en S^{2k+1}) como un índice de intersección de una de ellas con una película, que está tendida sobre la otra.

§ 8. Homologías de productos oblicuos (espacios fibrados)

La relación de las homologías de fibra, base y espacio para los espacios fibrados es inconmensurablemente más compleja que para un producto directo. Consideremos los coeficientes como un campo, sin mencionarlo en adelante. Supongamos que se tiene un espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$ con una fibra F, donde todos los E, B, F son complejos celulares o son homotópicamente equivalentes a ellos. La partición celular del espacio E ya fue indicado más arriba (§ 7):

si σ_F^j son células de la fibra F y σ_B^q son células de base, entonces, una preimagen $p^{-1}(\sigma_B^q)$ es un producto directo $\sigma_B^q \times F$, y tenemos las células en E

$$\sigma_E^{j+q} = \sigma_B^q \times \sigma_F^j.$$

De manera que una partición celular formalmente es la misma, que en un producto directo. Pero el operador de frontera está arreglado con mayor complejidad. Ya hemos dado un ejemplo (véase § 4) de un espacio de elementos lineales hacia una superficie de género g, donde son evidentes estas complejidades. Vamos a enumerar las propiedades simples del operador de frontera en E.

1) Si σ_B^0 es un vértice en la base, entonces para las células $\sigma_E^j = \sigma_B^0 \times \sigma_F^j$ tenemos una igualdad evidente:

$$\partial\sigma_E^j = \sigma_B^0 \times (\partial\sigma_F^j).$$

2) Si $\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times \sigma_F^j$, entonces, la frontera es de forma

$$\partial\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial\sigma_F^j) + \Delta, \tag{1}$$

donde Δ son células de una preimagen entera $p^{-1}(\overline{\partial\sigma_B^q})$, además, bajo $\overline{\partial\sigma_B^q}$ se entiende la clausura topológica de la imagen de la esfera S^{q-1} que es la frontera $\partial\sigma_B^q$ en la base B. En todo caso, $\Delta \subset p^{-1}(B^{q-1})$, donde B^{q-1} es un armazón de la base de dimensión $q-1$.

PROBLEMA 1. Sea que la base B simplemente conexa, tiene un vértice σ_B^0 y no tenga células de dimensión 1. Entonces, es correcta la fórmula

$$\partial\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial\sigma_F^j) + (-1)^j (\partial\sigma_B^q) \times \sigma_F^j + \Delta_1, \tag{2}$$

donde $\Delta_1 \subset p^{-1}(B^{q-2})$.

Vamos a suponer en adelante, que se consideran los espacios fibrados $E \xrightarrow{F} B$, donde es correcta la fórmula (2). Por ejemplo, esta fórmula es correcta, evidentemente, en el caso cuando la base no tiene células de dimensión $q-1$. Esto es correcto para $B = S^n$ $(n > 1)$, $B = \mathbb{C}P^n$, $B = \mathbb{H}P^n$, y también, si B es una varie-

dad compleja de Grassmann, ramo de esferas, producto directo de esferas y una serie de otros.

OBSERVACIÓN. **En realidad, los razonamientos que hacemos y las deducciones que se formulan serán correctos (después de algunas complicaciones) en un caso más general: un grupo $\pi_1(B)$ debe actuar trivialmente en los grupos $H_*(F)$.** Para los espacios fibrados de elementos lineales esto significa, por ejemplo, que la base es una variedad orientable (la fibra es una esfera). Si la fibra es una esfera, entonces esta condición siempre será cumplida para $H_*(F, \mathbb{Z}_2)$ sin depender de la orientabilidad de la base y del espacio fibrado, ya que $H_*(S^n, \mathbb{Z}_2)$ nunca tiene automorfismos no triviales. Las correcciones surgidas en el caso cuando $\pi_1(B)$ actúa no trivialmente en $H_*(F)$, serán indicadas en el § 11 (más abajo).

Así, estudiamos una clase de espacios fibrados para los cuales es correcta la fórmula (2).

Desarrollemos en serie la frontera respecto a los armazones de base:

$$\partial\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial\sigma_F^j) + (-1)^j (\partial\sigma_B^q) \times \sigma_F^j + \partial_2 + \partial_3 + \ldots,$$

donde $\partial_k = \sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_{B,\alpha}^{q-k} \times \sigma_{F,\alpha}^{j+k-1}$, ($\lambda_\alpha$ son números) se compone de productos de células $(q-k)$-dimensionales de base por células $(j+k-1)$-dimensionales de fibra. Por definición, tenemos:

$$\partial\sigma_E^{q+j} = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2 + \ldots,$$
$$\partial_0 = \sigma_B^q \times (\partial\sigma_F^j), \quad \partial_1 = \pm(\partial\sigma_B^q) \times \sigma_F^j.$$

Para un complejo de cadenas tenemos

$$C_n(E) = \sum_{q+j=n} C_q(B) \otimes C_j(F).$$

El operador de frontera es de forma

$$\partial_E(a \otimes b) = a \otimes \partial_F b \pm (\partial_B a) \otimes b + \partial_2(a \otimes b) + \ldots, \qquad (3)$$

donde

$$\partial_k(a \otimes b) \in C_{q-k}(B) \otimes C_{j+k-1}(F)$$

para $a \in C_q(B)$, $b \in C_j(F)$.

Prestemos atención a que los operadores ∂_0 y ∂_1 son los mismos que en el producto directo $E_0 = B \times F$. Los operadores ∂_k con $k \geqslant 2$ en el producto directo son iguales a cero. Ellos caracterizan los grados de «deformación» del operador de frontera en un complejo $C(E)$ en comparación con el producto directo $E_0 = B \times F$.

Para estudiar las homologías $H_*(E)$ se utiliza el «método de cernido» o «método de aproximaciones sucesivas» sucesivamente por

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (llamado sucesión espectral de Leray). La esencia de este método consiste en lo siguiente:

PASO 0. Puesto que $\partial_0^2 = 0$, podemos calcular «homologías de aproximación nula» respecto sólo a este «operador de frontera en aproximación nula» ∂_0. Obtenemos:

$$H_n(C(E), \partial_0) = \sum_{q+j=n} C_q(B) \otimes H_j(F) = \sum_{j+q=n} E^{(1)}_{q,j}.$$

De este modo, $H_n(C, d_0)$ son cadenas en la base B con valor en las homologías de fibra F: $E^{(1)}_{p,j} = C_q(B, H_j(F))$.

PASO 1. En los d_0-ciclos por módulo de fronteras $\operatorname{Im} d_0$ (o sea, en los grupos $H_*(C, d_0)$) está determinado correctamente el operador d_1, que tiene la propiedad $d_1^2 = 0$. Tenemos un complejo

$$E^{(1)} = \sum E^{(1)}_{q,j}, \quad d_1 : E^{(1)}_{q,j} \to E^{(1)}_{q-1,j}.$$

En nuestras hipótesis las homologías en una primera aproximación, es decir para un complejo $(E^{(1)}, d_1)$, coinciden con las homologías del producto directo (véanse las formas ∂_0 y ∂_1):

$$H_n(E^{(1)}, d_1) = \sum_{q+j=n} H_q(B, H_j(F)) =$$
$$= \sum H_q(B) \otimes H_j(F) = H_*(B \otimes F).$$

El operador d_1 es un operador de frontera en las cadenas en la base B con coeficientes en $H_*(F)$.

Se tiene una descomposición directa evidente

$$H_n(E^{(1)}, d_1) = \sum_{q+j=n} H_q(B) \otimes H_j(F),$$

donde los sumandos están representados por los d_1-ciclos $z \in E^{(1)}_{q,j} = C_q(B, H_j(F))$ con exactitud hasta las d_1-fronteras $\operatorname{Im} d_1$. Los grupos de d-homologías $H_n(E^{(1)}, d_1)$ se designan por

$$E^{(2)}_n = \sum_{q+j=n} E^{(2)}_{q,j} = \sum H_q(B) \otimes H_j(F) = H_n(B \otimes F).$$

Para un producto directo $E_0 = B \times F$ todo el procedimiento se termina aquí. Para un producto oblicuo aparecen los siguientes pasos, que utilizan $\partial_2, \partial_3, \ldots$

PASO 2. El operador ∂_2 engendra un operador de frontera d_2 en las homologías de la «primera aproximación» $E^{(2)} = H_*(E^{(1)}, d_1)$ y tiene la propiedad $\partial_2^2 = 0$. Aparecen las homologías de «segunda aproximación»

$$E^{(3)}_n = H_n(E^{(2)}, d_2) = \sum_{q+j=n} H_{q,j}(E^{(2)}, d_2),$$
$$E^{(3)} = \sum_{n \geqslant 0} E^{(3)}_n, \quad E^{(3)}_n = \sum_{q+j=n} E^{(3)}_{q,j}.$$

Tenemos

$$d_2 : E^{(2)}_{q,j} \to E^{(2)}_{q-2,\,j+1}, \quad E^{(2)}_{q,j} = H_q(B) \otimes H_j(F).$$

Los elementos de los grupos $E^{(3)}_{q,j} = H_{q,j}(E^{(2)}, d_2)$ están representados por los elementos (d_2-ciclos) $z \in E^{(2)}_{q,j} = H_q(B) \otimes H_j(F)$ con exactitud hasta las d_2-fronteras.

Esta sucesión de "cernidos" se prolonga en adelante: aparecen complejos $E^{(r)} = \sum E^{(r)}_{q,j}$ con un operador de frontera

$$d_r : E^{(r)}_{q,j} \to E^{(r)}_{q-r,\,j+r-1} \quad \text{y} \quad E^{(r+1)} = \sum E^{(r+1)}_{q,j} = H_*(E^{(r)}, d_r).$$

Es obvio, que todos los grupos $E^{(r)}_{q,j}$ con $q < 0$ o con $j < 0$ son iguales a cero para todos los $r \geqslant 0$. Por eso el operador $d_r \equiv 0$ en los grupos $E^{(r)}_{q,j}$, si $q < r$. En este caso tenemos

$$E^{(r)}_{q,j} = E^{(r+1)}_{q,j} \equiv E^{(r+2)}_{q,j} \equiv \ldots \equiv E^{(\infty)}_{q,j}, \quad q < r.$$

Estos grupos se designan por $E^{(\infty)}_{q,j}$.

Teorema (de Leray) *).

1) *Todas las diferenciales d_r están definidas correctamente y $d_r^2 \equiv 0$.*

2) *La suma directa $E^{(\infty)}_n = \sum_{q+j=n} E^{(\infty)}_{q,j}$ es isomorfa al grupo $H_n(E)$ para un campo de coeficientes.*

3) *Los grupos $E^{(2)}_{q,j}$ son isomorfos a los grupos $H_q(B) \otimes H_j(F)$.*

Así, como resultado de «pasar por estos filtros» hemos obtenido los ciclos en un espacio E (como núcleos de todos los homomorfismos d_r por el módulo de las imágenes precedentes), con exactitud hasta las fronteras.

COROLARIO. *En un producto oblicuo los rangos de grupos de homologías, hablando en general, son menores, que en el directo (o sea, los números de Betti $b_k(E) \leqslant b_k(E_0)$ para todos los k, $E_0 = B \times F$). Esto se deduce del hecho de que ya $E^{(2)}_n = H_n(E_0)$; después se realiza «el filtrado» de una parte de los ciclos mediante los operadores $d_2, d_3, \ldots$, escogiendo sólo sus núcleos (d_r-ciclos), factorizando por d_r-fronteras, pasando después a d_{r+1}, etc.*

Damos la definición de los operadores d_2 en los grupos $E^{(2)}_{q,j}$. Como $\partial_E = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2 + \ldots$ y $\partial_E \partial_E \equiv 0$, obtenemos la igualdad

$$0 = \partial_E^2 = \partial_0^2 + (\partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0) + (\partial_1^2 + \partial_0\partial_2 + \partial_2\partial_0) + \\ + (\partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_1 + \partial_0\partial_3 + \partial_3\partial_0) + \\ + (\partial_2^2 + \partial_3\partial_1 + \partial_1\partial_3 + \partial_0\partial_4 + \partial_4\partial_0) + \ldots \quad (4)$$

*) De todos los materiales utilizados en este libro, este teorema nos da un primer caso importante, cuando es imposible la demostración sin recurrir al lenguaje riguroso del álgebra homológica.

Aplicando la igualdad general (4) a los grupos $C_{q,j}(E)$ por separado, obtendremos una cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_0^2\colon C_{q,j} \to C_{q,j-2},\\
0 &= \partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0\colon C_{q,j} \to C_{q-1,j-1},\\
0 &= \partial_1^2 + \partial_0\partial_2 + \partial_2\partial_0\colon C_{q,j} \to C_{q-2,j},\\
0 &= \partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_1 + \partial_0\partial_3 + \partial_3\partial_0,\\
0 &= \partial_2^2 + \partial_1\partial_3 + \partial_3\partial_1 + \partial_0\partial_4 + \partial_4\partial_0.
\end{aligned} \tag{5}$$

1) Consideremos un operador ∂_1 en d_0-ciclos ($\partial_0 = \partial_0$) mod d_0-fronteras, es decir, en las d_0-homologías $E_{q,j}^{(2)}$.

Si $\partial_0 x = 0$, entonces tenemos

$$\partial_1 (x + \partial_0 \bar{x}) = \partial_1 x + \partial_1\partial_0 \bar{x} = \partial_1 x - \partial_0 (\partial_1 x).$$

De esta manera, d_1 está definido correctamente en d_0-ciclos mod d_0-fronteras. Por consiguiente, tenemos de (5)

$$\partial_1^2 x = -\partial_0\partial_2 x - \partial_2\partial_0 x = -\partial_0\partial_2 x,$$

ya que $\partial_0 x = 0$. Por eso obtenemos

$$\partial_1^2 x \equiv 0 \bmod (\operatorname{Im} d_0), \quad d_1^2 \equiv 0 \quad \text{en} \quad E_*^{(1)}.$$

Así, d_1 está definido correctamente, y $d_1^2 = 0$ en los grupos $H_*(E^{(0)}, d_0)$.

2) Construir un operador d_2 en los grupos $H_*(E^{(1)}, d_1) = E^{(2)}$. Consideremos en las cadenas $C_*(E)$ un representante x de un elemento de $E_{q,j}^{(2)}$ tal, que

$$\partial_0 x = 0, \quad \partial_1 x = 0 \bmod (\operatorname{Im} \partial_0)$$

ora

$$\partial_1 x = \partial_0 y \tag{6}$$

La cadena $\partial_2 x$ puede no tener la propiedad (6). Tenemos

$$\partial_0\partial_2 x = -\partial_2\partial_0 x - \partial_1\partial_1 x = -\partial_1\partial_0 y = \partial_0\partial_1 y,$$

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_2 x &= -\partial_2\partial_1 x - \partial_0\partial_3 x - \partial_3\partial_0 x =\\
&= -\partial_2\partial_0 y + \operatorname{Im} \partial_0 = \partial_0\partial_2 y + \partial_1^2 y + \operatorname{Im} \partial_0
\end{aligned} \tag{7}$$

($\partial_3\partial_0 x = 0$). De las correlaciones (7) se deduce, que un elemento

$$\partial_2 x - \partial_1 y = d_2 x$$

ya satisface las condiciones (6). Así obtenemos:

$$d_2 x = \partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x + [\operatorname{Im} \partial_0 + \partial_1 (\operatorname{Ker} \partial_0)].$$

Con esto

$$\partial_1\partial_2 x = \partial_0 (\partial_2 y - \partial_3 x).$$

Corrección de la definición de d_2x:

que $x \to x + \partial_0 z + \partial_1 v = \tilde{x}$ $(\partial_0 v = 0)$; entonces

$$\partial_2\tilde{x} - \partial_1^{-1}\partial_0\partial_1^{-1}\tilde{x} = \partial_2 x + \partial_2\partial_0 z + \partial_2\partial_1 v =$$
$$= (\partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x) - \partial_0\partial_2 z - \partial_1^2 z - \partial_1^2\partial_2 v -$$
$$- \partial_0\partial_3 v - \partial_3\partial_0 v + \partial_1^2 z + \partial_1 (\partial_0^{-1}\partial_0\partial_2 v + \partial_0^{-1}\partial_2\partial_0 v) =$$
$$= (\partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x) + \operatorname{Im} \partial_0 + \partial_2 (\operatorname{Ker} \partial_0)$$

$(\partial_3\partial_0 v = \partial_0\partial_0^{-1}\partial_2\partial_0 v = 0)$. De manera que d_2 está definido correctamente en $E^{(2)}_{q,j}$. Verifiquemos la igualdad $d_2 d_2 = 0$ en $E^{(2)}_{q,j}$. Si $\partial_0 x = 0$, $\partial_0 y = \partial_1 x$, entonces tenemos

$$d_2 x = \partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x,$$
$$d^2_2 x = \partial_2 (\partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_2 x) = \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 (\partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x) =$$
$$= -\partial_0\partial_4 x - \partial_4\partial_0 x - \partial_1\partial_3 x - \partial_3\partial_0 y - \partial_2\partial_1 y - \partial_1 (\partial_2 y - \partial_3 x) =$$
$$= -\partial_0 (\partial_4 x + \partial_3 y) = \operatorname{Im} \partial_0$$

$(\partial_4\partial_0 x = 0)$. De este modo, el operador $d_2 = \partial_2 - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1$ está definido correctamente en los grupos $E^{(2)}_{q,j}$ y tiene la propiedad $d_2 d_2 = 0$.

3) El operador d_3 en los grupos $E^{(3)}_{q,j} = H_{q,j} (E^{(2)}, d_2)$ se define de la misma manera, partiendo del operador ∂_3 en tales cadenas $x \ni C_{q,j} (E)$, donde $\partial_0 x = 0$, $\partial_1 x = \partial_0 y$, $\partial_2 x - \partial_1 y = \partial_0 z + \partial_1 w$ y donde $\partial_0 w = 0$ (d_2-ciclos), con exactitud hasta la unificación de las imágenes d_i, $i \leqslant 2$, de las fronteras de todos los anteriores operadores d_i. Sin calcular, apuntamos que todos los operadores d_r pueden ser definidos correctamente, corrigiendo el operador ∂_r, que actúa de $C_{q,j}$ en $C_{q-r,j+r-1}$, en las adiciones de las imágenes $\partial_0, \partial_1, \ldots \partial_{r-1}$, por analogía con d_2. Con esto tendremos $d_r d_r = 0$ y d_r: $E^{(r)}_{q,j} \to E^{(r)}_{q-r,j+r-1}$ por definición. No nos importa la forma exacta del operador d_r.

Aclaremos la idea de demostración del teorema de Leray (dado más arriba) para un caso particular, cuando todos los ∂_i con $i \geqslant 3$ son triviales. Aquí se puede verificar todo hasta el fin sin recurrir al lenguaje del álgebra homológica, mediante cálculo directo. Ya se ha comprobado la corrección del operador d_2. Hay que demostrar que las homologías $H_* (E^{(2)}, d_2) = H^{(3)}_* = E^\infty_*$ coincidirán con las homologías $H_* (E)$ sobre un campo de coeficientes.

Sea x un elemento de $H_n (E)$, representado por un ciclo que es la cadena $\bar{x} \in C_n (E) = \sum_{q+j=n} C_{q,j} (E)$. Llamaremos «filtración» del elemento $x \in H_* (E)$ a tal número minimal q, que x puede ser realizado por un ciclo $\bar{x}$ de una preimagen completa $p^{-1} (B^q)$ de un arma-

zón q-dimensional de base y no puede ser realizado por una cadena de $p^{-1}(B^{q-1})$:

$$\bar{x} = x_q + x_{q-1} + \ldots + x_0 = x_q + \Delta, \quad \Delta \in p^{-1}(B^{q-1}),$$

donde

$$x_q \in C_{q,j}, \quad x_{q-1} \in C_{q-1,j+1}, \ \ldots, \ x_0 \in C_{0,n}.$$

Como $\partial_E \bar{x} = 0$, tenemos la $(\partial_E = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2)$ descomposición de $\partial_E x$ respecto a los grupos $C_{q,j}$:

$$\partial_E \bar{x} = \partial_0 x_q + (\partial_1 x_q + \partial_0 x_{q-1}) + \\ + (\partial_2 x_q + \partial_1 x_{q-1} + \partial_0 x_{q-2}) + \\ + (\partial_2 x_{q-1} + \partial_1 x_{q-2} + \partial_0 x_{q-3}) + \ldots = 0.$$

De la condición $\partial_E \bar{x} = 0$ nos queda

$$\partial_0 x_q = 0, \ \partial_1 x_q = -\partial_0 x_{q-1}, \ \partial_2 x_q = -\partial_1 x_{q-1} - \partial_0 x_{q-2}.$$

De aquí deducimos, que la cadena x_q es un ciclo de las diferenciales d_0, d_1, d_2, ya que

$$d_0 = \partial_0 (x_q) = 0, \quad d_1 = \partial_1 (x_q) = -\partial_0 (x_{q-1}),$$
$$d_2 x_q = \partial_2 x_q - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x_q = \partial_2 x_q + \partial_1 x_{q-1} = -\partial_0 x_{q-2}.$$

Así, al ciclo x de la filtración q le corresponde la cadena $x_q \in C_{q,j}(E)$, que define el ciclo de todas las diferenciales d_r, $r = 0, 1, 2, \ldots$ Por eso x_q queda en los grupos $E^{(\infty)}_{q,j}$ (en nuestro caso $E^{(\infty)} = E^{(3)}$). Mostremos, que x_q no es frontera de ninguna de las diferenciales d_r $(r = 0, 1, 2)$, y por lo tanto, da un elemento no nulo en $E^{(\infty)}_{q,j}$. Si $x_q = \partial_0 z = d_0 z$ para $z \in C_{q,j+1}(E)$, entonces la filtración del elemento $\tilde{x} = x - \partial_E z$ es menor que q, ya que

$$\tilde{x} = (x_q - \partial_0 z) + (x_{q-1} - \partial_1 z) + \ldots,$$

además, $x_{q-1} - \partial_0 z = 0$. Por eso $x_q \neq \partial_0 z$, ya que, por condición, q es minimal, y el ciclo x no es posible sacarlo del armazón B^q. Sea $x_q = d_1 v$, donde $\partial_0 v = 0$ y $v \in C_{q+1,j}$. Se verifica fácilmente, que un ciclo $x - \partial_E v$ tendría filtración $< q$. Por eso $x_q \neq d_1$ (Ker d_0). Luego, si $x_q = d_2 w = \partial_2 w - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 w$ para $w \in C_{q+2,j-1}$ (donde $\partial_0 w = 0$, $\partial_2 w = \partial_0 u$), entonces, sacamos $\tilde{x}$ del armazón q-dimensional $\tilde{x} \to \bar{x} - \partial_E w$. Esta contradicción muestra, que el ciclo de todas las diferenciales $x_q \in C_{q,j}(E)$ pasa a ser $E^{(\infty)}_{q,j}$ y es distinta de cero en $E^{(\infty)}_{q,j}$, si la filtración de la clase de homologías $x \in H_{q+j}(E)$ es exactamente q.

Tenemos el encaje

$$H_n(E) \to \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}.$$

Por el contrario, que se dé un ciclo de todas las diferenciales d_r: $x_q \in C_{q,j}(E)$, no igual a cero en $E_{q,j}^{(\infty)}$. Conocimos lo siguiente (que todos los $\partial_i = 0$ con $i \geqslant 3$):

$$\partial_0 x_q = 0, \quad \partial_1 x_q = \partial_0 y,$$
$$\partial_2 x_q - \partial_1 y = \partial_0 z + \partial_1 w, \quad \partial_0 w = 0,$$
$$z \in C_{q-2, j+2}, \quad y \in C_{q-1, j+1}, \quad w \in C_{q-1, j+1}.$$

Tomemos

$$\tilde{x} = x_q + x_{q-1} + x_{q-2} + x_{q-3} + \ldots,$$

donde $x_{q-1} = -(y + w)$, $x_{q-2} = -z$,

$$\partial_E \tilde{x} = \partial_0 x_q + (\partial_1 x_q - \partial_0 y - \partial_0 w) + \\ + (\partial_2 x_q - \partial_0 z - \partial_1 y - \partial_1 w) + \Delta = \Delta,$$

donde $\Delta \in p^{-1}(B^{q-3})$. Cambiando al representante x_q, y también a y, w, z, obtenemos, en virtud de las relaciones (4) y (5), un ciclo $\tilde{\tilde{x}}$ de filtración q, con la condición de que $\partial_i \equiv 0$, $i \geqslant 3$.

Así, cada elemento de los grupos $E_n^{(\infty)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}$ representa un elemento de $H_n(E)$.

Complementos (sin demostración)

1) Los elementos de filtración $q = 0$ siempre son ciclos de todos los d_r, $r \geqslant 1$; los grupos $E_{0,n}^{(1)}$ son isomorfos a $H_n(E)$. Los grupos $E_{0,n}^{(\infty)}$ son grupos cocientes; el homomorfismo $H_n(F) \to E_{0,n}^{(\infty)} \subset H_n(E)$ coincide con el homomorfismo de encaje de fibra i: $F \to E$.

2) Los elementos de filtración n ($j = 0$) no pueden ser fronteras; aquí $E_{n,0}^{(2)} = H_n(B)$ y $E_{n,0}^{(\infty)} \subset H_n(B)$.

El homomorfismo de proyección en un sumando $j = 0$

$$\sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)} = H_n(E) \to E_{n,0}^{(\infty)} \subset H_n(B)$$

coincide con la proyección en la base

$$p_*: H_n(E) \to H_n(B).$$

3) Para las cohomologías todo es análogo: se tiene una sucesión $(E_r^{q,j}, \delta_r)$, donde

a) $\delta_r : E_r^{q,j} \to E_r^{q+r, j-r+1}$, $\delta_r\delta_r = 0$, $E_{r+1}^* = H^*(E_r, \delta_r)$;

b) $\sum_{q+j=n} E_2^{q,j} = H^n(B \times F) = \sum H^q(B) \otimes H^j(F)$;

c) $\sum_{q, j} E_\infty^{q, j} = H^*(E)$ (como un grupo);

d) todos los grupos E_r^* y los operadores δ_r son conjugados con $(E_*^{(r)}, d_r)$ en las homologías. Pero aquí se tienen una nueva propiedad importante:

e) todos los $E_r^* = \sum E_r^{q, j}$ son anillos anticonmutativos, además, $H^*(B \times F) = E_2^*$ como un anillo; si $\alpha \in E^{q, j}$, $\beta \in E^{\bar{q}, \bar{j}}$ entonces, $\alpha\beta \in E^{q+\bar{q}, j+\bar{j}}$, $\alpha\beta = (-1)^{(q+j)(\bar{q}+\bar{j})}\beta\alpha$: para δ_r tiene lugar la fórmula de Leibniz

$$\delta_r(\alpha\beta) = (\delta_r\alpha)\beta \pm \alpha(\delta_r\beta)$$

(notemos, que el anillo E_∞^* no es isomorfo al anillo $H^*(E)$, hablando en general; la excepción es un caso, cuando E_∞^* es un álgebra libre anticonmutativa; entonces, esto es justo también para $H^*(E)$).

Estos hechos no los demostraremos, aunque los utilizaremos (en especial, el e)) más abajo, en los cálculos.

Consideremos algunos ejemplos de la aplicación del teorema de Leray. Como será visto, la construcción de los operadores d_r, $r \geqslant 2$, no tiene importancia alguna en los cálculos, son importantes sólo sus propiedades formales.

EJEMPLO 1. Sea $E = S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n = B$ con fibra $F = S^1$ un espacio fibrado estándar (véase [1], parte II, § 24). Calculemos un anillo $H^*(\mathbb{C}P^n)$, utilizando información sobre $H^*(S^1)$ y $H^*(S^{2n+1})$ y condición $\pi_1(B) = 0$.

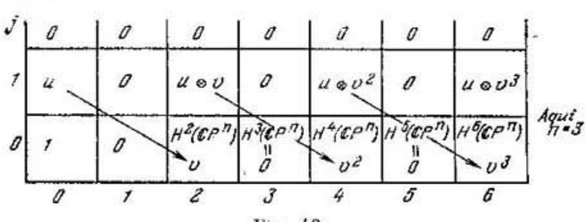


Fig. 43.

En el término $E_2^* = H^*(B) \otimes H^*(F)$, véase la fig. 43 (todas las células no nulas de $E_2^{q,j}$ las tenemos para $j = 0, 1$). Aquí $H^*(S^1) = \Lambda[u]$, $u^2 = 0$, $\deg u = 1$ y $H^*(B)$ es incógnita, salvo la condición $\pi_1 = 0$. Los grupos $E_2^{q,j}$ son no triviales sólo cuando $j = 0, 1$. Por eso sólo $\delta_2 \neq 0$; cuando $i \geqslant 3$ todos los $\delta_i = 0$ por razonamientos de dimensión, puesto que $\delta_r E_r^{q,j} \subset E_r^{q+r, j-r+1}$. Los grupos $E_r^{q,0}$ son ciclos de todos los δ_r, $r \geqslant 2$. El elemento $\delta_2(u) \in H^2(\mathbb{C}P^n) = E_2^{2,0}$ engendra un grupo $H^2(\mathbb{C}P^n)$; de otro

modo, tendríamos $H^1(E) = H^1(S^1) \neq 0$, o bien $H^2(E) \neq 0$, lo que es imposible. Sea $v = \delta_2(u) \neq 0$. Para uv tenemos

$$\delta_2(uv) = v^2, \quad \delta_2(uv^k) = v^{k+1}.$$

De la condición $H^i(E) = 0$ con $i \leqslant 2n$, deducimos: $H^{2j+1}(\mathbb{C}P^n) = 0$ $H^{2j}(\mathbb{C}P^n)$ es un espacio unidimensional, engendrado por un elemento v^j para $j \leqslant n$. Aquí utilizamos la estructura circular de la diferencial δ_2 (véase la fig. 43).

EJEMPLO 2. Sea $E \xrightarrow{p} S^n$ un espacio fibrado de Serre con fibra $F = \Omega(S^n, x_0)$ (nudos en la esfera). Aquí E es contraíble y $H_*(E) = 0$. Para la base $B = S^n$ tenemos, que $H_0(S^n)$ y $H_n(S^n)$ son espacios unidimensionales; los demás $H_j(S^n) = 0$, $j \neq 0, n$. Las homologías de la fibra F por ahora son incógnitas.

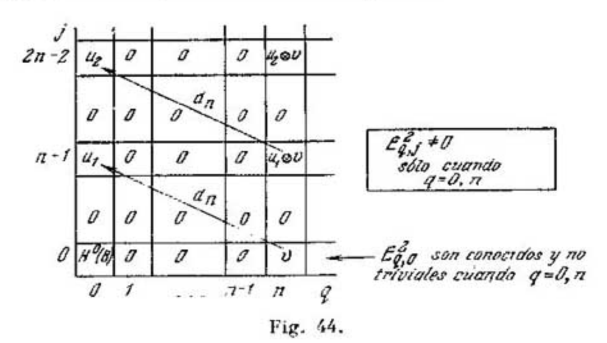


Fig. 44.

En el término $E^{(2)}_{q,j} = H_q(B) \otimes H_j(F)$ (véase la fig. 44) tenemos una diferencial no trivial única

$$\begin{aligned} &d_n : v \to u_1, \\ &d_n : v \otimes u_1 \to u_2, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &d_n : v \otimes u_{k-1} \to u_k. \end{aligned} \tag{8}$$

La forma de diferencial d_n (véase (8)) se obtiene inmediatamente del teorema de Leray junto con condición $H_*(E) = 0$ y una forma de homologías de la base $B = S^n$. Por eso las homologías $H_*(F)$ tienen la forma:

$H_{k(n-1)}(F)$, que es un espacio unidimensional,

$$H_j(F) = 0, \quad j \neq k(n-1).$$

PROBLEMA 2. Demostrar, utilizando la multiplicación cohomológica (los coeficientes, es un campo $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$) que:

a) $H^*(\Omega S^n))$ es un anillo de los polinomios de una generatriz u de dimensión $n-1$, si n es impar;

b) $H^*(\Omega(S^n)) = \wedge[u] \otimes \mathbb{R}[v]$, $\deg u = n-1$, $\deg v = 2n-2$, n es par.

PROBLEMA 3. Demostrar, que si en la tríada de espacios (E, F, B) cualesquiera dos tienen una de las siguientes propiedades, entonces, el tercero también la tiene (se supone, que un espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$ satisface las condiciones del teorema de Leray):

a) los grupos de homologías H_* con coeficientes en algún campo, son iguales a cero;

b) los grupos de homologías H_* tienen un número finito de generatrices en cada dimensión;

c) todos los grupos de homologías con coeficientes enteros son grupos finitos (es decir, las homologías con coeficientes en $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$ son iguales a cero);

d) todos los grupos de homologías con coeficientes enteros son finitos y no tienen elementos de orden p, donde p es un número primo (es decir, las homologías con coeficientes en un campo $\mathbb{Z}_p$ son iguales a cero).

PROBLEMA 4. Estudiar las diferenciales d_r, δ_r en los espacios fibrados:

a) $\mathbb{R}P^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ (la fibra S^1) con coeficientes en los campos $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_p$, $p > 2$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$;

b) $SU(n) \to S^{2n-1}$ (fibra $SU(n-1)$);

c) $SO(n) \to S^{n-1}$ (fibra $SO(n-1)$);

d) $S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$ (fibra S^3);

e) $V_{n,k} \to S^{n-1}$ (fibra $V_{n-1,k-1}$);

f) $V_{n,k}^{\mathbb{C}} \to G_{n,k}^{\mathbb{C}}$ (fibra $U(k)$);

g) $V_{n,k}^{\mathbb{R}} \to G_{n,k}^{\mathbb{R}}$ (fibra $SO(k)$).

Utilice la estructura circular en las cohomologías para los ejemplos b) —g).

PROBLEMA 5. Demostrar los siguientes hechos:

a) Si todas las homologías de un complejo simplemente conexo K son finitas (es decir, si $H_q(K, \mathbb{R}) = 0$ para $q > 0$), entonces, todos los grupos homotópicos son finitos;

b) todos los grupos $\pi_{n+i}(S^n)$ son finitos (excepto $i = 0$ e $i = n-1$, si n es par).

INDICACION. Considere un espacio fibrado de Serre $E \xrightarrow{p} K$ con una fibra $\Omega(K, k_0)$, donde E es contractable. Itere este espacio fibrado. Para estudiar los grupos $\pi_i(K)$ utilice la igualdad $\pi_i(K) = \pi_{i-1}(\Omega(K)) = \ldots$ Para el primer grupo no trivial homotó-

pico utilice la igualdad: si $\pi_q(X) = 0$, $q < i$, entonces $\pi_i(X) = H_i(X, \mathbb{Z})$. Pase al cubrimiento universal, si se encuentra un grupo π_1 (véase el problema 7 más abajo).

Se tiene un procesamiento de «transformación de la aplicación en un espacio fibrado», que conserva tipos homotópicos:

a) si $K \subset L$ es un encaje, entonces se toma un espacio $E(K, L)$ de las curvas (rutas) que se comienzan en K y se terminan donde se quiera en L. Evidentemente, $E(K, L) \sim K$ (se contrae a K). Tenemos una aplicación $(E(K, L) \xrightarrow{p} L$, que confronta a la curva su extremo. Esto es el espacio fibrado de Serre (demuéstrelo);

b) para una aplicación general $K \xrightarrow{f} L$ es necesario considerar un «cilindro» $C_f = (K \times I(0, 1)) \cup_f L$, donde $(x, 1) \cong f(x)$. Es evidente, que $c_f \sim L$. Luego, $C_f \supset K \times 0 = K$. Aplicando al par $(C_f, K \times 0)$ la construcción a), obtendremos un espacio fibrado

$$K \sim E(K, L) \xrightarrow{p} G_f \sim L.$$

Es fácil ver, que p es homotópico a f. Utilizando estas construcciones, resuelva los problemas siguientes.

PROBLEMA 6. Demostrar, que si la aplicación f de los complejos simplemeínte conexos induce un homomorfismo de los grupos de homologías $H_*(K, \mathbb{R}) \cong H_*(L, \mathbb{R})$, entonces, la aplicación f induce un isomorfismo de grupos de homotopías

$$\pi_i K \otimes \mathbb{R} \approx \pi_i(L) \otimes \mathbb{R}.$$

Aplicarlo al caso, cuando $K = S^3 \times S^5 \times \ldots \times S^{2n-1}$ y $L = SU(n)$. Construya la aplicación $K \to L$, utilizando la multiplicación en $SU(n)$.

PROBLEMA 7. Si X es un H-espacio (por ejemplo, $X = \Omega(K)$), entonces para todo $q > 0$ demostrar la igualdad

$$H_q(\hat{X}, \mathbb{R}) = H_q(X, \mathbb{R}),$$

donde $\hat{X}$ es un cubrimiento universal. Sea $D = \pi_1(X)$ y $K(D, 1) = B$ un espacio tal, que $\pi_1(B) = D$ y $\pi_i(B) = 0$, $i > 1$ (véase el § 10 más abajo). Considerar una aplicación $X \xrightarrow{f} B$, $\pi_1(X) \approx \approx \pi_1(B) = D$.

Transformarla en un espacio fibrado. Hallar la fibra.

PROBLEMA 8. Considerar un encaje (inmersión) natural $S^n \vee S^n \to S^n \times S^n$. Transformarla en un espacio fibrado. Hallar las homologías de la fibra F. Hallar los grupos homotópicos $\pi_i(S^n \vee S^n) \otimes \mathbb{R} = ?$

PROBLEMA 9. Sean: X, simplemente conexo, y $H^*(X, \mathbb{R})$, un álgebra libre (anticonmutativa). Hallar los grupos $\pi_i(X) \otimes \mathbb{R}$.

PROBLEMA 10. Sea $\pi_i(X) = 0$ con $i \leq n-1$. Demostrar la igualdad $H_j(X, \mathbb{R}) \cong \pi_j(X) \otimes \mathbb{R}$ para $j < 2n-1$.

§ 9. Problema de prolongación de aplicaciones, homotopías y secciones. Clase obstaculizadora de cohomologías.

A. Planteamos el siguiente problema: sean dados un complejo celular K y su subcomplejo $L \subset K$ (por ejemplo, $L = K^{i-1}$ es un armazón del complejo K). Sea dada una aplicación $L \xrightarrow{f} X$. Para simplificar la parte algebraica, suponemos que X es un espacio simplemente conexo (u homotópicamente simple, tal, que $\pi_1(X)$ es un grupo abeliano y actúa trivialmente en todos los grupos $\pi_i(X)$).

¿Es posible prolongar la aplicación $f: L \to X$ hasta la aplicación $F: K \to X$?

Sea σ^i una célula en K tal, que $\partial\sigma^i \subset L$. En la frontera $\partial\sigma^i$ ya tenemos una aplicación $f: L \to X$. Esta aplicación define un elemento $\alpha(\sigma^i, f) \in \pi_{i-1}(X)$:

$$S^{i-1} \to \partial\sigma^i \xrightarrow{f} X.$$

Es evidente que la aplicación f se puede prolongar en una célula σ^i si, y sólo si, $\alpha(\sigma^i, f) = 0$ en el grupo $\pi_{i-1}(X)$. En particular, siempre es posible prolongarla, si $\pi_{i-1}(X) = 0$. Si $\alpha(\sigma^i, f) \neq 0$, entonces es imposible prolongar la aplicación f en la célula σ^i (α es un «obstáculo»).

En el caso general, habiendo comenzando a prolongar una aplicación con primera dimensión tal, que se tienen células en K, que no se encuentran en L, para un cierto i tropezaremos con un «obstáculo» no trivial.

$$\sigma^i \to \alpha(\sigma^i, f) \in \pi_{i-1}(X).$$

Esto es una cocadena en (K, L) o en un grupo de cocadenas $C^i(K, L, \pi_{i-1}(X))$. Designemos a esta cocadena por α_f.

Tiene lugar el

LEMA 1. *La cocadena α_f es un cociclo.*

DEMOSTRACIÓN Por definición, tenemos: $\delta\alpha_f(\sigma^{i+1}) = \alpha_f(\partial\sigma^{i+1})$. Demostremos que la cocadena α_f se anula en $\partial\sigma^{i+1}$. Recordemos, que $\alpha_f(\sigma^i)$ fue definido por una aplicación $\partial\sigma^i \to X$. Para simplificar, sean K y L complejos simpliciales; entonces, $\partial\sigma^{i+1}$ y $\partial\sigma^i$ son esferas, que se encuentran en K, donde σ^q es un simplex de dimensión q. Surge la siguiente situación universal: para un simplex σ^{i+1} hay una aplicación de su armazón $(i-1)$-dimensional en X ($\pi_1(X) = 0$ o π_1 no actúa en los grupos π_{i-1}). Sea representado $\alpha_j \in \pi_{i-1}(X)$ por una aplicación de la frontera de la cara con el número j: si $\sigma^{i+1} = (0, \ldots, i+1)$, entonces, la cara j-ésima es $(0, 1, \ldots, \hat{j}, \ldots, i+1)$ (el número j está borrado).

PROBLEMA 1. Demostrar la igualdad

$$\sum_{j=0}^{i+1} \alpha_j (-1)^j = 0 \in \pi_{i-1}(X) \qquad (1)$$

para cualquier x.

En efecto, el hecho es que cada cara de dimensión $i - 1$ se incluye dos veces en la suma (1) y, además, con signos opuestos (el grupo $\pi_{i-1}(X)$ es abeliano). Al mismo tiempo, de nuestras condiciones se deduce que el punto inicial en la definición de $\pi_{i-1}(X)$ es insignificante. Por eso α_j es un cociclo.

LEMA 2. *Si $\alpha_f = \delta\beta$ para cierta cocadena $\beta \in C^{i-1}(K, L, \pi_{i-1}(X))$, entonces es posible transformar una aplicación f en un armazón $(i-1)$-dimensional K^{i-1}, no transformándola en un armazón $(i-2)$-dimensional K^{i-2} y en todo el L de tal modo, que para una nueva aplicación f tendrá lugar $\alpha_f \equiv 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Con las condiciones del lema, sustituimos la aplicación f en la célula σ^{i-1} por una nueva aplicación $\tilde{f}: \sigma^{i-1} \to X$, de manera que ellas coinciden en $\partial\sigma^{i-1}$; con esto, un par de aplicaciones $f, \tilde{f}$ de la célula σ^{i-1} definen juntas una aplicación $S^{i-1} \to X$, que da un elemento $-\beta(\sigma^{i-1})$ en el grupo $\pi_{i-1}(X)$. Después de semejante transformación de la aplicación f obtendremos para la nueva aplicación $\tilde{f}$, el hecho que $\alpha_{\tilde{f}} = \alpha_f - \delta\beta \equiv 0$.

El lema queda demostrado.

Como resultado de los lemas 1 y 2 obtenemos

CONCLUSIÓN: Está definido «el primer obstáculo» para prolongar la aplicación $\alpha_f \in H^i(K, L; \pi_{i-1}(X))$ al intentar la prolongación de la aplicación f del subcomplejo $L \cup K^{i-1}$ en el complejo $L \cup K^i$. Su igualdad a cero es suficiente para la prolongación (véase el lema 2). Evidentemente, es posible la prolongación, si $\pi_{i-1}(X) = 0$.

PROBLEMA 2. Sean: $\pi_q(X) = 0$ con $i < q$, y $f: K^q \to X$, una aplicación de un armazón q-dimensional. Sea que X no tiene células de dimensiones $0 < p < q - 1$ (un complejo reducido, véase § 4). Entonces, cualquiera célula σ^q del complejo K define el elemento $\beta(\sigma^q) \in \pi_q(X)$ mediante la aplicación $\sigma^q \to X$. Demostrar que el obstáculo para prolongar esta aplicación en el armazón K^{q+1} es una cocadena $\alpha_f = \delta\beta$. En particular, la aplicación f se prolonga en K^{q+1}, si β es un cociclo.

B. Consideremos un «obstáculo para la homotopía» de dos aplicaciones f y g: $K \to X$, que ya coinciden en el armazón K^{q-1}. En cualquiera célula $\sigma^q \subset K^q$ del armazón K^q tenemos dos aplicaciones $f, g: \sigma^q \to X$, que coinciden en la frontera: $f|_{\partial\sigma^q} = g|_{\partial\sigma^q}$. Conjuntamente f y g dan una aplicación de la esfera $S^q \to X$. Este es un «elemento distintivo» $\alpha(\sigma^q, f, g) \in \pi_q(X)$. Así, tenemos una «cocadena distintiva»

$$\alpha(\sigma_q, f, g) \in \pi_q(X).$$

PROBLEMA 3. Mostrar, que $\delta\alpha = 0$. Mostrar que para un caso $\alpha = \delta\beta$ es posible cambiar la homotopía entre f y g en un armazón K^{q-1}, sin tomar el armazón K^{q-2}, y después tendremos $\alpha \equiv 0$. Por eso la distintiva se encuentra en $H^q(K, \pi_q(X))$.

PROBLEMA 4. Sea que tenemos un par (K, L), $L \subset K$ y sea dada una aplicación $f: L \to T^n$ en un toro n-dimensional. La condición necesaria de la prolongación de la aplicación f de L sobre K es la siguiente: si $\gamma \in \pi_1(L)$ y el encaje $i: L \to K$ transforma este elemento en la unidad, $i_*(\gamma) = 1$, entonces debe ser $f_*(\gamma) = 1$ en el toro T^n. Demostrar que esta condición es suficiente para la prolongación. Demostrar que para prolongar la aplicación es también suficiente una condición análoga en las homologías, o sea para $\gamma \in H_1(L)$. Tal situación surge, por ejemplo, en la teoría de nudos (véase [1], parte II, § 26).

PROBLEMA 5. Hallar un conjunto $\pi(K, T^n)$ de clases homotópicas de aplicaciones $K \to T^n$ (particularmente, para $n = 1$ en S^1). Con mayor generalidad: sea $X = K(D, n)$ un espacio tal («complejo de Eulenberg-MacLane»), que $\pi_i(X) = 0$, $i \neq n$, y $\pi_n(X) = D$ es un grupo abeliano. Demostrar que $\pi(K, X) = H^n(K, D)$. Verificar para $n = 1$, que $H^1(K, D)$ y $\pi(K, X)$ se determinan por los homomorfismos $\pi_1(K) \to D$. Este resultado sobre $\pi(K, X)$ es justo para los grupos no abelianos D con $n = 1$. Ejemplos:

$n = 1: D = \mathbb{Z}$, $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$,
$D = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$, $K(D, 1) = T^n$,
$D = \pi_1(M_g^2)$, $K(D, 1) = M_g^2$ (superficie del género $g \geqslant 1$),
$D = \mathbb{Z}_m$, $K(D, 1) = S^\infty/\mathbb{Z}_m$ (para $m = 2$ tenemos $K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty$ o $\mathbb{R}P^N$, $N \to \infty$),
$D = F$ (grupo libre), $K(F, 1) = S^1 \vee \ldots \vee S^1$ (ramo de circunferencias).

Hay muchísimos ejemplos de espacios $K(D, 1)$ con distintos grupos $D = \pi_1(X)$. El único espacio, que se construye simplemente, $K(D, 2)$ es el caso $n = 2$, $D = \mathbb{Z}$, $K(D, 2) = \mathbb{C}P^\infty = S^\infty/S^1$ (véase [1], p. II, § 24).

PROBLEMA 6. Sea K^n un complejo de dimensión n. Hallar las clases homotópicas de aplicaciones $K^n \to S^n$. Demostrar la igualdad

$$\pi(K^n, S^n) = H^n(K^n, \mathbb{Z}).$$

C. Es completamente análogo el problema de construcción y de homotopía de secciones de espacios fibrados $E \xrightarrow{p} B$ con fibra F, donde la base B está representada en forma de un complejo simplicial o celular. Otra vez, para hacerlo más fácil, suponemos que la base B es simplemente conexa (o, más débilmente, $\pi_1(B)$ no actúa en los grupos $\pi_1(F)$ mediante traslaciones) y la fibra F es también simplemente conexa u homotópicamente simple.

Sea dada una sección φ en un armazón $B^{q-1} \subset B$. Sobre un simplex $\sigma^q \subset B^q$ se tiene un producto directo $p^{-1}(\sigma^q) = \sigma^q \times F$. En la frontera $\partial\sigma^q = S^{q-1}$ se tiene una sección φ: $\partial\sigma^q \to \partial\sigma^q \times F$, donde $p\varphi = 1$. Por eso está definida la aplicación $\partial\sigma^q = S^{q-1} \to F$, que da un elemento $\alpha(\sigma^q, \varphi) \in \pi_{q-1}(F)$ (cocadena obstaculizadora).

PROBLEMA 7. Demostrar que $\delta_\alpha = 0$.

PROBLEMA 8. Demostrar que para $\alpha = \delta\beta$ es posible transformar la sección en el armazón B^{q-1}, no tocándola en B^{q-2}, que $\alpha \equiv 0$. De manera que $\alpha \in H^q(B, \pi_{q-1}(F))$.

PROBLEMA 9. Sea que la fibra es una esfera $S^{q-1} = F$. Mostrar que el obstáculo $\alpha \in H^q(B, \pi_{q-1}(F))$ es una «clase de Euler» de espacio fibrado, (véase [1], parte II, § 25), definida con ayuda de conexión en un espacio fibrado con impares $q - 1$ para los espacios fibrados con un grupo $G = SO(q)$ como un elemento de $H^q(B, \mathbb{R})$.

PROBLEMA 10. Consideremos un obstáculo para la homotopía de dos secciones φ_1 y φ_2: $B \to E$, donde $p\varphi_1 = p\varphi_2 = 1$. Sea que coinciden las secciones en un armazón $B^{q-1} \subset B$. Determinar el obstáculo para la homotopía y estudiar sus propiedades

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \in H^q(B, \pi_q(F)).$$

EJEMPLO 1. Sea contractable la fibra, $\pi_i(F) = 0$ para todo i; entonces, siempre existe la sección, y todas las secciones son homotópicas. Por ejemplo:

a) F es un conjunto de métricas de Riemann positivas (en un punto dado) sobre una variedad M^n. Sabemos (véase [1], parte II, § 8), que siempre existe la sección (métrica) y que dos secciones (dos métricas positivas) son homotópicas, y entonces es posible unirlas con una curva. Si la métrica es indefinida (por ejemplo, de forma (p, q)), entonces, este resultado no es correcto. ¿Cuáles son los grupos $\pi_i(F)$ para este caso? Notemos, que $F = GL(n, \mathbb{R})/(O(p, q), p + q = n$.

b) F es un conjunto de «superficies horizontales» en un punto dado de espacio $E \to B$ o de conexiones (véase [1], parte II, § 24), donde fue demostrada la existencia de la conexión).

EJEMPLO 2. Sea $E \xrightarrow{p} B$ un espacio fibrado con un grupo $G = O(n)$ y una fibra $\mathbb{R}^n$. Consideremos un espacio fibrado asociado de k-jalones (ortonormalizados): $E_k \xrightarrow{p} B$, la fibra $F_k = V_{n,k}$ (variedad de Stiefel de k-jalones en $\mathbb{R}^n$). En particular, para $k = n$, tenemos $F_n = O(n)$, y para $k = 1$, tenemos $F_1 = S^{n-1}$. Los conocimientos sobre los grupos homotópicos de fibra los obtenemos de [1], parte II, § 24:

$$\pi_i(V_{nk}) = 0, \qquad i < n-k,$$

$$\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n-k \text{ es impar}, \\ \mathbb{Z}_2, & n-k \text{ es par}. \end{cases}$$

La clase obstaculizadora de cohomologías para construir secciones de estos espacios fibrados tiene forma («el primer obstáculo»)

$$\alpha_k \in H^{n-k+1}(B, \pi_{n-k}(V_{n,k}))$$

para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

DEFINICIÓN 1. La clase α_k (mod 2) se denomina «clase de Stiefel—Witney» de espacio fibrado y se designa por

$$W_q = \alpha_{n-q+1} \,(\mathrm{mod}\, 2) \in H^q(B, \mathbb{Z}_2), \quad q = 1, \ldots, n.$$

Por definición, se supone $W_0 = 1$ y se forma un «polinomio de Stiefel—Witney»

$$W(t) = 1 + W_1 t + \ldots + W_q t^q + \ldots,$$

donde t es una variable formal. A las clases de Stiefel—Whitney de una variedad suave M^n las llamaremos clases de espacio fibrado tangente.

PROBLEMA 11. Demostrar, que la igualdad $W_1 = 0$ es necesaria y suficiente para orientabilidad de la variedad M^n. Mostrar, que W_n es una característica de Euler (mod 2).

PROBLEMA 12. Demostrar, que para los productos directos de variedades (o para los productos directos de espacios fibrados) tenemos

$$W(t) = \overline{W}(t)\,\overline{\overline{W}}(t)$$

(el producto en un anillo de cohomologías $H^*(\ ,\mathbb{Z}_2)$ y $\overline{W}$, $\overline{\overline{W}}$ son polinomios de Stiefel—Whitney de los factores).

PROBLEMA 13. Demostrar, que para un espacio fibrado no trivial unidimensional estándar η sobre $\mathbb{R}P^n$ («cinta de Moebius», véase [1], parte II, § 24) tenemos

$$W(t) = 1 + W_1 t, \quad W_1 \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad W_1 \neq 0.$$

Calcular un polinomio de Stiefel—Whitney de un espacio fibrado tangente τ sobre $\mathbb{R}P^n$, utilizando el siguiente resultado: $\tau \oplus 1 = \eta \oplus \ldots \oplus \eta$ (véase el problema 1 de [1], parte II, § 24).

PROBLEMA 14. Examinar k campos vectoriales $\eta_1, \ldots, \eta_k$ sobre una variedad M^n (en posición general). Surge un «ciclo de singularidades», donde los campos son linealmente dependientes. Mostrar, que esto es un ciclo (mod 2) en un grupo $H_{k-1}(M^n, \mathbb{Z}_2)$, dual, según Poincaré, a una clase de Stiefel—Whitney W_{n-k+1}.

EJEMPLO 3. Consideremos un espacio fibrado complejo $E \xrightarrow{p} B$ con fibra $\mathbb{C}^n$ y un grupo $G = U(n)$, y los espacios fibrados asociados de k-jalones unitarios (complejos) en él $E_k \xrightarrow{p} B$, fibra $F_k = V^{\mathbb{C}}_{n,k}$. Conocemos los grupos homotópicos (véase [1], parte II, § 24):

$$\pi_i(V^{\mathbb{C}}_{n,k}) = 0, \quad i \leqslant 2(n-k), \quad \pi_{2(n-k)+1}(V^{\mathbb{C}}_{n,k}) = \mathbb{Z}.$$

El primer obstáculo para construir la sección del espacio fibrado $E_k \xrightarrow{p} B$ es un elemento de cohomologías con coeficientes enteros

$$c_{n-k+1} \in H^{2n-2k+2}(B, \pi_{2n-2k+1}(V^{\mathbb{C}}_{n,k})) = H^*(B. \mathbb{Z}).$$

DEFINICIÓN 2. La clase $\bar{\bar{c}}_q$ se denomina «clase de Chern» ($q = 1, \ldots$) del espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$. Si $B = M^{2n}$ es una variedad compleja, entonces, las clases de Chern del espacio fibrado tangente se llaman clases de esta variedad. Se introduce el «polinomio de Chern»

$$c(t) = 1 + c_1 t + \ldots + c_q t^q + \ldots,$$

donde t es una variable formal.

PROBLEMA 15. Demostrar que para el producto de espacios fibrados (o variedades) es justa la fórmula

$$c(t) = \bar{c}(t)\,\bar{\bar{c}}(t),$$

donde $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$ son polinomios de Chern de factores.

PROBLEMA 16. Mostrar, que para un U_1-espacio fibrado estándar η sobre $\mathbb{C}P^n$ tenemos

$$c(t) = 1 + c_1 t,$$

donde $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ es un elemento básico.

☐ Hallar el polinomio de Chern de un espacio fibrado tangente τ sobre $\mathbb{C}P^n$, utilizando el hecho de que $\tau \oplus 1 = \eta \oplus \ldots \oplus \eta$ (¡demuéstrelo!, véase [1], parte II, § 24).

PROBLEMA 17. Mostrar que para variedades complejos M^{2n} la clase c_n coincide con la característica de Euler. Hallar los polinomios de Chern de las superficies de Riemann.

PROBLEMA 18. Mostrar que es posible reducir un grupo estructural del $U(n)$-espacio fibrado a $SU(n)$ si, y sólo si, $c_1 = 0$.

PROBLEMA 19. Para un espacio fibrado complejo-conjugado $\bar{\xi}$ a un espacio fibrado ξ con base B (véase [1], parte II, § 24) demostrar la igualdad

$$c(t, \bar{\xi}) = c(-t, \xi)$$

o

$$c_{2i}(\xi) = c_{2i}(\bar{\xi}),$$

$$c_{2i+1}(\xi) = -c_{2i+1}(\bar{\xi}).$$

PROBLEMA 20. Demostrar que las clases de Chern c_q, consideradas en el grupo $H^{2q}(B, \mathbb{R})$, coinciden con las definidas mediante conexiones en los espacios fibrados (véase [1], parte II, § 25). Esto resulta, especialmente fácil para la clase c_1. De manera que las clases, anteriormente definidas como expresiones del tensor de curvatura (des-

pués de normación) tienen siempre integrales con coeficientes enteros por ciclos en cualquier espacio fibrado.

PROBLEMA 21. Demostrar, que el polinomio de Chern (mod 2) de un espacio fibrado complejo ξ define el polinomio de Stiefel — Witney del mismo espacio fibrado como real, o como espacio fibrado $r\xi$, donde r es una operación de «materialización» — véase [1], parte II, § 24.

EJEMPLO 4. Consideremos un $O(n)$-espacio fibrado real η. Es posible «complexificar» este espacio fibrado (véase [1], p. II, § 24):

$$\eta \to c\eta = \xi.$$

El espacio fibrado $\xi = c\eta$ tiene un grupo $G = U(n)$ y está «autoconjugado». Esto significa que los espacios fibrados ξ y $\bar{\xi}$ son isomorfos: $\xi \approx \bar{\xi}$ (comprobarlo).

DEFINICIÓN 3. Las clases de Chern de $(-1)^i c_{2i}$ espacio fibrado complejo $\xi = c\eta$ se denominan *clases características* (de Pontriaguin) de un espacio fibrado real η y se designan por $p_i(\eta) \in H^{4i}(B, \mathbb{Z})$.

Del isomorfismo $\xi \approx \bar{\xi}$ obtenemos

$$c_{2i}(\bar{\xi}) = c_{2i}(\xi) = p_i(\eta),$$
$$c_{2i+1}(\bar{\xi}) = -c_{2i+1}(\xi),$$

y, debido a ello, $2c_{2i+1} = 0$. Por eso, no se consideran las clases c_{2i+1} en el caso real.

PROBLEMA 22. Calcular las clases $p_i(\mathbb{C}P^n)$.

PROBLEMA 23. Hallar la clase $p_1(M^4_{(n)})$ para una variedad no singular M^4, dada en $\mathbb{C}P^3$ por una ecuación (en un dominio finito $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}P^3$) de grado n.

PROBLEMA 24. Demostrar la coincidencia de las clases p_i con las clases, definidas mediante conexiones en los espacios fibrados (véase [1], parte II, § 25).

PROBLEMA 25. Demostrar que si una variedad orientable M_4 es un borde de una variedad orientable, o sea, $M_4 = \partial W^5$, entonces $p_1(M^4) = 0$. En forma general: si $M^n = \partial W^{n+1}$, entonces cada polinomio de dimensión n de las clases W_q y p_s es trivial (para un caso no orientable, sólo de W_q). Expresar las clases p_s (mod 2) mediante W_q.

§ 10. Homologías y métodos de cálculo de los grupos homotópicos. Teoremas de Cartan-Serre. Operaciones cohomológicas. Espacios fibrados vectoriales.

I. Noción de operación cohomológica. Ejemplos

Es muy difícil el problema de cálculo de los grupos homotópicos de variedades y de complejos finitos. Este problema es insoluble algorítmicamente en el más fuerte sentido de la lógica mate-

mática para los complejos no conexos simplemente, donde un grupo π_1 actúa sobre todos los π_i. Incluso para un caso más importante y simple de los complejos simplemente conexos (por ejemplo, esferas) el cálculo concreto de los grupos homotópicos resulta un problema muy difícil, no resuelto. Los métodos geométricos directos permiten obtener algunos resultados sobre los grupos homotópicos (véase [1], parte II) en ciertos casos particulares. Se consigue formular métodos regulares de cálculo de grupos homotópicos basándose en la teoría homológica de los espacios fibrados junto con la teoría de las homotopías, formuladas más arriba. Mostraremos aquí un modo de obtener información sobre las partes infinitas de grupos homotópicos $\pi_i(K) \otimes \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ es el campo de los números racionales para los complejos simplemente conexos, lo que ya fue examinado parcialmente en los problemas del § 8. Notemos que el cálculo de la parte finita (torsión) de los grupos homotópicos $\pi_i(K)$, como se verá más abajo, exige desarrollar métodos incomparablemente más complejos. La base de todos los métodos algebraicos para calcular los grupos homotópicos, salvo ya formulada teoría de las homologías, son las llamadas «operaciones cohomológicas», es decir, aplicaciones $\theta\colon H^q(K, L; G_1) \to H^p(K, L; G_2)$, que tienen las siguientes propiedades:

a) La aplicación θ está definida para todos los complejos K, L y es homotópicamente invariante;

b) la aplicación θ es «natural» (otros términos son «functorial» o «covariante»): esto significa que ella conmuta con aplicaciones continuas $f\colon (K, L) \to (K', L')$

$$\theta f^* = f^* \theta.$$

EJEMPLO 1. $\theta(x) = x^m$, donde $x \in H^q(K, L; G_1)$. Aquí $p = mq$. Para $G_2 = G_1 = \mathbb{Z}_p$, donde $m = p$ es un número primo, tenemos $\theta(x + y) = x^p + y^p$, $\theta(\lambda x) = \lambda\theta(x)$, ya que $\lambda^p = \lambda$. En este caso θ es una aplicación lineal. Para el campo racional $\mathbb{Q} = G_1 = G_2$ la aplicación θ no es un homomorfismo.

EJEMPLO 2. $\theta(x) = \delta_*(x)$, donde $x \in H^q(K, L; \mathbb{Z}_p)$, $\delta_*(x) \in H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p)$.

La definición del homomorfismo δ_* fue dada en el § 3: si el elemento x se representa por una cocadena con coeficientes enteros $\bar{x} \in C^p(K, L; \mathbb{Z})$, $x = \bar{x} \bmod p$, entonces $\delta_* x = \left(\frac{1}{p}\delta\bar{x}\right)$ módulo p.

Se tiene una generalización natural $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k$ de un homomorfismo $\delta_1 = \delta_*$: si $x \in \operatorname{Ker}\delta_*$, o sea, la cocadena $\left(\frac{1}{p}\delta\bar{x}\right) \bmod p$ es cohomológica a cero, entonces, $\frac{1}{p}\delta\bar{x} = py + \delta z$. Por eso está definida la relación

$$y \,(\mathrm{mod}\ p) = \delta_2(\bar{x}) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}\delta x - \delta z\right).$$

PROBLEMA 1. Verificar que δ_2 es un homomorfismo correctamente definido

$$H^q(K, L; \mathbb{Z}_p) \subset \operatorname{Ker} \delta_1 \xrightarrow{\delta_2} H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p)/\operatorname{Im} \delta_1,$$

que conmuta con las aplicaciones continuas, o sea, $f^*\delta_2 = \delta_2 f^*$. Construir, por analogía, homomorfismos superiores

$$\delta_k: \bigcap_{i<k} \operatorname{Ker} \delta_i \to H^{q+1} / \bigcup_{i<k} \operatorname{Im} \delta_i.$$

Los homomorfismos δ_k, si $k \geqslant 2$, no están definidos por doquier y son multiformes. Por eso a ellos se los llama operaciones cohomológicas «superiores» o «parciales». El valor de los homomorfismos δ_k es el siguiente: si conocemos la estructura de $H^*(K, L; \mathbb{Z}_p)$ y la acción de los operadores δ_k, entonces podemos reconstruir un grupo de cohomologías con coeficientes enteros $H^*(K, L; \mathbb{Z})/\Gamma_p$, donde Γ_p es una parte periódica del orden, primos entre sí con p.

PROBLEMA 2. El núcleo de todos los δ_k sobre $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$ es el resultado de la reducción del mod p de un grupo con coeficientes enteros $H^*(K; \mathbb{Z})$.

PROBLEMA 3. Si $x = \delta_k y$ y $x \neq \delta_q z$ cuando $q < k$, entonces el elemento x representa un elemento generatriz $\tilde{x} \in H^*(K; \mathbb{Z})$ de orden p^k.

De este modo, el conocimiento de los operadores δ_k para todos los p en las cohomologías $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$ (o en las homologías $H_*(K; \mathbb{Z}_p)$, donde están conjugadas a las cohomológicas) permite reconstruir las homologías y cohomologías con coeficientes enteros.

Los operadores δ_k tienen las siguientes propiedades:

a) están definidos en todos los grupos H^q para todos los q (o en sus subgrupos) y son homomorfismos;

b) conmutan con un homomorfismo δ de la sucesión exacta del par (¡comprobarlo!)

$$H^q(K, L; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p), \quad \delta\delta_k = \delta_k\delta.$$

Si $k = 1$, la operación $\delta_1 = \delta_*$ está definida por doquier y es unívoca.

DEFINICIÓN 1. Las operaciones θ, que tienen las propiedades a) y b) se llaman «estables».

La causa principal, que facilita los cálculos de los grupos homotópicos $\pi_i(k) \otimes \mathbb{Q}$, es la ausencia de operaciones cohomológicas no triviales (que no se reducen a una operación de elevación a potencia) en las cohomologías racionales $H^*(; \mathbb{Q})$ (esto será demostrado más abajo). La única operación cohomológica «estable» en las cohomologías racionales (reales, complejas) es la de multiplicación por un número (escalar):

$$\theta(x) = \lambda x: H^q \to H_q.$$

El ejemplo del operador δ_* muestra, que las cohomologías $H^*(\ ;\mathbb{Z}_p)$ tienen operaciones cohomológicas estables no triviales. Sin demostración, indiquemos que hay muchas operaciones estables no triviales en las cohomologías de módulo p (véase [45]).

TEOREMA 1. (Steenrod). 1) *Sea $p = 2$. Para cualquier número $i \geqslant 0$ se tiene una operación cohomológica estable* θ, *designada por* Sq^i, *que da un homomorfismo*

$$Sq^i: H^q(K, L; \mathbb{Z}_2) \to H^{q+i}(K, L; \mathbb{Z}_2)$$

para todos los q. La operación Sq^i tiene las siguientes propiedades

a) $Sq^i(x) = 0$, si $q < i$;

b) $Sq^0 \equiv 1$;

c) $Sq^i(x) = x^2$, $q = i$;

d) $Sq_p(xy) = \sum\limits_{j+k=i} Sq^j(x)\, Sq^k(y)$;

e) $Sq^1(x) = \delta_* x$.

2) *Sea $p > 2$. Para cualquier $i \geqslant 0$ están definidas las operaciones estables St_p^i*

$$St_p^i : H^q(K, L;; \mathbb{Z}_p) \to H^{q+2i(p-1)}(K, L; \mathbb{Z}_p)$$

tales, que

a) $St_p^i(x) = 0$, $q < 2i$;

b) $St_p^0 \equiv 1$;

c) $St_p^i(x) = x^p$, $q = 2i$;

d) $St_p^i(xy) = \sum\limits_{k+j=i} St_p^j(x)\, St_p^k(y)$.

Todas las operaciones estables se expresan por medio de productos (superposición) de operaciones de Steenrod (es un teorema difícil). Hay entre ellas relaciones algebraicas no triviales: como se aclarará más adelante, toda esta estructura crea un proceso complicado para calcular la parte finita de los grupos homotópicos. Notemos, que la más simple ilustración de tal empleo es la estructura de un complejo bicelular: el elemento $x \in \pi_{k+q}(S^q)$ define un complejo bicelular

$$K_x = D^{k+q+1} \cup_x S^q$$

tal, que

$$H^q(K_x; G_1) = G_1, \quad H^{k+q+1}(K_x; G_2) = G_2$$

(que forman, correspondientemente, z y w). Para el caso $q = n$, $k + q + 1 = 2n$, este complejo se examinó en el § 7.

LEMA 1. *Si se halla una operación cohomológica no trivial* $\theta : H^q(; G_1) \to H^{q+k+1}(\ ; G_2)$ tal, *que* $\theta(z) \neq 0$, *entonces el elemento* $x \neq 0$, *donde* $x \in \pi_{k+q}(S^q)$.

DEMOSTRACIÓN. El tipo homotópico de un complejo K_x para $x = 0$ tiene forma de ramo $K_x \sim S^{q+k+1} \vee S^q$. Consideremos la aplicación $K_x \xrightarrow{\pi} S^q$, idéntico en un sumando S^q y que proyecta el segundo S^{k+q+1} en un punto. Puesto que $S^q \subset K_x$, tenemos una proyección $K_x \xrightarrow{\pi} K_x$ tal, que

$$\pi^* = 1 : H^q \to H^q, \quad \pi^* = 0: H^{q+k+1} \to H^{q+k+1}.$$

Puesto que $\theta(\pi^*_z) = \pi^*\theta(z)$, por definición de operación cohomológica, tenemos que $0 = \theta(\pi^*_z) = \theta(z)$. El lema queda demostrado.

Un ejemplo trivial: $q = n$, x, es la multiplicación por $2^s \in \mathbb{Z} = \pi_n(S^n)$; $\theta = \delta_s$: $H^n(K; \mathbb{Z}_2) \to H^{n+1}(K; \mathbb{Z}_2)$.

11. Complejos de Eulenberg—MacLane y operaciones.

Ya introdujimos «complejos de Eulenberg—MacLane» $K(D, n) = K$ tales, que

$$\pi_n(K) = D, \quad \pi_j(K) = 0, \quad j \neq n$$

(véase el § 9). Tomemos como un hecho que tales complejos existen (véase [45]) para todos los (D, n) y que son celulares o homotópicamente equivalentes a ellos.

Es evidente lo siguiente:

$$K(D_1 \times D_2, n) = K(D_1, n) \times K(D_2, n),$$
$$\Omega(K(D, n) = K(D, n-1).$$

Efectivamente, utilicemos la siguiente igualdad (véase [1] parte II, § 24): $\pi_j(\Omega(X)) = \pi_{j+1}(X)$.

Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 2. *Para cualquier complejo celular X la clase homotópica de la aplicación f: $X \to K(D, n)$ es definida completamente por cierto elemento de un grupo de cohomologías $x \in H^n(X; D)$*; es justo el isomorfismo canónico $[X; K(D, n)] \approx H^n(X; D)$.

DEMOSTRACIÓN. a) Sea dada una cocadena $\bar{x} \in C^n(X; D)$. Damos la aplicación del armazón X^{n-1} en un punto. Demos la aplicación en el armazón X^n así: a una célula $\sigma^n \subset X^n$ le corresponde un elemento $\bar{x}(\sigma^n) \in \pi_n(K(D, n)) = D$. La frontera $\partial\sigma^n$ ya está aplicada en un punto. Apliquemos la célula $\sigma^n \to K(D, n)$ en concordancia con el elemento $\bar{x}(\sigma^n)$ de $\pi_n(K(D, n))$. Prolonguemos la aplicación en un armazón X^{n+1}. Este es posible si, y sólo si, $\delta\bar{x} = 0$ (véase el § 9). En adelante, suponemos por inducción, que en el armazón X^{n+1+i} ya está construida la aplicación f: $X^{n+1+i} \to K(D, n)$. Ya que $\pi_j(K(D, n)) = 0$ cuando $j \neq n$, el obstáculo para prolongar la aplicación f es igual a cero, y prolongamos las aplicaciones por los armazones sobre todos los X.

b) Sean dadas dos aplicaciones $f: X \to K$, $g: X \to K$, construidas por dos ciclos cohomológicos $\overline{\overline{x}}$, $\overline{x}$, $\overline{x} - \overline{\overline{x}} = \delta y$; es posible, en concordancia con el § 9 transformar la aplicación f en el armazón de dimensión $n - 1$ de tal modo, que $\overline{x} \to \overline{x} - \delta y$. Después obtendremos $\overline{x} \equiv \overline{\overline{x}}$. Se deduce de la igualdad de todos los grupos $\pi_j (K)$ para $j > n$, que las aplicaciones son homotópicas.

El teorema 2 queda demostrado.

TEOREMA 3. *El conjunto de todas las operaciones cohomológicas θ: $H^n (M, L; D) \to H^p (M, L; G)$ está en correspondencia natural recíprocamente unívoca con los elementos del grupo $H^p (K; G) = H^p (K (D, n); G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un elemento «canónico» $u \in H^n (K (D, n); D)$, que se define así: por el teorema de Hurewicz tenemos que $H_n (K (D, n), \mathbb{Z}) = \pi_n = D$. Luego, $H^n (K; G_1) = \mathrm{Hom} (D, G_1)$, donde $\mathrm{Hom} (D, G_1)$ son homomorfismos de un grupo abeliano D en G_1. Si $D = G_1$, entonces en un conjunto $\mathrm{Hom} (D, D)$ se tiene un elemento «unidad» $u \in \mathrm{Hom} (D, D)$ o sea, un homomorfismo idéntico. De la demostración del teorema 2, vemos, que la correspondencia $H^n (X, D) \approx [X, K]$ se establece así: si está dada la aplicación f, entonces

$$[f] \leftrightarrow f^* (u) \in H^n (X; D).$$

Demostremos el teorema 3. Si se da la operación cohomológica θ, entonces queda definido el elemento $\theta (u) \in H^p (K; G)$. Tenemos la correspondencia $\theta \to \theta (u)$.

Sean dados el elemento $\theta (u) \in H^p (K; G)$ y cualquier complejo X. Fijamos el elemento $x \in H^n (X; D)$. En virtud del teorema 2 tenemos una aplicación $f: X \to K$, donde $f^*u = x$. Suponemos, que $\theta (x) = \theta (f^*u) = f^*\theta (u)$. El teorema 3 queda demostrado.

TEOREMA 4. *Para cualquier grupo abeliano finitamente engendrado D el anillo de cohomologías $H^*(K (D, n); \mathbb{Q})$ es un álgebra anticonmutativa, engendrada por las generatrices de un espacio lineal $D^* = \mathrm{Hom} (D, \mathbb{Q}) = H^n (K; \mathbb{Q})$.*

DEMOSTRACIÓN. El grupo D es una suma directa de los grupos cíclicos $D = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots$ Demostremos ahora para $D = \mathbb{Z}_m$, que $H^q (K (D, n); \mathbb{Q}) = 0$, $q > 0$. Para $K = K (D; 1)$ esto fue establecido en el § 9, ya que

$$K (D, 1) = S^\infty/\mathbb{Z}_m = L_m^{2N-1} (1, \ldots, 1), \qquad N \to \infty.$$

Sea que esto ya está demostrado para $p < n$.

Consideremos el espacio fibrado de Serre.

$$E \to K (D, n), \qquad F = K (D, n - 1),$$

$\pi_j(E) = 0$, $j > 0$. De la sucesión espectral en las cohomologías $H^*(\ ;\ \mathbb{Q})$ tenemos $E_2^{p,q} = 0$, si $q > 0$, $E_2^{q,0} = H^q(B;\ \mathbb{Q})$. Por eso todos los $d_2 \equiv 0$ con $r \geqslant 2$ y $E_\infty^{q,0} = E_2^{q,0} = H^q(E;\ \mathbb{Q}) = 0$. Por eso $E_2^{q,0} = H^q(B) = H^q(K(D,\ n)) = 0$. Para $D = \mathbb{Z}_m$, y por eso para $D = \mathbb{Z}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ tenemos $H^q(K(D,\ n);\ \mathbb{Q}) = 0$ para todos los $q > 0$.

Sea $D = \mathbb{Z}$. Consideremos un espacio fibrado de Serre, suponiendo por inducción, que el teorema esté demostrado para todos los $p < n$. Tenemos dos casos:

a) n es par, $H^*(K(D,\ n-1);\ \mathbb{Q}) = \Lambda\ [u_{n-1}]$;

b) n es impar, $H^*(K(D,\ n-1);\ \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\ [u_{n-1}]$.

Debemos deducir de esto y de la condición $H^q(E;\ \mathbb{Q}) = 0$ con $q > 0$, que la sucesión espectral tiene una de las dos formas siguientes:

(a

$n-1$	u	0	uv	0	uv^2
		0		0	
0	1	0	v	0	v^2
	0		n		

$d_i = 0$, $i \geqslant 2$, $i \neq n$;
$d_n(u) = v$; $d_n(v) = 0$.

b)

$2n-2$	u^2		u^2v
		0	
$n-1$	u		uv
0	1		v

$d_i = 0$, $i \geqslant 2$, $i \neq n$;
$d_n(u) = v$, $d_n(v) = 0$.

Aquí se utiliza sustancialmente la multiplicación cohomológica en la sucesión espectral. Después el resultado necesario ya casi está evidente de las tablas indicadas, ya que en ambos casos tenemos $E_{n+1}^{p,q} = 0$ para todos los p, q.

Como $D = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_k}$, el teorema 4 queda demostrado.

III. Cálculo de los grupos homotópicos $\pi_i \otimes \mathbb{Q}$

TEOREMA 5. (Cartan—Serre). *Sea que un anillo de cohomologías de un espacio simplemente conexo (u homotópicamente simple) X sobre $\mathbb{Q}$ hasta la dimensión k es isomorfo a un álgebra libre anticonmutativa con generatrices libres $x_j \in H^{\alpha_j}(X; \mathbb{Q})$,* donde $\alpha_j < k$. *Entonces, son justas las siguientes afirmaciones:*

a) *el homomorfismo de Hurewicz*

$$H: \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \to H_i(X; \mathbb{Q})$$

tiene un núcleo nulo para todos los $i < k - 1$.

b) *la imagen $H(\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q})$ tiene un producto escalar nulo con todos los elementos $x \in H^*(X; \mathbb{Q})$, los que se descomponen no trivialmente en los productos $x = yz$,* $\deg y > 0$, $\deg z > 0$.

c) *el grupo $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ es isomorfo (conjugado) a un factor $H^i(X; \mathbb{Q})/\Gamma$, donde Γ se compone exactamente de todos los elementos descomponibles no trivialmente en el producto, $i < k - 1$.*

DEMOSTRACION. En virtud del teorema 4 es justa nuestra afirmación para los complejos $K(D, n)$, y por lo tanto, para cualesquiera productos directos (aquí $k = \infty$):

$$K = K(D_1, \alpha_1) \times K(D_2, \alpha_2) \times K(D_3, \alpha_3) \times \ldots, \quad (*)$$
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$$

Demos una aplicación $X \xrightarrow{f} K$, donde K está construido en forma (*) para un juego de los grupos abelianos libres D_j de los rangos, iguales al número de generatrices libres x_j en la dimensión α_j. En virtud del teorema 2 tomamos una aplicación f tal, que $f^*: H^* \times (K; \mathbb{Q}) \to H^*(X; \mathbb{Q})$ es un isomorfismo hasta la dimensión k, según condiciones del teorema. En concordancia con el procedimiento indicado en el § 8, transformemos la aplicación f en un espacio fibrado $f: \widetilde{X} \to K$, la fibra F, donde $\widetilde{X}$ es homotópicamente equivalente a X.

Puesto que f^* es un isomorfismo en dimensiones menor que k, se deduce de la sucesión espectral de este espacio fibrado inmediatamente: $H^*(F; \mathbb{Q}) = 0$ en dimensiones menores, que $k - 1$. Para X simplemente conexo es posible considerar, que el grupo D_1 no es abeliano libre, sino que coincide exactamente con el primer grupo homotópico no trivial del complejo X. Por eso f_* es un isomorfismo en un grupo $\pi_2(X) \to \pi_2(K)$. Así, tendremos $\pi_1(F) = 0$, de la sucesión exacta de espacio fibrado (véase [1], parte II, § 22).

LEMA. *Si las cohomologías $H^q(F; \mathbb{Q})$ de un espacio simplemente conexo F son triviales con $q < k - 1$, entonces $\pi_i(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ con $i < k - 1$.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Por el teorema de Hurewicz el primer grupo no trivial $\pi_{\alpha_2}(F)$ es finito. Consideremos una aplicación (espacio fibrado) $f: F \to K(\pi_{\alpha_2}(F), 2)$ con fibra F_3. Puesto que $H^*(K(\pi_{\alpha_2}(F), 2); \mathbb{Q}) = 0$, de la sucesión espectral resulta que $H^*(F_3; \mathbb{Q}) = H^*(F; \mathbb{Q})$. Con esto, el espacio F_3 ya tiene un grupo nulo $\pi_{\alpha_2}(F_3) = 0$, $\pi_j(F_3) = 0$, $j \leqslant \alpha_2$. Por inducción, reducimos el lema al teorema corriente de Hurewicz. El lema queda demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE CARTAN — SERRE. Del lema obtenemos, que $\pi_i(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ para todos los $i < k - 1$. El teorema sobre el isomorfismo de los grupos $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \approx \pi_i(K) \otimes \mathbb{Q}$ se deduce ahora de la sucesión exacta de los grupos homotópicos de un espacio fibrado.

COROLARIO 1. *Para cualquier grupo de Lie son no triviales los grupos homotópicos $\pi_i(G) \otimes \mathbb{Q}$ sólo con $i = 2q - 1$ impares, y corresponden exactamente a las generatrices libres del anillo $H^*(G; \mathbb{Q}) = \Lambda[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$.*

COROLARIO 2. *Para una esfera S^n tenemos*

$$n = 2k:\ \pi_n(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}, \quad \pi_{2n-1}(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q},$$
$$\pi_j(S^n) \otimes \mathbb{Q} = 0, \qquad j \neq n,\ 2n - 1.$$
$$n = 2k + 1 : \pi_n(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q},$$
$$\pi_j(S^n) \otimes \mathbb{Q} = 0, \quad j \neq n.$$

De la demostración del corolario 2 se deduce del siguiente hecho (véase el § 7):

$$H^*(\Omega(S^n), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}[x_{n-1}], & n = 2k + 1, \\ \Lambda[x_{n-1}] \otimes \mathbb{Q}[x_{2n-2}], & n = 2k. \end{cases}$$

COROLARIO 3. *Si X es un complejo $(n - 1)$-conexo (o sea, $\pi_j(X) = 0$ para $j < n$), entonces para todos los grupos $\pi_q(X)$ para $q < 2n - 1$, tenemos el isomorfismo*

$$H: \pi_q(X) \otimes \mathbb{Q} \to H_q(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

La demostración se reduce al hecho de que los productos de cohomologías pueden surgir sólo en la dimensión $2n$. Por eso el anillo $H^*(X; \mathbb{Q})$ para un complejo $(n - 1)$-conexo es siempre libre, hasta la dimensión $2n - 1$.

PROBLEMA 4. Calcular los grupos homotópicos de los ramos de esferas $S^k \vee S^q$, $\pi_i(S^k \vee S^q) \otimes \mathbb{Q}$.

En todos los casos, el cálculo de los grupos $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ para los complejos simplemente conexos se reduce al cálculo de las homolo-

gías racionales $H^*(\Omega(X); \mathbb{Q})$, ya que este anillo es un álgebra anticonmutativa libre, en virtud del § 7.

COROLARIO 4. *Si X tiene un tipo homotópico de un H-espacio hasta la dimensión N, entonces $H^*(X; \mathbb{Q})$ en un álgebra libre hasta la dimensión $N-1$ y tiene lugar el isomorfismo*

$$\Big(\sum_{i\leqslant N-2} \pi_i(X)\otimes \mathbb{Q}\Big)^* = \sum_{i\leqslant N-2} H^i(X; \mathbb{Q})/\Gamma,$$

donde Γ consta de todos los elementos descomponibles en productos no triviales y M^* es un espacio conjugado a M.

IV. Aplicación a los espacios fibrados vectoriales. Clases características.

Consideremos una aplicación natural $G_{k,N}\times G_{l,M} \xrightarrow{\psi} G_{k+l,\,N+M}$, engendrada por una suma directa de los espacios lineales. Aquí $G_{k,N}$ es una de las variedades de Grassmann reales, complejas y cuaternias. Cuando $N\to\infty$, $M\to\infty$, obtendremos la aplicación

$$G_{k,\infty}\times G_{l,\infty}\xrightarrow{\psi} G_{k-l,\,\infty}$$

o (véase [1], parte II, § 24)

$$BG_k\times BG_l\xrightarrow{\psi} B(G_{k+l}),$$

donde BG_n es un espacio clasificador (universal) del grupo G_n y G_n es uno de los grupos $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$. Ahora notemos, que, según los resultados [1], parte II, § 24, con encajes $O(n)\subset O(n+1)$, $SO(n)\subset SO(n+1)$, $U(n)\subset U(n+1)$, $Sp(n)\subset Sp(n+1)$, el tipo homotópico «se estabiliza»: exactamente esto significa, que para cualquier complejo X de dimensión $<N$ hay un isomorfismo de clases homotópicas de aplicaciones $[X, BG]$

$$[X, G_{k,\infty}] = [X, G_{k+1,\infty}],$$

donde $N = k$ para $G = O(n)$, $SO(n)$,

$$N = 2k \quad \text{para} \quad G = U(n),\ SU(n),$$
$$N = 4k \quad \text{para} \quad G = Sp(n).$$

Hablando en rigor, en [1], parte II, § 24, esto fue demostrado para $[X, G]$. Puesto que $\pi_i(G) = \pi_{i+1}(BG)$, de la igualdad $\pi_i(G_1, G_2) = 0$ para un encaje (de grupo) $G_2\subset G_1$ se deduce

$$\pi_{i+1}(BG_1, BG_2) = 0$$

para los mismos valores de i. Por eso el encaje $BG_1\to BG_2$ para los pares indicados (G_1, G_2) estabiliza el tipo homotópico.

Es posible introducir un «límite» $G_\infty = 0, SO, U, SU, Sp$:

$$0 = \lim_{N\to\infty} O(1) \subset O(2) \subset \ldots \subset O(N) \subset \ldots,$$
$$SO = \lim_{N\to\infty} SO(1) \subset SO(2) \subset \ldots \subset SO(N) \subset \ldots,$$
$$U = \lim_{N\to\infty} U(1) \subset U(2) \subset \ldots \subset U(N) \subset \ldots,$$
$$SU = \lim_{N\to\infty} SU(1) \subset SU(2) \subset \ldots \subset SU(N) \subset \ldots,$$
$$Sp = \lim_{N\to\infty} Sp(1) \subset Sp(2) \subset \ldots \subset Sp(N) \subset \ldots$$

Para los grupos G_∞ los espacios universales BG_∞ ya son H-espacios

$$G_\infty \times G_\infty \to G_\infty \text{ (suma directa)},$$
$$BO \times BO \xrightarrow{\psi} BO,$$
$$BSO \times BSO \xrightarrow{\psi} BSO,$$
$$BU \times BU \xrightarrow{\psi} BU,$$
$$BSU \times BSU \xrightarrow{\psi} BSU,$$
$$BSp \times BSp \xrightarrow{\psi} BSp,$$

donde el papel de «unidad de H-espacio» $x_0 \in BG_\infty$ lo desempeña cualquier punto fijado (¡verifíquese!). Es posible decir de otra manera: el $BO(n)$ tiene un tipo homotópico de H-espacio hasta la dimensión $N = n$, el $BSO(n)$, hasta $N = n$; el $BU(n)$ y el $BSU(n)$, hasta la dimensión $N = 2n$; el $BSp(n)$, hasta la dimensión $N = 4n$. Más adelante (véase § 25) se mostrará, que $BU \cong \Omega(U)$, $BSp \cong \cong \Omega(\Omega(\Omega(SO)))$, $BSO \cong \Omega(\Omega(\Omega(Sp)))$.

Conocemos los anillos $H^*(G, \mathbb{Q})$ para $G = SO, U, SU, Sp$, véase § 7. De manera que, en virtud del teorema de Cartan — Serre, conocemos los grupos $\pi_i(G) \otimes \mathbb{Q}$, véase el corolario 1 más arriba. De este modo, los grupos $\pi_{i+1}(BG) \otimes \mathbb{Q} \approx \pi_i(G) \otimes \mathbb{Q}$ son también conocidos para nosotros. Al mismo tiempo, la base de los espacios conjugados $(\pi_j(BG) \otimes \mathbb{Q})^*$ hasta la dimensión N, coincide con la base multiplicativa del anillo $H^*(BG; \mathbb{Q})$ hasta la dimensión N (véase más arriba), ya que BG tiene un tipo homotópico de H-espacio en estas dimensiones.

Además, los anillos $H^*(BG; \mathbb{Q})$ siempre y en todas las dimensiones son álgebras anticonmutativas libres, incluso si BG no es un H-espacio. Esto se deduce del siguiente problema (teorema de Borel):

PROBLEMA 5 Sea dado un espacio fibrado de Serre $E \xrightarrow{p} B$, la fibra $F = \Omega(B)$, donde E es contractable y B es simplemente conexo. Si $H^*(F; \mathbb{Q})$ es un álgebra exterior, entonces $H^*(B; \mathbb{Q})$ es un álgebra de polinomios. Para el caso $H^*(F; \mathbb{Q}) = \wedge[x]$ este teorema fue demostrado más arriba. Demostrar, al principio, este hecho para $H^*(F; \mathbb{Q}) = \wedge[x_1, x_2]$, después para $\wedge[x_1, x_2, x_3]$ etc.

Para los grupos G tenemos:

$$H^*(BSO(2k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_{k-1}, \chi], \quad \deg p_i = 4i, \quad \deg \chi = 2k, \quad p_k = \chi^2;$$

$$H^*(BSO(2k+1); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_k], \quad \deg p_i = 4i;$$

$$H^*(BU(k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c_1, \ldots, c_k], \quad \deg c_i = 2i;$$

$$H^*(BSU(k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c_2, \ldots, c_k], \quad \deg c_i = 2i;$$

$$H^*(BSp(k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \quad \deg \gamma_i = 4i.$$

Con esto, de una construcción explícita de clases características de Chern c_i (y la construcción explícita de todas las demás clases que de ella se deduce, véase el § 9) sabemos, que las clases c_i, χ, p_i, γ_i tienen coeficientes enteros, es decir, pertenecen a una imagen $H^*(BG; \mathbb{Z}) \to H^*(BG; \mathbb{Q})$. Siguiendo el análogo homotópico de la técnica ordinaria de la teoría de grupos de Lie, ligada a un subgrupo de Cartan (maximal conmutativa), consideremos también el caso de toro maximal $T^n \overset{i}{\subset} G$:

$$T^k \overset{i}{\subset} SO(2k),$$

$$T^k \overset{i}{\subset} SO(2k+1),$$

$$T^k \overset{i}{\subset} U(k),$$

$$T^{k-1} \overset{i}{\subset} SU(k),$$

$$T^k \overset{i}{\subset} Sp(k).$$

Para $G_n = T^n$ tenemos, según los resultados del § 7 (más arriba): $BG_n = BT^n = \mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$ y $H^*(BT^n; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_n], \quad t_i \in H^2(BT^n; \mathbb{Z})$.

PROBLEMA 6. Demostrar que la aplicación

$$H^*(BG; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^*(BT^n; \mathbb{Q})$$

no tiene núcleo (homomorfismo) y la imagen Im i^* se compone exactamente de polinomios invariantes respecto al grupo de Weyl. Para $U(n)$ el grupo de Weyl se compone de todas las permutaciones de las generatrices t_i. Para $SO(2n)$ el grupo de Weyl también contiene reflexiones de los pares $(t_i, t_j) \mapsto (-t_i, -t_j)$. Para $SO(2n+1)$ el grupo de Weyl contiene también todas las reflexiones $t_i \mapsto t_i$.

Para $Sp(n)$ el grupo de Weyl es el mismo que para $SO(2n+1)$.

Así, la imagen Im $i^*(H^*(BG; \mathbb{Q})) \subset H^*(BT^n; \mathbb{Q})$ es de la forma:

a) $SO(2k), i^*(p_q) = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_q} t_{i_1}^2 \ldots t_{i_q}^2, \; i^*(\chi_k) = t_1 \ldots t_k;$

b) $SO(2k+1), \; i^*(p_q) = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_q} t_{i_1}^2 \ldots t_{i_q}^2;$

c) $U(k), \; i^*(c_j) = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_j} t_{i_1} \ldots t_{i_j}, \; c_k = \chi;$

d) $Sp(k), \; i^*(\gamma_j) = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_j} t_{i_1}^2 \ldots t_{i_j}^2.$

Comparar estas fórmulas con [1], parte II, § 25, donde se escogió la base de los «polinomios de Newton»: $\sum t_i^m = \tilde{c}_m$.

PROBLEMA 7. Deducir las fórmulas de la relación entre las clases c_i y $\tilde{c}_m$. Hallar las fórmulas para las clases $p_j(r\xi)$ para hacer real un U-espacio fibrado ξ mediante las clases $c_q(\xi)$.

PROBLEMA 8. Deducir los hechos indicados sobre las cohomologías $H^*(BG; \mathbb{Q})$ de las sucesiones espectrales, escogiendo los espacios fibrados necesarios.

PROBLEMA 9. Demostrar, que para un complejo X de dimensión $<N$, las clases homotópicas de las aplicaciones $[X, BG_n]$, o las clases de equivalencia de los espacios fibrados vectoriales «estables» con fibra $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{H}^n$ (los $\mathbb{H}$ son cuaternios), forman grupos abelianos, puesto que BG es un H-espacio ($N = n$ para O, SO; $N = 2n$ para U, SU; $N = 4n$ para Sp). La adición de las aplicaciones $X \to BG$ se engendra mediante la multiplicación ψ en BG (o mediante la suma directa de espacios fibrados, véase más arriba).

Demostrar las igualdades

$$[X, BG_n] \otimes \mathbb{Q} \approx \mathrm{Hom}\,(H^*(BG_n; \mathbb{Q}), \; H^*(X; \mathbb{Q}))$$

(se tienen en cuenta los homomorfismos de los anillos) o, lo que es lo mismo: en un grupo $[X, BG_n]$ los espacios fibrados vectoriales son definidos completamente por las clases características, con exactitud hasta los elementos de orden finito.

La suma directa de espacios fibrados se define por el encaje de bloque (analógicamente para O, SO, SU, Sp):

$$U(m) \times U(n) \subset U(m+n).$$

Con esto los toros maximales se multiplican directamente. Los juegos de las generatrices $t'_1, \ldots, t'_m \in H^2(BT^m; \mathbb{Q})$ para $U(m)$ y $t''_1, \ldots, t''_n \in H^2(BT'_1; \mathbb{Q})$ para $U(n)$ forman un juego de generatrices $t_1, \ldots, t_{m+n} \in H^2(BT^{m+n}; \mathbb{Q})$ para el grupo $U(m+n)$. Aquí $t_i = t'_i$ para $1 \leqslant i \leqslant m$ y $t_{j+m} = t''_j$ para $1 \leqslant j \leqslant n$.

Descomponiendo un polinomio simétrico elemental $c_i(t_1, \ldots, t_{n+m})$ mediante $c_j(t'_1, \ldots, t'_m) = c'_j$ y $c''_q = c_q(t''_1, \ldots, t''_n)$ obtenemos las fórmulas de adición, indicadas en el § 9 sin demostración:

$$c_i = \sum_{j+q=i} c'_j c''_q.$$

O, para la magnitud $c(z) = \sum c_i z^i$, $c'(z) = \sum c_j z^j$, $c''(z) = \sum c''_q z^q$, $c_0 = 1$, tenemos:

$$c(z) = c'(z)\, c''(z). \tag{1}$$

Ahora consideremos el «carácter de Chern» ($G = U(n)$):

$$\operatorname{ch} \xi = \sum_{i=1}^{n} \exp(zt_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(zt_i)^m}{m!} \right).$$

Para la suma $\xi \oplus \eta$ tenemos

$$\operatorname{ch}(\xi + \eta) = \operatorname{ch} \xi + \operatorname{ch} \eta. \tag{2}$$

PROBLEMA 10. Deducir formalmente (2) de (1) y viceversa, sin recurrir a las generatrices t_i en un toro maximal.

El producto tensorial de espacios fibrados $\xi \otimes \eta$ se determina mediante el encaje (análogamente que para O, SO)

$$U(m) \times U(n) \to U(mn).$$

Con esto, los toros maximales están relacionados de una forma más compleja: se tiene una aplicación de toros

$$T^m \times T^n \xrightarrow{\varphi} T^{mn},$$
$$BT^m \times BT^n \xrightarrow{\varphi} BT^{mn}$$

tal, que

$$\varphi^*(t_{jk}) = t'_j + t''_k, \tag{3}$$

donde

$$t_{jk} \in H^2(BT^{mn}; \mathbb{Q}), \quad t'_j \in H^2(BT^m; \mathbb{Q}),$$
$$t''_k \in H^2(BT^n; \mathbb{Q}).$$

La fórmula (3) se deduce inmediatamente de la fórmula explícita para la aplicación φ en las matrices diagonales (¡verifíquese!).

De la fórmula (3) se deduce que

$$\operatorname{ch}(\xi \otimes \eta) = \operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta, \tag{4}$$

por cuanto

$$\operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta = \left(\sum_{i=1}^{m} \exp(zt_i')\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \exp(zt_j'')\right) = \\ = \sum_{i,j} \exp[z(t_i' + t_j'')] = \varphi^*\left(\sum_{i,j} \exp(zt_{ij})\right).$$

Para los espacios proyectivos complejos $\mathbb{C}P^n$ tenemos (véase el problema en [1], parte II, § 24)

$$\tau(\mathbb{C}P^n) \oplus 1 = \eta \oplus \ldots \oplus \eta \ (n+1 \text{ sumandos}), \tag{5}$$

donde $c_1(\eta) = t \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$, $\tau(\mathbb{C}P^n)$, es un espacio fibrado tangente. De la fórmula (5) junto con (1) obtenemos

$$c(z) = (1+zt)^{n+1} = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n,$$
$$p(z) = (1 - z^2t^2)^{n+1} = 1 + p_1 z^2 + \ldots + p_k z^{2k} + \ldots \tag{6}$$

Aquí $t_1 = t_2 = \ldots = t_{n+1} = t$ para un espacio fibrado $\tau \oplus 1$ y $p_i(\tau) = (-1)^i c_{2i}(\tau \oplus \overline{\tau})$; por definición de clases $p_i(\gamma) = (-1)^i c_{2i}(c\gamma)$; pero para $\gamma = r\xi$ tenemos $c\gamma = cr\xi = \xi \oplus \overline{\xi}$ (véase [1], parte II, § 24). Como $c_i(\overline{\xi}) = (-1)^i c_i(\xi)$, obtenemos:

$$p_1(\eta) = -c_2(\eta \oplus \overline{\eta}) = t^2, \quad p_i(\eta) = 0, \quad i > 1.$$

De aquí se deduce que

$$p_i(\tau) = (-1)^i c_{2i}(\tau \oplus \overline{\tau}),$$
$$\left(1 + \sum p_i(\tau) z^{2i}\right) = (1 - z^2t^2)^{n+1} = p(\mathbb{C}P^n). \tag{7}$$

PROBLEMA 11. Hallar el carácter de Chern de los grados simétricos $S^i\xi$ y de los grados exteriores $\Lambda^i\xi$ del U-espacio fibrado ξ.

PROBLEMA 12. Hallar las clases y el carácter de Chern para los productos directos $\mathbb{C}P^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}P^{n_s}$

PROBLEMA 13. Examinar la clase c_1 para variedades X_k^{n-1}, dadas en $\mathbb{C}P^n$ por una ecuación algebraica (no singular) de grado k. Demostrar que la condición $c_1(X_k^{n-1}) = 0$ es equivalente a $k = n + 1$.

PROBLEMA 14. Hallar la característica de Euler $\chi(X_k^{n-1})$ y el número $[c_1^{n-1}, [X_k^{n-1}]]$.

PROBLEMA 15. Investigar los casos $k = 4$, $k = 3$. Hallar las homologías X_4^2.

PROBLEMA 16. Demostrar que las hipersuperficies dadas por la ecuación no singular en $\mathbb{C}P^n$, son simplemente conexas.

V. Clasificación de las operaciones de Steenrod en las dimensiones pequeñas

Trataremos de mostrar un método de cálculo de los grupos homotópicos de esferas, basado en el hecho de la existencia de la sucesión espectral con sus propiedades formales (véase el teorema de Leray), la existencia y las propiedades formales de las operaciones de Steenrod Sq^i y St_p^i, y también de los complejos de Eulenberg — MacLane $K(\pi, n)$ para $\pi = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p n$ (y de este modo para todos los grupos abelianos con un número finito de generatrices). Para esto es necesario calcular, al principio, todas las operaciones cohomológicas de mod p. Construimos un complejo $K = K(\pi, n)$ para cualquier grupo abeliano, según el siguiente esquema:

a) se tiene sólo una célula $\sigma^0 \in K(\pi, n)$;

b) no hay células de dimensión i, donde $1 \leqslant i \leqslant n-1$;

c) las células σ_j^n están en correspondencia biunívoca con las generatrices $x_j \in \pi$;

d) las células σ_k^{n+1} se pegan al armazón K^n ya construido conforme a las relaciones γ_k entre las generatrices x_j de un grupo π,

$$K^{n+1} = (\bigcap_k \sigma_k^{n+1}) \bigcup_{\gamma_k} K^n,$$

$\gamma_k = \{\sum_j \lambda_{jk} x_j = 0,\ \lambda_{jk}$ son números enteros$\}$, $\gamma_k : \partial\sigma_k^{n+1} \to K^n$. Para el armazón K^{n+1} obtenemos

$$\pi_j(K^{n+1}) = 0, \quad j < n,$$
$$\pi_n(K^{n+1}) = \pi.$$

Escogemos alguna base de las generatrices $\alpha_j \in \pi_{n+1} \times (K^{n+1})$ y hagamos pegadura de célula (véase el § 4)

$$(\bigcup_j \sigma_j^{n+2}) \bigcup_{\alpha_j} K^{n+1} = K^{n+2},$$
$$\alpha_j : \partial\sigma^{n+2} \to K^{n+1}.$$

Obtendremos un armazón K^{n+2}. De los teoremas generales de la aproximación celular tenemos, según el § 4:

$$\pi_j(K^{n+2}) = \pi_j(K^{n+1}), \quad j \leqslant n,$$
$$0 = \pi_{n+1}(K^{n+2}) = \pi_{n+1}(K^{n+1})/(\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Iterando esta construcción, «matamos» los grupos $\pi_{n+2}(K^{n+2})$, pasando a K^{n+3}, después matamos $\pi_{n+3}(K^{n+3})$, pasando a K^{n+4}, etc. En el límite $n + q \to \infty$ obtendremos un complejo celular infinito $K(\pi, n)$.

9—01126

Pero la misma construcción $K(\pi, n)$ no nos importa, lo importante, es que este complejo existe. Sabemos lo siguiente:

a) $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$, $H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[t]$, $t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_p)$ para todos los $p \geqslant 2$.

b) $K(\mathbb{Z}_{p^h}, 1) = S^\infty / \mathbb{Z}_{p^h} = \lim\limits_{N\to\infty} L^{2N+1}_{p^h}(1, 1, \ldots, 1)$.

Tenemos el espacio fibrado (véase el § 4)

$$L^{2N+1}_{p^h}(1, 1, \ldots, 1) \underset{p}{\overset{S^1}{\rightarrow}} \mathbb{C}P^N, \tag{8}$$

que se obtiene de un espacio fibrado generalizado de Hopf ([1], parte II, § 2)

$$S^{2N+1} \underset{p}{\overset{S'}{\rightarrow}} \mathbb{C}P^N$$

mediante factorización de la esfera $S^{2N+1} = \{z_0, \ldots, z_N, \sum |z_j|^2 = 1\}$ por un grupo $\mathbb{Z}_p h$: $(z_0, \ldots, z_N) \to (\exp[2\pi i/p^h] z_0, \ldots, \exp[2\pi i/p^h] z_N)$. Calculando las cohomologías de un espacio fibrado (8) de la sucesión espectral sobre $\mathbb{Z}$, tenemos

1	u	0	uv	0	uv^2	0
0	1	0	v	0	v^2	0
	0	1	2	3	4	...

$d_2: u \to p^h v, \quad v \to 0, \quad uv \to p^h v^2,$ . . . . $uv^k \to p^h v^{k+1}$.

Por eso

$$H^{2q}(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{p^h}, \quad q = 1, 2, 3, \ldots$$

$$H^{2q+1}(K; \mathbb{Z}) = 0, \quad q > 0.$$

Tenemos sobre un campo $\mathbb{Z}_p$:

$$d_2 u = 0, \quad d_2 v = 0, \quad E_2^{p,q} = E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

Tenemos:

$$H^*(K(\mathbb{Z}_{p^h}\ 1), \mathbb{Z}_p) = \Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}_p[v],$$

un álgebra libre (puesto que el álgebra adjunta E_∞^* es libre, entonces la propia H^* $(K, \mathbb{Z}_p)$ es libre). Según la información sobre las cohomologías con coeficientes enteros, tenemos en $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$:

$$\delta_j(uv^k) = 0, \quad j < h, \ \delta_q(v^k) = 0 \text{ (para todos los } q),$$

$$\delta_h u = v, \quad \delta_h(uv^k) = v^{k+1}$$

A propósito, notemos la propiedad

$$\delta_v (uv) = (\delta_h u) v \pm u (\delta_h v),$$

si ambos $\delta_h (u)$, $\delta_h (v)$ están determinados. Esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición de δ_h mediante un operador de frontera sobre las cocadenas con coeficientes enteros.

PROBLEMA 17. Utilizando la información arriba mencionada demostrar, que $H^* (K (\mathbb{Z}_p{}^h, n), \mathbb{Z}_q) = 0$, p y q son primos entre sí.

En una sucesión espectral de cualquier espacio fibrado con la base simplemente conexa (véase el § 8) en las cohomologías, tenemos

$$E_2^{q,0} = H^q (B), \quad E_2^{0,q} = H^q (F).$$

Tenemos las aplicaciones $p: E \to B$, $i: F \to E$,

$$p^* : H^q (B) \to H^q (E, F) \quad \text{es una “proyección”},$$
$$i^* : H^q (E) \to H^q (F) \quad \text{es una “restricción”}.$$

Es posible definir una aplicación multiforme: la transgresión

$$H^q (F) \supset A^q \xrightarrow{\tau=(p^*)^{-1}\delta} H^{q+1} (B),$$

donde

$$\delta : H^q (F) \to H^{q+1} (E, F) \quad \text{y} \quad A^q = \delta^{-1} (p^* H^{q+1} (B) \cap \operatorname{Im} \delta)$$

es el dominio de definición de un homomorfismo multiforme, no definido por doquier. Es evidente, que $A^q \supset \operatorname{Im} i^*$ y, con esto, $\tau (\operatorname{Im} i^*) = 0$. La definición de transgresión mediante diferenciales d_r es la siguiente:

$$A^q = \bigcap_{r \leqslant q} \operatorname{Ker} d_r = E_{q+1}^{0,q} \subset H^q (F),$$
$$\tau = d_{q+1} \text{ en el grupo } A^q.$$

Puesto que todas las operaciones Sq^i, St_p^i, δ, δ_h conmutan con las aplicaciones continuas $p^*\theta = \theta p^*$, y también con el homomorfismo δ: $H^q (F) \to H^{q+1} (E, F)$ en las $\mathbb{Z}_p$-cohomologías, tenemos que todas las operaciones estables δ, δ_h, Sq^i, St_p^i conmutan con la transgresión $\tau\theta = \theta\tau$. Esto significa, que para los elementos $x \in A^q$, donde está definida la transgresión (para los elementos «transgresivos»), sus imágenes se encuentran también en el dominio de definición de la transgresión (son «transgresivos»), y con esto es justa la igualdad:

$$\theta\tau = \tau\theta, \quad \theta = \delta, \ \delta_h, \ Sq^i, \ St_p^i. \tag{9}$$

Calculemos ahora algunas cohomologías «estables» de los complejos $K (\mathbb{Z}, n)$ y $K (\mathbb{Z}_{p^h}, n)$.

El caso $K = K(\mathbb{Z}, n)$, $p = 2$. Para $n = 1, 2$ es conocida la respuesta, $H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[u]$, $\deg u = 2$. Consideremos una sucesión espectral del espacio fibrado $E \to K(\mathbb{Z}, 3)$, $F = \Omega(B) = K(\mathbb{Z}, 2)$. En el término $E_2^{p,q}$ tenemos $E_2^{0,q} = H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ sabemos, que un elemento $u \in H^2(F; \mathbb{Z}_2)$ es transgresivo por causas triviales y, al mismo tiempo, $\tau(u) = d_3(u) = v \in H^3(B; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. En virtud de las propiedades de las operaciones Sq^i (véase el punto I de este parágrafo y las propiedades de la transgresión) los elementos $Sq^2(u) = u^2$, $Sq^4Sq^2(u) = (u^2)^2 = u^4$ son transgresivos, y con esto

$$\begin{aligned} &\tau(u^4) = Sq^2(v) \in H^5(B; \mathbb{Z}_2), \\ &\tau(u^8) = Sq^4\, Sq^2(v) \in H^9(B, \mathbb{Z}_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

Se deduce inmediatamente de aquí, que el álgebra $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ tiene forma de un álgebra de polinomios de las generatrices $\tau(u^{2^i})$:

$$H^*(B; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[v,\ Sq^2v,\ Sq^4sq^2v,\ \ldots,]$$
$$B_3 = B = K(\mathbb{Z}, 3), \quad \delta_h v = 0, \ Sq^3 v = v_2.$$

Ahora pasemos a los siguientes espacios fibrados:

$$E \to B_n, \quad F = K(\mathbb{Z}, n-1), \quad B_n = K(\mathbb{Z}, n).$$

Al pasar de $F = K(\mathbb{Z}, 3)$ a $B = B_4 = K(\mathbb{Z}, 4)$ obtendremos por analogía, los viejos elementos transgresivos en $E_2^{0,q} = H^q(F; \mathbb{Z}_2)$:

$$v,\ Sq^2v,\ \ldots,\ Sq^{2^i}\, Sq^{2^{i-1}} \ldots Sq^2v,$$

y también los nuevos, logrados mediante la potenciación de forma 2^i: $v^2 = Sq^3v$, $v^4 = Sq^6Sq^2v$, ... Iterando este procedimiento obtendremos las primeras cohomologías $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_2)$ para $q < n$ (las generatrices están indicadas)

$q=0$	1	2	3	4
u	0	Sq^2u	Sq^3u	Sq^4u
$q=5$	6	7	8	9
Sq^5u	Sq^6u Sq^4Sq^2u	Sq^7u Sq^5Sq^2u	Sq^8u Sq^6Sq^2u	Sq^9u Sq^7Sq^2u Sq^6Sq^3u

Para $K = K(\mathbb{Z}_2, n)$ el razonamiento es completamente análogo, pero comienza con el espacio fibrado

$$E \to B = K(\mathbb{Z}_2, 2), F = K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty.$$

Aquí son transgresivos los elementos

$$u \in H^1(F; \mathbb{Z}_2), \quad Sq^1 u = \delta_* u = u^2,$$
$$Sq^2 Sq^1 u = (u^2)^2, \ \ldots, \ Sq^{2^i} Sq^{2^{i-1}} \ldots Sq^2 Sq^1 u = ((u^2)^2 \ldots)^2.$$

Iterando este razonamiento obtendremos una tabla de los grupos «estables» $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$, $q < n$

$q=$	0	1	2	3	4	5	6
	u	Sq^1u	Sq^2u	Sq^3u Sq^2Sq^1u	Sq^4u Sq^3Sq^1u	Sq^5u Sq^4Sq^1u	Sq^6u Sq^5Sq^1u Sq^4Sq^2u

OBSERVACIÓN: En los cálculos sucesivos utilizaremos sólo los grupos $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_2)$ con pequeños $q < 7$, por eso no necesitamos las demostraciones de los detalles de las afirmaciones efectuadas; para pequeños $q < 7$ todas estas afirmaciones se verifican por una consideración elemental de las sucesiones espectrales (véase más arriba).

También indiquemos $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_{2^h}, n); \mathbb{Z}_2)$, $q < n$:

$q=0$	1	2	3	4
u	$\delta_h u$	Sq^2u	Sq^3u $Sq^2\delta_h u$	Sq^4u $Sq^3\delta_h u$

No efectuamos el análisis completo del caso análogo $K = K(\mathbb{Z}_{p^h}, n)$ y de las cohomologías $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$. Las soluciones son las siguientes:

Para $K = K(\mathbb{Z}, n)$ tenemos $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$, $q < n$

$q=0$	1	2	...	$2p-2$	$2p-1$
u	0	0	0	$St_p^1 u$	$\delta_* St_p^1 u$

Para $K = K(\mathbb{Z}_{p^h}, n)$ tenemos $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$, $q < n$

$q=0$	1	2	...	$2p-2$	$2p-1$
u	$\delta_h u$	0	0	$St_p^1 u$	$\delta_* St_p^1 u$ $St_p^1 \delta_h u$

(para $h = 1$ tenemos $\delta_1 = \delta^*$).

Así vemos, que todas las operaciones cohomológicas «estables» θ en dimensiones indicadas se reducen a la iteración de cuadrados y grados Sq^i, St_p^i, δ_*, donde

$$\theta : H^n(K, L; \mathbb{Z}_p) \to H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$

y conmutan con un homomorfismo de cofrontera. En cuanto a las operaciones estables de forma

$$\theta : H^n(K, L; \mathbb{Z}) \to H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$
$$\theta : H^n(K, L; \mathbb{Z}_{p^h}) \to H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$

todas ellas se reducen a las operaciones St_p^i, Sq^i, δ_* (después de la reducción según el módulo p) y, además, a las operaciones de la misma forma efectuadas con el elemento $\delta_h u$.

La operación estable θ: $H^n(X; \mathbb{Z}_p) \to H^{n+q}(X; \mathbb{Z}_p)$ tiene, como se dice, una «dimensión» q:

$$\deg \theta = q.$$

Todas las operaciones estables forman un «álgebra de Steenrod» graduada A_p

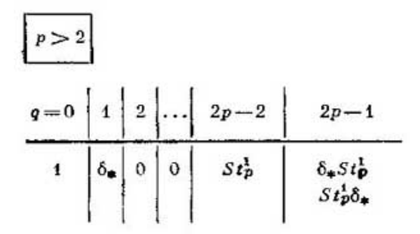
$$A_p = A = \sum_{q=0} A^q$$

donde A^0 son escalares y A^q se compone de todas las operaciones de grado q.

De nuestros resultados (véanse las tablas más arriba) obtenemos una base de las álgebras $A_p = A$ en las dimensiones pequeñas q:

$p=2$

$q=0$	1	2	3	4	5	6	7
1	Sq^1	Sq^2	Sq^3 Sq^2Sq^1	Sq^4 Sq^3Sq^1	Sq^5 Sq^4Sq^1	Sq^6 Sq^5Sq^1 Sq^4Sq^2	Sq^7 Sq^6Sq^1 Sq^5Sq^2 $Sq^4Sq^2Sq^1$



$p > 2$

$q=0$	1	2	...	$2p-2$	$2p-1$
1	δ_*	0	0	St_p^1	$\delta_* St_p^1$ $St_p^1 \delta_*$

Prestemos, atención a un corolario curioso de los resultados obtenidos, esencial para $p = 2$: la base de operaciones es menor que todos los posibles productos (superposiciones) de operaciones de Steenrod Sq^{i_1}, Sq^{i_2} . . . Sq^{i_k}. Esto significa que hay relaciones no triviales entre los productos de las operaciones Sq^i. La idea del hallazgo de estas relaciones es la siguiente: consideremos los productos $\mathbb{R}P_1^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P_n^\infty$ y un elemento

$$u = t_1 \ldots t_n \in H^n (\mathbb{R}P_1^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P_n^\infty; \mathbb{Z}_2),$$
$$0 \neq t_i \in H^1 (\mathbb{R}P_i^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

Para el elemento t_i tenemos $Sq^1 t_i = t_i^2$, $Sq^0 t_i = t_i$, $Sq^j t_i = 0$ para $j \neq 0, 1$. De aquí se deduce que cualquier operación de forma $Sq^{i_1} \ldots Sq^{i_k} (u)$ puede ser calculada, partiendo sólo de las propiedades formales de las operaciones de Steenrod $Sq^i (xy) = \sum_{j+k=i} Sq^j(x)\, Sq^k (y)$. Al mismo tiempo resultará, que todas las operaciones básicas $\theta \in H^{n+q} (K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$, para $q < n$, actúan no trivialmente en el elemento u: $\theta (u) \neq 0$, si $\theta \neq 0$.

Comprobamos esto directamente para $q \leqslant 9$:

$$q = 1: \quad Sq^1 u = \Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)\, u;$$

$$q = 2: \quad Sq^2 u = \Big(\sum_{i<j} t_i t_j\Big)\, u;$$

$$q = 3: \quad Sq^3 u = \Big(\sum_{i<j<k} t_i t_j t_k\Big)\, u;$$

$$Sq^2\, Sq^1 u = \Big(\sum_i t_i\Big) \Big(\sum_{i<j} t_i t_j\Big)\, u = \sigma_1 \sigma_2 u.$$

(Sea $\sigma_j = \sum_{i_1 < \ldots < i_j} t_{i_1} \ldots t_{i_j}$ un polinomio simétrico elemental.)

$$
\begin{aligned}
q=4:\quad & Sq^4 u = \Big(\sum_{i<j<k<l} t_i t_j t_k t_l\Big) u \quad \sigma_4 u\\
& Sq^3\, Sq^1 u = \sigma_3\sigma_1 u;\\
q=5:\quad & Sq^5 u = \sigma_5 u, \quad Sq^4\, Sq^1 u = \sigma_4\sigma_1 u;\\
q=6:\quad & Sq^6 u = \sigma_6 u, \quad Sq^5\, Sq^1 u = \sigma_5\sigma_1 u,\\
& Sq^2 u = \sigma_4\sigma_2 u; \qquad\qquad (11)\\
q=7:\quad & Sq^7 u = \sigma_7 u, \quad Sq^6\, Sq^1 u = \sigma_6\sigma_1 u;\\
& Sq^5\, Sq^2 u = \sigma_5\sigma_2 u \quad Sq^4\, Sq^2\, Sq^1 u = \sigma_4\sigma_2\sigma_1 u;\\
q=8:\quad & Sq^8\, u = \sigma_8 u, \quad Sq^7\, Sq^1 u = \sigma_7\sigma_1 u,\\
& Sq^6\, Sq^2 u = \sigma_6\sigma_2 u; \quad Sq^5\, Sq^2\, Sq^1 u = \sigma_5\sigma_2\sigma_1 u.
\end{aligned}
$$

Como se ve de la tabla presentada todas las operaciones básicas $\theta \in A^q = A_2^q$ con $q \leqslant 8$ actúan independiente y linealmente en un elemento u:

$$\theta(u) = 0 \leftrightarrow \theta = 0$$

Vemos, que para una base en el álgebra de Steenrod $A = A_2$ son suficientes los productos de forma

$$Sq^{i_k} \ldots Sq^{i_1} \qquad (12)$$

donde $i_k \geqslant 2i_{k-1},\ i_{k-1} \geqslant 2i_{k-2}, \ldots, i_2 \geqslant 2i_1$.

Todos los productos de forma (12) son independientes linealmente y dan una base aditiva completa en el álgebra A_2.

Vamos a buscar las relaciones de forma

$$Sq^i\, Sq^j = \sum_{a \geqslant 2b} \lambda_{a,b}^{i,j}\, Sq^a\, Sq^b,$$

donde $a \geqslant 2b,\ 0 < i < 2j$.

PROBLEMA 18. Hallar los coeficientes $\lambda_{a,b}^{i,j}$ para todos los q.

Para $q \leqslant 8$, mediante cálculo directo de la tabla (11) obtenemos $\lambda_{a,b}^{i,j} = \delta_{a+b}^{i+j} C_{j-b-1}^{i-2b}$ (esto siempre es justo). Así, tenemos la tabla de relaciones

$$
\begin{aligned}
& Sq^1\, Sq^1 = \delta_*^2 = 0,\\
& Sq^1\, Sq^2 = Sq^3,\\
& Sq^1\, Sq^3 = 0 \quad Sq^1 Sq^{2q} = Sq^{2q+1} \qquad\qquad (13)\\
& Sq^2\, Sq^2 = Sq^3\, Sq^1. \quad Sq^2\, Sq^4 = Sq^5\, Sq^1.\\
& Sq^3\, Sq^3 = Sq^5\, Sq^1
\end{aligned}
$$

VI. Cálculo de los primeros grupos homotópicos estables no triviales de esferas.

Consideremos la aplicación $S^n \xrightarrow{f} K(\mathbb{Z}, n) = K$. Transformemos esta aplicación en un espacio fibrado, sin cambiar los tipos homotópicos; aquí f^* es un isomorfismo entre $H^n(S^n; \mathbb{Z})$ y $H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Para la fibra $F = F_1$ obtenemos de la sucesión exacta: $\pi_i(F) = 0$, $i \leqslant n$, $\pi_i(F) = \pi_i(S^n)$, $i \geqslant n+1$. En la dimensión $n + q < 2n$ la sucesión espectral del espacio fibrado se reduce a la sucesión exacta (τ es una transgresión)

$$0 \to H^{n+q}(F) \xrightarrow{\tau} H^{n+q+1}(K; \mathbb{Z}_p) \to 0, \quad \text{si} \quad q > 0,$$

puesto que $\sum\limits_{p+q=m} E_2^{p,q} = E_2^{m,0} + E_2^{0,m}$ para $p+q<2n$ y $H^{n+q}(S^n) = 0$, cuando $q > 0$, $H^n(S^n) \underset{f^*}{\approx} H^n(K)$.

Así tenemos:

$$\boxed{q > 0}$$

$$H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_p) \overset{\tau}{\approx} H^{n+q+1}(K; \mathbb{Z}_p).$$

donde $\tau Sq^i = Sq^i \tau$,

$$\tau\delta_h = \delta_h\tau, \quad \tau St_p^i = St_p^i\tau, \; H^j(F; \mathbb{Z}_p) = 0, \; j \leqslant n.$$

De la tabla de grupos $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$ se deduce el resultado para $H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_p)$:

$$\boxed{p > 2}$$

$q=0$	1	...	$2p-3$	$2p-2$
0	0	0	v	$\delta_* v$

CONCLUSIÓN. Para todos los $p > 2$ en los grupos $\pi_{n+q}(F) = \pi_{n+q}(S^n)$ con $0 < q < 2p - 3 < n$ no hay p-componentes no triviales; el grupo

$$\pi^{(p)}_{n+2p-3}(F) = \pi^{(p)}_{n+2p-3}(S^n) \neq 0,$$

ya que $\delta_* v \neq 0$; en la dimensión $2p - 3$ tenemos

$$H^{(p)}_{n+2p-3}(F; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p = \pi^{(p)}_{n+2p-3}(S^n).$$

Para $p = 2$ este razonamiento actúa de la misma manera, con esto, $\delta_* = Sq^1$ ($2p - 3 = 1$ para $p = 2$):

$$\pi^{(2)}_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2 = \pi_{n+1}(S^n), \ \pi^{(p)}_{n+1} = 0, \qquad p > 2.$$

Obtenemos cohomologías $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ junto con la acción de operaciones de Steenrod:

$p = 2$

$H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_2) = H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2) = A^{q+1}$

$q =$	1	2	3	4	5	6
	v	$Sq^1 v$	w $Sq^2 v = 0$	$Sq^1 w =$ $= Sq^2 Sq^1 v$	$Sq^4 v$ $Sq^2 w$	$Sq^3 w$ $Sq^5 v$

(14)

Aquí $\tau(v) = Sq^2 u$, $\tau(w) = Sq^4 u$. En virtud de la relación $Sq^2 Sq^2 = Sq^3 Sq^1$ tenemos junto con la condición $Sq^1 u = 0$;

$$Sq^2 v = 0. \tag{15}$$

Como $Sq^2 Sq^4 = Sq^5 Sq^1 + Sq^6$, es justa la correlación

$$Sq^2 w = Sq^6 u. \tag{16}$$

De la igualdad $Sq^2 Sq^3 = Sq^5 + Sq^4 Sq^1$ se deduce que

$$Sq^1 w = Sq^2 Sq^1 v \tag{17}$$

Pasamos al siguiente paso. Consideremos una aplicación (espacio fibrado)

$$F_1 = F \xrightarrow[f]{F_2} K(\mathbb{Z}_2, n+1),$$

donde $f_*: \pi_{n+1}(F) \pi_{n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1))$ es un isomorfismo. Obtenemos

$$\pi_j(F_2) = 0, \qquad j \leqslant n+1,$$
$$\pi_j(F_2) = \pi_j(F_1) = \pi_j(S^n), \qquad j > n+1$$

En el caso estable es cómodo representar como una sucesión exacta la sucesión espectral y la transgresión τ

$$H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q}(F_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} A^q \xrightarrow{f^*}$$
$$\xrightarrow{f^*} H^{n+q+1}(F; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q+1}(F_2; \mathbb{Z}_2),$$

además, i^* y τ conmutan con las operaciones de Steenrod, $A^q = H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1); \mathbb{Z}_2)$. Con la aplicación f^* la clase fundamental $u \in H^{n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1), \mathbb{Z}_2)$ pasa a v,

$$f^*(u) = v$$

Por eso la imagen f^*A se compone de las operaciones de Steenrod empleadas para un elemento v

$$f^*A^q = A^q(v)$$

Junto con la tabla de $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ (véase más arriba) obtenemos la tabla de homologías $H^*(F_2; \mathbb{Z}_2)$

$q=$	2	3	4	5	6
	x	$\tilde{w}$ Sq^1x	$Sq^1\tilde{w}=0$ $Sq^2x=\delta_2 w$	$Sq^2\tilde{w}$ $Sq^3x=0$	$Sq^3\tilde{w}$ Sq^4x

(18)

Aquí $\tilde{w} = i^*(w)$, y $x = \tau^{-1}(Sq^2 u)$, ya que teníamos $Sq^2 v = 0$ y $v = f^*(u)$, entonces $f^*(Sq^2u) = 0$. Por eso $Sq^2u = \tau(x)$, $x \in H^{n+2}(F_2; \mathbb{Z}_2)$. Por consiguiente $Sq^2(Sq^2u) = Sq^3Sq^1u \neq 0$. Por eso

$$f^*(Sq^2 Sq^2u) = \tau(Sq^2x), \quad Sq^2x \in H^{n+4}(F_2; \mathbb{Z}_2)$$

La relación $Sq^1\tilde{w} = 0$ apareció en la tabla (18) como resultado de correlación $Sq^1w = Sq^2Sq^1v$ en la tabla (14), puesto que $Sq^2Sq^1v = f^*(Sq^2Sq^1u)$.

Sean: $a = Sq^2Sq^1v = Sq^1w = \delta_1 w$; $b = Sq^2x = \tau^{-1}(Sq^2Sq^2u) = \tau^{-1}Sq^1(Sq^2Sq^1u)$. Tiene lugar la siguiente afirmación general:

LEMA 2. *Si $a = f^*(\bar{a}) = \delta_h w$ y $b = \tau^{-1}\delta_h(\bar{a})$, entonces los elementos b, $\tilde{w} = i^*w$ en $H^*(F_2; \mathbb{Z}_2)$ son tales, que $b = \delta_{h+1}\tilde{w}$.*

La demostración del lema se deduce de las propiedades elementales de un homomorfismo de cofrontera en un complejo de cadenas $C^*(E; \mathbb{Z})$. Los detalles se los dejamos al lector.

Basándonos en el lema 2, obtenemos: $Sq^1 = \delta_* = \delta_1$, $a = Sq^1w$, $b = Sq^2x$, $Sq^2x = \delta_2\tilde{w}$. Por eso, en particular, tenemos $Sq^3x = \delta_*\delta_2\tilde{w} = 0$.

CONCLUSIÓN. Como $Sq^1x = \delta_1 x \neq 0$, obtenemos el resultado ($\pi_{n+2} \times (F_2) = H_{n+2}(F_2; \mathbb{Z})$):

$$\pi_{n+2}(S^n) = \pi^{(2)}_{n+2}(S^n) = \pi^{(2)}_{n+2}(F_2) = \mathbb{Z}_2$$

Ahora pasemos al tercer paso. Consideremos una aplicación (el espacio fibrado)

$$F_2 \xrightarrow{f} K(\mathbb{Z}_2, n+2), \text{ fibra } F_3.$$

La aplicación $f_* \mid \pi_{n+2}(F_2)$ es un isomorfismo. Para F_3, de la sucesión exacta de los grupos homotópicos; se deduce:

$$\pi_j(F_3) = 0, \qquad j \leqslant n+2,$$
$$\pi_j(F_3) = \pi_j(F_2) = \pi_j(S^n) \quad j \geqslant n+3.$$

En el caso estable $q < n$ la sucesión espectral otra vez se reducirá a la exacta

$$H^{n+q}(F_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q}(F_3; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} A^{q-1} \xrightarrow{f^*} H^{n+q+1}(F_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*},$$

donde $A^{q-1} = H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+2); \mathbb{Z}_2)$.

Por definición, $x = f^*(u)$, donde u es una clase fundamental en las cohomologías $H^{n+2}(K(\mathbb{Z}_2, n+2); \mathbb{Z}_2)$. Por consiguiente, obtenemos

$$f^*(A^{q-1}) = A^{q-1}(x).$$

Para las cohomologías $H^{n+q}(F_3; \mathbb{Z}_2)$ obtenemos la tabla

$q=$	2	3	4	5
	0	$\tilde{\tilde{w}}$	$\delta_3\tilde{\tilde{w}}$	$Sq^2\tilde{\tilde{w}}$

Aquí $\tilde{\tilde{w}} = i^*\tilde{w}$ y $\delta_3\tilde{\tilde{w}} = \tau^{-1}\delta_2\tilde{w}$ según el lema 2 (véase más arriba).

DEDUCCIÓN. El grupo

$$\pi_{n+3}^{(2)}(S^n) = \pi_{n+3}^{(2)}(F_3) = H_{n+3}^{(2)}(F_3; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8,$$

puesto que $\delta_3\tilde{\tilde{w}} \neq 0$. Como $\pi_{n+3}^{(3)}(S^n) = \mathbb{Z}_3$, $\pi_{n+3}^{(p)}(S^n) = 0$ para $p > 3$, obtenemos definitivamente el siguiente teorema

TEOREMA 6. *Los grupos homotópicos estables $\pi_{n+q}(S^n)$, para $q < n-1$, tienen los siguientes valores (para $q \leqslant 2$ véase también* [1], parte II, § 23):

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \quad \pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2, \; \pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2, \; \pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{24},$$

PROBLEMA 19. Calcular los grupos $\pi_{n+q}(S^n)$ para $q \leqslant 9$. Si $q \geqslant 10$ surgen dificultades más serias. La superación de estas dificultades cuesta mucho trabajo. Esto permite calcular todos los grupos $\pi_{n+q}(S^n)$ para $q \leqslant 30$ (aproximadamente). Pero es dudoso, que

sea posible una solución general aceptable para todos los q, aunque actualmente es probable hallar en la bibliografía especializada mucha información valiosa sobre grupos homotópicos superiores.

VII. Clases homotópicas estables de las aplicaciones de complejos celulares.

Con frecuencia surge la siguiente situación: se ha dado un complejo $(n-1)$-conexo celular K. Sea que el complejo K no tiene células de dimensiones $1 \leqslant i \leqslant n-1$; se dice, que hay que calcular clases homotópicas estables de aplicaciones del complejo X en K, si $\dim X < 2n-1$.

He aquí otra cuestión: examinar el obstáculo $\alpha(f)$ para la prolongación de la aplicación $f\colon X^{n+q} \to K$ sobre un armazón $(n+q+1)$-dimensional con $q < n-2$. Ya hemos visto, que para los espacios fibrados $E \xrightarrow{p} B$, donde la fibra F y la base B son $(n-1)$-conexas, la sucesión espectral en las homologías hasta la dimensión $2n-2$ se reduce a la exacta

$$H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \xrightarrow{\tau} H^*(B) \xrightarrow{p^*} H^*(E).$$

Vemos que la complejidad de la teoría de homologías del producto oblicuo en las dimensiones «estables» es la misma, que para los grupos de homotopías. Se puede decir, que en las dimensiones $k \leqslant 2n-2$ la teoría de homologías del espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$ es la misma que la del par (E, F), además, $B \sim E/F$, porque las células no triviales en E, que no se encuentran en B o en F, pueden aparecer por primera vez en la dimensión $2n$ (producto de células de base y de fibra). Así, todo se simplifica en las dimensiones estables.

LEMA 3. *Las clases homotópicas estables de aplicaciones forman un grupo abeliano* $[X, K]$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos dos aplicaciones f, g

$$f\colon X \to K, \quad g\colon X \to K,$$

y el producto directo de las mismas

$$f \times g\colon X \to K \times K,$$

donde $[f \times g](x) = (f(x), g(x))$.

El complejo $K \times K$ es $(n-1)$-conexo; no tiene células de dimensiones $1 \leqslant i \leqslant n-1$ y la imagen $(f \times g)(X)$ se encuentra en el armazón de dimensión $k \leqslant \dim X$, con aplicación celular. Cuando $k \leqslant 2n-2$, la imagen $(f \times g)(X)$ pasa a pertenecer al ramo $K \vee K \subset K \times K$ porque las células «sobrantes» en $K \times K$, que no se encuentran en $K \vee K$, aparecen en la dimensión $2n$. Esto

se relaciona a la imagen en $K \times K$ de cualquiera homotopía de aplicaciones: ésta se encuentra en $K \vee K$. Se tiene la evidente aplicación de «pliegue»

$$\varkappa\colon K \vee K \to K,$$

idéntica en cada sumando.

Definimos la suma de clases homotópicas

$$f, g \in [X, K], \quad f + g = \varkappa (f \times g),$$

considerando f y g como clases celulares y la dim $X \leqslant 2n - 2$. Las propiedades de grupo y la conmutatividad de esta operación son obvias (verifíquense).

LEMA 4. *Sean dados la aplicación estable $f\colon X^{n+q} \to K$ y el obstáculo para prolongar la aplicación $\alpha(f) \in C^{n+q+1}(X^{n+q+1}, \pi_{n+q}(K))$ (véase el § 9) sobre el armazón X^{n+q+1}. Entonces, el obstáculo $\alpha(f)$ depende aditivamente del elemento $f \in [X, K]$ y $\alpha(\lambda f) = \lambda\alpha(f)$.*

DEMOSTRACION. El obstáculo $\alpha(f)$ tiene significado en σ^{n+q+1}, definido mediante la aplicación

$$\partial\sigma^{n+q+1} = S^{n+q} \to K.$$

Al sumar las aplicaciones $f + g = \varkappa (f \times g)$, las clases homotópicas de aplicaciones $\partial\sigma^{n+q+1} \to K$, engendradas por f y g, también se suman, por definición de adición, en grupos π_j (aquí, en situación estable, no es necesario inquietarse por un punto inicial y por la acción de π_1).

Ya hemos construido la aplicación $f\colon K \to \prod\limits_{n_j \geqslant n}^{2n-1} K(D_j, n_j)$, que engendra un isomorfismo de $\mathbb{Q}$-cohomologías y grupos de homotopías $\pi_j(K) \otimes \mathbb{Q}$ hasta la dimensión $2n-2$, véase más arriba, p. III. Aquí los grupos D_j son abelianos libres.

Construimos aplicación «inversa» de armazón

$$g\colon \Big(\prod_{n_j \geqslant n}^{2n-1} K(D_j, n_j)\Big)^{2n-2} \to K,$$

así que $f_* g_* = \lambda \neq 0$ en $\mathbb{Q}$-cohomologías y en la homotopías $\pi_j \otimes \mathbb{Q}$ con $j < 2n - 2$, es decir, $f_* g_*(x) = \lambda x$, $g_* f_*(y) = \lambda y$. Vamos a construir tal aplicación «inversa» g mediante inducción por el armazón. Formulamos una hipótesis inductiva, que un obstáculo aparecido para prolongación de ya construida aplicación g_{n+q} de un armazón $(n + q)$-dimensional sobre un armazón $(n + q + 1)$-dimensional es una clase de cohomologías de orden finito μ. Luego, utilizando los lemas 3 y 4, pasemos a una aplicación μg_{n+q} y, cambiándolo en un armazón $(n + q)$-dimensional, llegaremos a un obstáculo nulo (véase el § 9). Prolongando la aplicación de la clase (μg_{n+q}) sobre el arma-

zón de dimensión $n+q+1$, obtendremos la aplicación g_{n+q+1} etc. Al fin de cuentas, llegaremos a la aplicación g. Vamos a demostrar, que el orden de clase de cohomologías de obstáculo sobre el armazón $n+q$ para la aplicación g_{n+q} es finito. El armazón $(\prod_{n_j\geqslant n} K(D_j, n_j))^{2n-2}$ es homotópicamente equivalente al armazón del ramo $\bigvee_{n_j\geqslant n} (K(D_j, n_j))^{2n-2}$. Cada complejo $(K(D_j, n_j))^{2n-1}$ tiene elementos de orden infinito sólo en las cohomologías de la primera dimensión no trivial n_j según los resultados del p. V sobre cohomologías racionales de los complejos de forma $K(\pi, n)$. Al formar una aplicación inversa g_{n+q}, construimos todo separadamente en cada sumando del ramo $\bigvee_j (K(D_j, n_j))^{2n-2}$. Por eso encontraremos sólo un obstáculo de orden finito.

De aquí se deduce la siguiente afirmación.

TEOREMA 7. *Para cualquier complejo X las clases homotópicas estables de las aplicaciones X en un complejo $(n-1)$-conexo K (dim $X\leqslant 2n-2$) forman un grupo abeliano $[X, K]$, para el que tiene lugar la igualdad.*

$$[X, K]\otimes \mathbb{Q}\approx \mathrm{Hom}\,(H^*(K; \mathbb{Q})\to H^*(X, \mathbb{Q})).$$

Esto significa lo siguiente: la clase homotópica se define por un homomorfismo de $\mathbb{Q}$-cohomologías con exactitud hasta los elementos de orden finito; con esto cualquier homomorfismo puramente algebraico $a^*\colon H^*(K; \mathbb{Z})\to H^*(X; \mathbb{Z})$ o $a_*\colon H_*(X; \mathbb{Z})\to H_*(K; \mathbb{Z})$ es posible multiplicarlo por un número no nulo $\lambda\neq 0$, $a^*\mapsto\lambda a^*$, $a_*\mapsto\lambda a_*$, así que el homomorfismo λa^* (o λa_*) se realiza mediante una aplicación continua $f\colon X\to K$.

§ 11. Homologías y grupo fundamental

Sea que tenemos un complejo no simplemente conexo (celular o incluso simplicial) K con un grupo fundamental $D=\pi_1(K)$. Consideremos un cubrimiento universal

$$\hat{K}\to K$$

donde el grupo D actúa libre y discretamente en $\hat{K}$, transformando los símplex (las células) uno en otro. A cada célula σ^i_γ en K le corresponde un juego de células

$$p^{-1}(\sigma^i_\gamma)=\sigma^i_{1\gamma}\cup\sigma^i_{2\gamma}\cup\ldots$$

en un número, igual al número de elementos de $D=\pi_1(K)$. El grupo D actuando en $p^{-1}(\sigma^i_\gamma)$ define la permutación de células $\sigma^i_{\alpha\gamma}$. Escojamos una célula en la preimagen $p^{-1}(\sigma^i_\gamma)$ y la designemos por $\hat{\sigma}^i_\gamma$.

Todas las células de $\hat{K}$ se obtienen en forma

$$\sigma^i_{\alpha\gamma} = g(\hat{\sigma}^i_\gamma), \qquad g \in D = \pi_1(K),$$

al mismo tiempo, todas las células $g(\hat{\sigma}^i_\gamma)$ son diferentes Cualquiera cadena en $\hat{K}$ tiene la forma

$$a = \sum_{j,\gamma} \lambda_{j\gamma} g_j (\hat{\sigma}^i_\gamma), \qquad a \in C^i(\hat{K}), \tag{1}$$

donde $\lambda_{j\gamma}$, son números enteros.

Un operador de frontera ∂ en $\hat{K}$ conmuta con la acción del grupo D en células y con la multiplicación por los números λ_j; es natural introducir un «anillo de grupo» $\Gamma = \mathbb{Z}[D]$, cuyos elementos son sumas finitas $\sum \lambda_j g_j$, λ_j son números, $g_j \in D$, y la multiplicación tiene forma

$$\left(\sum_i \lambda_i g_i\right)\left(\sum_k \lambda'_k g'_k\right) = \sum_{i,k} \lambda_i \lambda'_k g_i g'_k.$$

Es evidente de la forma de cadenas (1) en el complejo K, que éstas son cadenas con coeficientes en un anillo Γ (posiblemente, no conmutativo, si el grupo D es no conmutativo).

Un homomorfismo $\rho\colon \Gamma \to \Gamma'$ en cualquier anillo Γ' permite examinar un complejo de cadenas con coeficientes en Γ' para $\hat{K}$:

$$\rho(a) = \sum_\gamma \rho\left(\sum_j \lambda_{j\gamma},\ g_{j\gamma}\right) \hat{\sigma}^i_\gamma, \quad a \in C_i(\hat{K}),$$

es una cadena con coeficientes en Γ'. Luego, se permite multiplicar las cadenas $\rho(a)$ por cualesquiera elementos de Γ'; esta multiplicación conmuta con ∂. A las homologías de este complejo las llamaremos homologías con coeficientes en la representación $\rho\colon \Gamma \to \Gamma'$, $\Gamma = \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ y las designemos por $H^\rho_i(K)$.

EJEMPLO 1. Si $\Gamma' = \Gamma$ y $\rho \equiv 1$, entonces, tenemos por definición

$$H^\rho_i(K) = H_i(\hat{K}).$$

EJEMPLO 2. Si $\mathbb{Z} = \Gamma'$ y $\rho\colon\Gamma \to \mathbb{Z}$ tiene la forma

$$\rho\left(\sum \lambda_j g_j\right) = \sum \lambda_j,$$

tendremos

$$H^\rho_i(K) = H_i(K).$$

Verificar esta igualdad.

EJEMPLO 3. Si K es una variedad no orientable, $K = M^n$, entonces se tiene noción de «orientación de curva», o sea, un homomorfismo

$\pi_1(K) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ (véase [1], parte II, § 17); surge un homomorfismo

$$\rho:\Gamma \to \mathbb{Z},$$

donde

$$\rho\left(\sum \lambda_i g_i\right) = \sum \lambda_i \varphi(g_i).$$

A las homologías $H_i^\rho(K)$ las llamaremos «homologías con coeficientes locales». Se definen de manera evidente las cohomologías $H_\rho^i(K)$ mediante un complejo conjugado.

PROBLEMA 1. Demostrar, que tenemos $H_n^\rho(M^n) = \mathbb{Z}$ para una variedad cerrada M^n.

Sea que tenemos un espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$ con fibra F y que $\pi_1(B) = D$ actúe respecto a un grupo $H_q(F)$ mediante las traslaciones g: $H_q(F) \to H_q(F)$, $g \in D$. De manera que introducimos la acción (operación) de un anillo $\Gamma = \mathbb{Z}[D]$ en $H_q(F) = M_q$. Más generalmente: sea que los elementos del anillo Γ actúen como operadores en un espacio lineal M (o sea, dada la representación ρ del anillo en forma de transformaciones lineales $M \to M$). Definimos las homologías $H_i^\rho(B, M)$. Sea $B = K$ y sea dado un complejo de Γ-cadenas $\hat{K}$ (véase más arriba). Formalmente se definen las cadenas con valor en M:

$$a = \sum_j m_j \hat{\sigma}_j^i, \qquad m_j \in M,$$

y la operación del anillo Γ en estas cadenas

$$g(a) = \sum g(m_j)\, \hat{\sigma}_j^i,$$

donde $g(m)$ está definido en virtud de la representación ρ. Esta actuación conmuta con una frontera ∂, que se define naturalmente.

Surgen las homologías, designadas por $H_i^\rho(B, M)$, donde Γ actúa en M mediante la representación ρ (o, como se dice, M es un Γ-módulo). Las cohomologías $H_\rho^i(B, M)$ se definen, como siempre, mediante un complejo de cocadenas conjugado.

Hay Γ-módulos para los espacios fibrados $E \xrightarrow{p} B$ con fibra F del grupo $H_j(F)$ en virtud de actuación de $\pi_1(B)$ en una fibra mediante traslaciones paralelas. Tenemos las homologías $H_q^\rho(B, H_j(F))$.

OBSERVACIÓN. En el teorema de Leray (véase el § 8) para una base no simplemente conexa $E_{q,j}^{(2)} \neq H_q(B, H_j(F))$. Es necesario cambiar esta por una base $E_{q,j}^{(2)} = H_q^\rho(B, H_j(F))$. La representación ρ mide la «deformación» de operador d_1. Todo lo demás permanece cierto.

EJEMPLO. Para el cubrimiento $E \xrightarrow{p} B$ con fibra de k puntos $F = P_1 \cup \ldots \cup P_k$ tenemos

$$H_q(F) = 0, \quad q \neq 0,$$

$H_0(F) = M$ tiene un rango k.

El grupo $\pi_1(B)$ actúa en la fibra F y en los grupos $M = H_0(F)$.

PROBLEMA 2. Demostrar las igualdades

$$H_q^{\rho}(B, H_0(F)) = H_q(E), \quad H_{\rho}^q(B, H^0(F)) = H^q(E).$$

PROBLEMA 3. Calcular los grupos $H_0^{\rho}(B, M)$ y $H_{\rho}^0(B, M)$, donde ρ es cualquiera representación de Γ en automorfismos de un espacio lineal.

PROBLEMA 4. Calcular las homologías de un espacio lenticular (véase el § 4) $L_m^{2n-1}(q_1, \ldots, q_{n-1})$ para una representación $\rho: \pi_1 \times \times (L) = \mathbb{Z}_m \to$ (raíces del grado m de la unidad, que actúan en $\mathbb{C} = M$).

Construir tales representaciones lineales

$$\rho: \mathbb{Z}_m \to GL(k, \mathbb{C}),$$

que

$$H_q^{\rho}(L_m^{2n-1}(q_1, \ldots, q_{n-1})) = 0$$

para todos los $q = 0, 1, 2, \ldots$ Al principio, efectuarlo para $n = 2$ (lentes tridimensionales).

PROBLEMA 5. Hallar la partición explícitamente celular de una esfera S^{2n-1}, invariante respecto a la actuación de un grupo $\mathbb{Z}_m$, donde una transformación básica T actúa así:

$$(z_1, \ldots, z_n) \overset{T}{\mapsto} \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} z_1, e^{\frac{2\pi i q_1}{m}} z_2, \ldots, e^{\frac{2\pi i q_{n-1}}{m}} z_n \right)$$
$$(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1)$$

(véase el § 4). Esta partición celular tiene para $n = 2$ las células

$$T^j\sigma^0, \quad T^j\sigma^1, \quad T^j\sigma^2, \quad T^j\sigma^3; \quad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

y un operador de frontera

$$\partial\sigma^0 = 0, \quad \partial\sigma^1 = (1 - T)\sigma^0,$$
$$\partial\sigma^2 = (1 + T + \ldots + T^{m-1})\sigma^1, \quad \partial\sigma^3 = (1 - T^q)\sigma^2.$$

Utilizando tales representaciones lineales del grupo π_1, que todos los $H_q^{\rho}(M, \mathbb{C}^n) = 0$, construyamos un interesante invariante

topológico, la «torsión de Reidemeister» consideremos un complejo de cadenas de la representación ρ. Los grupos de cadenas son espacios lineales complejos con bases marcadas (células $\hat{\sigma}_\gamma^q$). En virtud de la condición $H_q^\rho = 0$, $q \geqslant 0$, tenemos la sucesión exacta de cadenas

$$0 \to C_n^\rho \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^\rho \to \ldots \xrightarrow{\partial} C_0^\rho \to 0,$$

donde en cada C_j^ρ hay una base marcada $e_\gamma^{(j)} = \{\hat{\sigma}_\gamma^j\}$. El arbitrio en la elección de $\hat{\sigma}_\gamma^j$ es el siguiente: $\hat{\sigma}_\gamma^j \to \pm g(\hat{\sigma}_\gamma^j)$, $g \in \pi_1$. Efectuamos el siguiente procesamiento: escojamos en C_{n-1}^ρ otra base: su primera parte es una base en un grupo ∂C_n^ρ, obtenido de $\hat{\sigma}_j^n$. La segunda parte se escoge arbitrariamente en un espacio $C_{n-1}^\rho/\mathrm{Im}\partial$.

Designemos a una base nueva en C_{n-1}^ρ por $\bar{e}^{n-1}$. Hay un determinante de paso $\det(e^j, \bar{e}^j)$ de una base a la otra. La base $\bar{e}^j$ en la segunda parte de $C_{n-2}^\rho/\mathrm{Im}\partial$ pas aen C_{n-2}^ρ con ayuda de ∂; allí esta base se completa hasta una base completa en C_{n-2}^ρ mediante la elección de base en $C_{n-2}^\rho/\mathrm{Im}\partial$. Aparece una base $\bar{e}^{n-2}$ en C_{n-2}^ρ. Tenemos un determinante de paso $\det(e^{n-2}, \bar{e}^j)$ de una base vieja en C_{n-2}^ρ a una nueva (la base "vieja" en C_q^ρ está fijada por células). Luego, pasamos a C_{n-3}^ρ, etc. Obtenemos bases $\bar{e}^k$ en todos los C_k^ρ y un juego de números $\det(e^k, \bar{e}^k)$.

Consideremos el número

$$R(C, \rho) = \det(e^{n-1}, \bar{e}^{n-1}) \det(e^{n-2}, \bar{e}^{n-2})^{-1} \ldots$$
$$\ldots \det(e^{n-k}, \bar{e}^{n-k})^{(-1)^{k+1}} \ldots \det(e^0, \bar{e}^0)^{(-1)^{n+1}}$$

A este número lo denominaremos «torsión de Reidemeister» R. El arbitrio en la elección de las células básicas y sus orientaciones lleva al cambio $R \to \lambda R$, donde $\lambda = \pm\det\rho(\pi_1)$.

Resulta, que este número (con exactitud hasta las multiplicaciones $R \to \lambda R$, $\lambda = \pm\det\rho(\pi_1)$ no depende de la triangulación y es un invariante topológico (lineal a trozos) del complejo invariante de difeomorfismo de una variedad. No lo demostramos (véase [63]).

PROBLEMA 6. Calcular la torsión R para las lentes tridimensionales $L_p^3(q)$, donde q es un residuo (mod p), si ρ: $\mathbb{Z}_p \to \sqrt[p]{1}$, $M = \mathbb{C}$ con actuación de $\mathbb{Z}_p$ en forma de multiplicación por $\sqrt[p]{1}$.

Anillo de cohomologías de la lente $L_p^3(q)$ con p impar y cualquier q tiene dos generatrices $u \in H^1$, $v \in H^2$:

$$H^0(L, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p,$$
$$H^1(L, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(u),$$
$$H^2(L, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(v = \delta_* u \bmod p),$$
$$H^3(L, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(w)$$

($\pm w$ es una generatriz reducida mod p del grupo $H^3(L, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$).

PROBLEMA 7. Demostrar que el producto en $H^*(L, \mathbb{Z}_p)$ tiene la forma:

$$uv = qw. \tag{2}$$

Recordemos, que la lente $L = L_p^3(q)$ se construía así: $L = S^3/\mathbb{Z}_p$, donde la generatriz $g \in \mathbb{Z}_p$ actúa en la esfera S^3 así (véase el § 4):

$$(z_1, z_2 \to \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i}{p} q} z_2\right), \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

Como $\delta_* u = v$ y w está definido unívocamente con exactitud hasta en un signo, el arbitrio en la elección del número q surge a causa de transformaciones $u \to \lambda u$, $w \to \pm w$ (λ es recíprocamente simple con p). Al mismo tiempo, obtenemos de (2):

$$u \to \lambda u, \quad v \to \lambda v, \quad w \to \pm w, \quad uv \to \pm \lambda^2 qw.$$

CONCLUSIÓN: Como el anillo de cohomologías y operadores δ_*, ∂_* son homotópicamente invariantes, los residuos q y $\bar{q} = \pm\lambda^2 q$ son equivalentes, si se consideran los invariantes homotópicos de las lentes. Por ejemplo:

a) $p = 3$, $q = 1$ ó $\bar{q} = 2$. Los residuos de forma $\pm\lambda^2$ son 1 y 2 en $\mathbb{Z}_p$ ($\lambda \neq 0$).

b) $p = 5$, $q = 1, 2, 3, 4$, $\lambda^2 = (1, 4, 9 \cong 4, 4^2 = 16 \cong 1)$.
Residuos de forma $\pm\lambda^2$: $(1, 4)$ en $\mathbb{Z}_5$.
Por eso $L_5^3(1)$ y $L_5^3(2)$ son homotópicamente no equivalentes.

c) $p = 7$, $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,
$\lambda^2 = 1, 4, 2, 2, 4, 1$,
$-\lambda^2 = 6, 3, 5, 5, 3, 6$.

Aquí un invariante homotópico $(\pm\lambda_q^2)$ no da nada, ya que $(\pm\lambda^2)$ son todos los residuos (mod 7), distintos de cero.

PROBLEMA 8. Aclarar, cuáles lentes son topológicamente distintas para $p = 7$, utilizando la torsión R. (Es interesante, que aquí aparecen por primera vez topológicamente distintas variedades cerradas, homotópicamente equivalentes. Para las variedades simplemente conexas esta cuestión es más compleja.)

Las homologías y cohomologías con coeficientes en la representación ρ para $\Gamma = \mathbb{Z}\,[\pi_1]$ también aparecen en los problemas sobre la prolongación de aplicaciones del subcomplejo $L \to X$ sobre el complejo $K \supset L$, si $\pi_1(X)$ actúa en $\pi_n(X)$ y con prolongación de las secciones de espacios fibrados, véase el § 9, donde estos problemas fueron considerados en un caso simplemente conexo.

Consideremos en calidad de ejemplo interesante la cuestión sobre la construcción en una variedad n-dimensional (por ejemplo, en una variedad 4-dimensional M^4) de una métrica de signatura $(+ - - -)$. Ya que el interior de un cono de luz en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_{1,3}$ se contrae homotópicamente a un eje unidimensional temporal mediante deformación canónica, entonces un conjunto de conos de luz posibles (es decir, de formas g_{ab} de tipo $(+ - - -)$) en $\mathbb{R}^4$ es equivalente homotópicamente a un conjunto de direcciones $\mathbb{R}P^3$ (para $\mathbb{R}^n$ tenemos $\mathbb{R}P^{n-1}$). Por eso, nuestro problema es equivalente al de construcción de un campo de direcciones unidimensionales en M^4, es decir, de sección de un espacio fibrado tangente

$$E \xrightarrow{p} M^4, \quad \text{fibra} \quad F = \mathbb{R}P^3.$$

Puesto que las particularidades de un campo vectorial típico están concentradas en puntos aislados (o sea, para los campos vectoriales el obstáculo surge sólo al prolongar el campo en un armazón 4-dimensional del 3-dimensional), lo mismo es justo para los campos de direcciones. Tenemos una cocadena obstaculizadora α (véase el § 9), $\alpha \in C^4(M^4, \pi_3(F)) = C^4(M^4, \mathbb{Z})$, puesto que $\pi_3(\mathbb{Z}P^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Sin embargo es correcto considerar esta cocadena como una clase de cohomologías del grupo $H^4_\rho(M^4, \pi_3(F))$, donde $\pi_1(M^4)$ actúa en $\pi_3(F)$.

PROBLEMA 9. Mostrar, que si $\alpha \sim 0$ en un grupo $H^4_\rho(M^4, \pi_3(F))$ es posible cambiar la sección (campo de direcciones) en un 3-armazón de base, de tal modo que $\alpha \equiv 0$ y es posible construir la sección en toda la M^4.

Por consiguiente, tenemos dos casos.

1) La variedad M^4 es orientable y compacta. Aquí la acción de $\pi_1(M^4)$ en $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}$ es trivial, $H^4_\rho(M^4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 10. Demostrar que $\alpha = \chi(M^4)$ es una característica de Euler (al igual que para los campos vectoriales).

2) La variedad M^4 es no orientable. Aquí tenemos $\alpha \in H^4_\rho \times (M^4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, donde ρ es una representación no trivial $\pi_1(M^4)$ en $\pi_3(F) = \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 11. Demostrar que en este caso $\alpha = \chi(M^4)$. Así en ambos casos la construcción del campo de direcciones (de métrica de signatura $+ - - -$) equivale a la condición $\chi(M^4) = 0$.

Para las variedades no cerradas es interesante construir en M^4 una métrica g_{ab}, la cual fuera de un conjunto compacto se aproxima

a la métrica de Minkowski. De manera que la variedad abierta M^4 (topológicamente) permite su compactación mediante un punto ∞ hasta la variedad $\bar{M}^4 \supset M^4$. En el mismo punto $\infty \in \bar{M}^4$, en virtud de propiedades de la métrica de Minkowski, tenemos un punto singular de grado 2 del campo de direcciones buscado (¡demostrarlo!) ¿Es posible construir en $\bar{M}^4$ un campo de direcciones con un solo punto singular de grado 2? El problema se reduce al anterior, pero es necesario que $\chi(\hat{M}^4) = 2$ ó $\chi(M^4) = 1$.

PROBLEMA 12. Demostrar que las clases homotópicas de campos de direcciones (o de métricas de forma $(n, 1)$ en la variedad M^{n+1} son definidas por los homomorfismos $\pi_1(M^{n+1}) \to \mathbb{Z}_2 = (\pm 1)$ (curvas cerradas, cuya circunvalación cambia la dirección de las flechas, y dan -1), y también por una clase de cohomologías

$$\gamma \in H^n_\rho(M^{n+1}, \pi_n(\mathbb{R}P^n)).$$

EJEMPLO. Sean excluidos de $\mathbb{R}^3$ una recta y un punto. El dominio restante $U \subset \mathbb{R}^3$ tiene un tipo homotópico $S^2 \vee S^1$ (un ramo). Sea dado un campo de direcciones en el dominio U

$$U \xrightarrow{f} \mathbb{R}P^2.$$

Una clase homotópica $[f]$ es determinada por un homomorfismo $\pi_1(U) = \mathbb{Z} \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ y también por una clase de cohomologías $(\pm\gamma)$

$$\pm\gamma \in H^2_\rho(U, \pi_2(\mathbb{R}P^2)) = H^2_\rho(S^2 \vee S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

donde $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ actúa en $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$ en virtud de que $f_*(\pi_1(U)) \subset \subset \pi_1(\mathbb{R}P^2)$. En el caso dado, ocurre la inversión de la orientación (la acción de ρ es no trivial). El cubrimiento $\hat{K}$ sobre $K = S^2 \vee S^1$

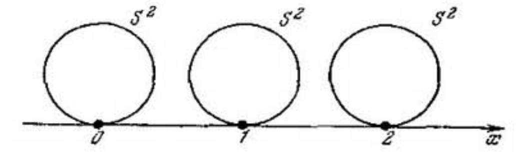


Fig. 45. La acción: $x \to x + 1$.

tiene la forma mostrada en la fig. 45. Todas las 2-cocadenas son cociclos no cohomológicos a cero. $C^2_\rho(K) = H^2_\rho(K) = \mathbb{Z}$ (verificarlo).

Consideremos como un ejemplo útil el problema sobre las clases homotópicas de aplicaciones de un toro T^2 en un plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$:

$$T^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}P^2.$$

El invariante más simple de una aplicación f es el homomorfismo inducido de grupos fundamentales

$$f_*: \pi_1(T^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2.$$

Si el homomorfismo f_* es trivial, la aplicación f sobre un armazón unidimensional puede ser contraído en un punto. Clases homotópicas de tales aplicaciones (donde $f_*(\pi_1) = 0$) se reducen a clases homotópicas de aplicaciones de una esfera S^2 en $\mathbb{R}P^2$ y son determinadas unívocamente por un grado de aplicación (verificarlo). Es más interesante el caso cuando el homomorfismo f_* es no trivial. Sin restringir la generalidad es posible considerar, que $f_*(a) = 1$, $f_*(b) = 0$, donde a y b son el paralelo y meridiano de un toro. Consideremos dos aplicaciones f y g: $T^2 \to \mathbb{R}P^2$ tales, que $f_* = g_*$. Considerando el toro partido en la partición celular estándar

$$\sigma^0, \quad \sigma_1^1 = a, \quad \sigma_2^1 = b, \quad \sigma^2,$$

de la condición $f_* = g_*$, mediante una homotopía llevamos las aplicaciones f y g a coincidir en un armazón unidimensional. Un par de aplicaciones f y g sobre una célula σ^2, que coinciden en la frontera $\partial\sigma^2$, define un «elemento distintivo» del grupo $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$, designado por $\alpha = \alpha(\sigma^2, f, g) \in \mathbb{Z} = \pi_2(\mathbb{R}P^2)$, que se representa un elemento de grupo de cohomologías

$$H_\rho^2(T^2;\ \pi_2(\mathbb{R}p^2)). \tag{3}$$

Aquí $\rho = f_* = g_*$.

PROBLEMA 13. Demostrar que el grupo (3) es igual a $\mathbb{Z}_2$, si ρ es no trivial.

De manera que tenemos no más de dos diferentes clases homotópicas de aplicaciones f: $T^2 \to \mathbb{R}P^2$ con un homomorfismo fijado f_* de grupos fundamentales.

§ 12. Cohomologías de las superficies de Riemann hiperelípticas. Toros de Jacobi. Geodésicas en los elipsoides poliaxiales. Relación con los potenciales de zonas finitas

Una superficie de Riemann hiperelíptica de género g es dada por la ecuación

$$w^2 - P_{2g+1}(z) = 0 \quad \text{ó} \quad w^2 - \widetilde{P}_{2g+2}(z) = 0,$$

donde $P_{2g+1}(z)$, $\widetilde{P}_{2g+2}(z)$ son polinomios sin raíces múltiples (véase [1], parte II, § 4).

En cualquier superficie de Riemann R están definidas las diferenciales holomorfas ω (diferenciales de primer género), que en coordenadas locales $z = u + iv$ tienen la forma

$$\omega = f(z)\, dz,$$

donde $f(z)$ es una función complejo-analítica de z. Aclararemos má abajo la forma posible de $f(z)$.

En un ejemplo importante de las superficies de Riemann R de género $g > 0$ las diferenciales holomorfas tienen la forma

$$\omega_k = \frac{z^{k-1}}{w}\,dz = \frac{z^{k-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}}\,dz, \qquad k = 1, 2, \ldots, g, \tag{1}$$

donde la superficie está dada por un polinomio $P_{2g+1}(z) = \prod_{i=1}^{2g+1}(z - z_i)$ de grado $2g+1$.

Verifiquemos que estas diferenciales son holomorfas. Es evidente que son holomorfas fuera de los puntos $z = z_i$ (los ceros del polinomio P_{2g+1}) y $z = \infty$. En el entorno del punto $z = z_i$ es posible tomar como parámetro local $\zeta = \sqrt{z - z_i}$. Entonces $z = \zeta^2 + z_i$, $dz = 2\zeta\,d\zeta$, y las expresiones (1) toman la forma

$$\omega_k = 2\,\frac{(\zeta^2 + z_i)^{k-1}}{\sqrt{\prod_{j\neq i}(\zeta^2 + z_i - z_j)}}\,d\zeta, \tag{2}$$

por eso las diferenciales ω_k con $z = z_i$ son también holomorfas. En un punto infinitamente alejado $z = \infty$ sirve de parámetro local $\zeta = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $z = \frac{1}{\zeta^2}$, $dz = -\frac{2d\zeta}{\zeta^3}$, de donde

$$\omega_k = -\frac{2\zeta^{2(g-k)}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2g+1}(1 - \zeta z_i)}}\,d\zeta, \tag{3}$$

y ω_k son también holomorfas para $k \leqslant g$.

Cualquiera diferencial holomorfa ω es localmente exacta: $\omega = f(z)\,dz = d\tilde{f}(z)$, donde $\tilde{f}(z)$ es una función primitiva y $f(z)$ es también una función complejo-analítica. Por eso, la 1-forma ω en la superficie R es cerrada: $d\omega = 0$. Una forma no nula ω nunca es exacta, porque no hay funciones holomorfas no triviales en una superficie compacta R (véase [1], parte II, § 4). Por analogía, la forma $\overline{\omega} = \overline{f(z)}\,\overline{dz}$ también es cerrada y no exacta.

Las formas $\omega_1, \ldots, \omega_g$ para una superficie hiperelíptica R_g son linealmente independientes (sobre los números complejos). Por eso, las formas $Re\,\omega_k = \frac{1}{2}(\omega_k + \overline{\omega}_k)$, $\operatorname{Im}\omega_k = \frac{1}{2i}(\omega_k - \overline{\omega}_k)$ componen la base en un grupo de cohomologías $H^1(R_g; \mathbb{R}) = \mathbb{R} + \ldots + \mathbb{R}$ ($2g$ sumandos).

OBSERVACIÓN. El grupo de cohomologías $H^1(R; \mathbb{R})$ de cualquiera superficie de Riemann R se define mediante diferenciales holomorfas. Su existencia es un teorema difícil (véase [19]).

PROBLEMA 1. Demostrar que cualesquiera $g+1$ diferenciales holomorfas sobre una superficie de Riemann de género g, son linealmente dependientes.

Escojamos una base de ciclos a_i, b_i, $i = 1, \ldots, g$, en las homologías $H_1(R_g, \mathbb{Z})$ tal, que sus índices de intersecciones dos a dos tengan la forma (véase [1], parte II, § 15):

$$a_i \bigcirc a_j = b_i \bigcirc b_j = 0 \quad a_i \bigcirc b_j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, g. \tag{4}$$

Cortando la superficie R_g por estos ciclos, la transformamos en un $4g$-ágono $\widetilde{R}_g$ (véase el § 3).

Quedan definidos los períodos de cualquiera diferencial cerrada por los ciclos a_i, b_i:

$$\oint_{a_i} \omega = A_i, \quad \oint_{b_i} \omega = B_i, \qquad i = 1, \ldots, g. \tag{5}$$

Sean: ω', otra diferencial cerrada; A'_i, B'_i, sus A-y B-períodos.

LEMA 1. *Es justa la relación:*

$$\int_{R_g} \omega \wedge \omega' = \sum_{i=1}^{g} (A_i B'_i - B_i A'_i). \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN. En el $4g$-ágono $\widetilde{R}_g$ la forma cerrada es exacta: $\omega = df$. Por eso $\omega \wedge \omega' = d(f\omega')$, y en virtud de la fórmula de Stokes

$$\int_{R_g} \omega \wedge \omega' = \int_{\partial R_g} f\omega.$$

Sean Q y Q' puntos en las aristas a_i y a_i^{-1} del $4g$-ágono $\widetilde{R}_g$, que se juntan en uno en la superficie R_g. Entonces, QQ' es un ciclo en la

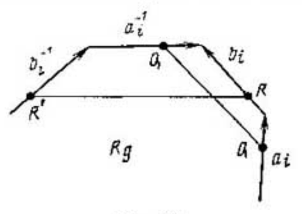


Fig. 46.

superficie R_g homológico al ciclo b_i (véase la fig. 46), por eso tenemos:

$$\int_{QQ'} \omega = f(Q') - f(Q) = \int_{b_i} \omega = B_i.$$

Análogamente, para los puntos R, R', que se pegan en los bordes b_i, b_i^{-1}, obtendremos:

$$f(R') - f(R) = -A_i.$$

De aquí se deduce igualdad

$$\int\limits_{a_i+b_i+a_i^{-1}+b_i^{-1}} f\omega' =$$

$$= \int\limits_{a_i} f\omega' + \int\limits_{b_i} f\omega' - \int\limits_{a_i} (f+B_i)\,\omega' - \int\limits_{b_i} (f-A_i)\,\omega' = A_iB_i' - B_iA_i',$$

lo que demuestra el lema.

TEOREMA 1. *Para los períodos* (A_i, B_i) y (A_i', B_i') *de las diferenciales holomorfas* ω, ω' *se cumplen las siguientes relaciones (relaciones bilineales de Riemann):*

$$\sum_{k=1}^{g} (A_kB_k' - B_kA_k') = 0. \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{g} (A_k\overline{B}_k - B_k\overline{A}_k) > 0, \tag{8}$$

si la diferencial ω *es distinta de cero.*

DEMOSTRACIÓN. Si (localmente) $\omega = f(z)\,dz$, $\omega' = g(z)\,dz$ son diferenciales holomorfas, entonces, $\omega \wedge \omega' = fg\,dz \wedge dz = 0$. Por eso, en virtud del lema

$$\sum_{k=1}^{g} (A_kB_k' - B_kA_k') = 0.$$

La primera relación queda demostrada.

Consideremos ahora la integral $-\frac{1}{2i}\int\limits_{R_g} \omega \wedge \overline{\omega}$. Puesto que $\omega \wedge \overline{\omega} = -2i|f|^2\,dx \wedge dy$, donde $\omega = f(z)\,dz$, esta integral es positiva cuando $\omega \neq 0$. Por eso tendremos, utilizando el lema al caso $\omega' = \overline{\omega}$:

$$0 < -\frac{1}{2i}\int\limits_{R_g} \omega \wedge \overline{\omega} = \int\limits_{R_g} |f|^2\,dx \wedge dy = -\frac{1}{2i}\sum (A^k\overline{B}_k - \overline{A}_k\overline{B}_k).$$

El teorema queda demostrado.

Sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base de diferenciales holomorfas sobre la superficie hiperelíptica de Riemann R_g. Sea

$$A_{ij} = \oint_{a_j} \omega_i, \quad i, j = 1, \ldots, g. \tag{9}$$

Del teorema demostrado se deduce

COROLARIO 1. *La matriz A_{ij} es no degenerada.*

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula (8) se deduce, que una diferencial holomorfa con los A-períodos nulos, es idénticamente igual a cero. Si la matriz A_{ij} hubiese sido degenerada, entonces se podría construir una diferencial holomorfa no nula con los períodos nulos. El corolario queda demostrado.

Según el corolario 1, es posible escoger una base nueva

$$\varphi_k = \frac{c_{1k}z^{g-1} + \ldots + c_{gk}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}}\, dz = \sum_{i=1}^{g} c_{ik}\omega_{g-i+1}, \quad k = 1, \ldots, g \tag{10}$$

tal, que los A-períodos tengan la forma

$$\oint_{a_j} \varphi_i = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Sea $B_{ij} = \int_{b_j} \varphi_i$ una matriz de B-períodos, construida por esta base. Del teorema 1 se deduce el siguiente corolario.

COROLARIO 2. *La matriz B_{ij} es simétrica y tiene una parte imaginaria definida positiva.*

DEMOSTRACIÓN. La simetría de B_{ij} se deduce de (7), para $\omega = \varphi_i$, $\omega' = \varphi_j$. Apliquemos ahora la desigualdad (8) a una diferencial holomorfa $\omega = x_1\varphi_1 + \ldots + x_g\varphi_g$, donde x_k son números reales. Para esta diferencial los períodos A_k tienen forma $A_k = x_k$, y los períodos B_k la forma $B_k = x_1B_{1k} + \ldots + x_gB_{gk}$. De aquí se deduce la desigualdad

$$0 < \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g} [x_k\overline{(x_1B_{1k} + \ldots + x_gB_{gk})} - x_k(x_1B_{1k} + \ldots + x_gB_{gk})] =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{g} x_jx_k \operatorname{Im} B_{jk},$$

lo que demuestra la definición positiva de la matriz $\operatorname{Im} B_{jk}$. El corolario queda demostrado.

Construimos por la matriz (B_{ij}) en un espacio $\mathbb{C}^g$, un retículo Γ sobre números enteros, engendrado por los vectores linealmente

independientes $e_1, \ldots, e_{2g}$, donde $(e_k)^i = \delta_{ik}$, $(e_{g+k})^i = B_{ik}$, $k = 1, 2, \ldots, g$.

El retículo Γ define un toro $2g$-dimensional $T^{2g} = \mathbb{C}^g/\Gamma$ (véase [1], parte II, § 4), llamado *toro de Jacobi* (o *variedad de Jacobi*) de la superficie de Riemann R_g.

CONCLUSION. El toro de Jacobi T^{2g} es abeliano (véase [1], parte II, § 4). Examinemos, como un ejemplo, un caso de superficies de género 1 («curvas elípticas»): $w^2 = P_3(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. En este caso hay dos ciclos a_1, b_1 (véase la fig. 47).

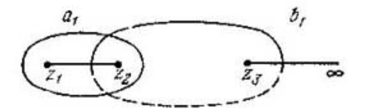


Fig. 47. Ciclos en la superficie elíptica de Riemann R_1: $w^2 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.
Con la línea punteada se designa la parte del ciclo b_1 que descansa sobre la segunda hoja.

Aquí se tiene una diferencial holomorfa $\varphi = c\, dz/\sqrt{P_3(z)}$, donde el número c se escoge de la condición $\oint_{a_1} \varphi = 1$. Tomemos $\tau = B_{11} = \int_{b_1} \varphi$, donde $\operatorname{Im} \tau > 0$. Los vectores 1, τ determinan un toro bidimensional de Jacobi T^2 de la superficie de Riemann R_1. La misma superficie R_1 es equivalente al toro (como una variedad; véase [1], parte II, § 4).

Esta equivalencia se construye así. Fijamos un punto P_0 sobre la superficie R_1. Para un punto arbitrario P en R_1 definamos la magnitud $A(P)$, suponiendo

$$A(P) = \int_{P_0}^{P} \varphi = \int_{P_0}^{P} \frac{c\, dz}{\sqrt{P_3(z)}} . \tag{12}$$

La curva (el camino) de integración, que conduce en la superficie de Riemann del punto P_0 en el punto P, está definida no unívocamente, con exactitud hasta añadir cualquier ciclo. Por eso $A(P)$ está definida sólo con exactitud hasta la combinación lineal con coeficientes enteros de los A- y B-períodos de la diferencial φ:

$$A(P) \sim A(P) + n \cdot 1 + m \cdot \tau, \quad n, m \text{ son enteros.} \tag{13}$$

De manera que está definida la aplicación $A(P)$ de la superficie elíptica de Riemann R_1 en su toro de Jacobi T^2.

AFIRMACION 1. *La aplicación $A(P)$ es regular por doquier, o sea su diferencial en ninguna parte se anula.*

La demostración es evidente.

COROLARIO. *La aplicación $A(P)$ es un isomorfismo (complejo-analítico).*

DEMOSTRACIÓN. De la anterior afirmación se deduce, que $A(P)$ es un cubrimiento. Está claro, que $A(P)$ transforma las generatrices a_1, b_1 del grupo $\pi_1(R_1)$ en las generatrices del grupo $\pi_1(T^2)$. Por eso el cubrimiento $A(P)$ es trivial (véase [1], parte II, § 19). El corolario queda demostrado.

OBSERVACIÓN. En la teoría de funciones complejo-analíticas se demuestra que cualquier toro complejo T^2 es un toro de Jacobi de la superficie elíptica de Riemann.

Para el caso de superficies hiperelípticas R_g, donde $g > 1$, para cualquier juego de puntos $Q_1, \ldots, Q_g$ de la superficie R_g, está definido el vector $A(Q_1, \ldots, Q_g) = (A^1, \ldots, A^g)$, donde

$$A^k(Q_1, \ldots, Q_g) = \int_{Q_0}^{Q_1} \varphi_k + \ldots + \int_{Q_0}^{Q_g} \varphi_k, \quad k = 1, \ldots, g \tag{14}$$

Aquí $\varphi_1, \ldots, \varphi_g$ es una base estándar de las diferenciales holomorfas, normalizadas por la condición $\int_{a_i} \varphi_k = \delta_{ik}$. Las curvas de integración desde un punto fijado Q_0 hasta los puntos $Q_1, \ldots, Q_g$, se eligen convencionalmente. Estas curvas están definidas sólo con exactitud hasta las combinaciones con coeficientes enteros de los ciclos

$$Q_0Q_k \sim Q_0Q_k + \sum_{i=1}^{g} m_i a_i + \sum_{j=1}^{g} n_j b_j. \tag{15}$$

Por eso las magnitudes $A^k(Q_1, \ldots, Q_g)$ están definidas con exactitud hasta los períodos de diferenciales holomorfas:

$$A^k(Q_1, \ldots, Q_g) \sim A^k(Q_1, \ldots, Q_g) + \sum_i m_i \delta_{ik} + \sum n_j B_{kj}, \tag{16}$$

o bien

$$A(Q_1, \ldots, Q_g) \sim A(Q_1, \ldots, Q_g) + \sum_{i=1}^{g} m_i e_i + \sum_{j=1}^{g} n_j e_{g+j}, \tag{17}$$

donde $e_1, \ldots, e_{2g}$ son vectores construidos más arriba y generatrices del retículo Γ. Por eso el vector-función $A(Q_1, \ldots, Q_g)$ toma valores en el toro de Jacobi $T^{2g} = \mathbb{C}^g/\Gamma$ de la superficie de Riemann R_g. Esta aplicación se llama *aplicación de Abel.*

AFIRMACION 2. *La aplicación de Abel es invertible, si no hay coincidentes entre los puntos $Q_1, \ldots, Q_g$.*

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar los cálculos, consideremos, que entre los puntos $Q_1, \ldots, Q_g$ no hay puntos de ramificación. Entonces, en el entorno de un punto Q_k es posible tomar la coordenada $z = z_k$ en calidad de un parámetro local. Calculemos jacobiano de una transformación $A(Q_1, \ldots, Q_g)$ o sea, $\det(\partial A^j(Q_1, \ldots, Q_g/\partial z_k))$. El cálculo es cómodo hacerlo en la base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ (fórmula (1)). Entonces obtendremos

$$\frac{\partial A^j}{\partial z_k} = \frac{z_k^{j-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z_k)}}, \qquad j, k = 1, \ldots, g.$$

Obtendremos de aquí para el jacobiano buscado:

$$\det\left(\frac{\partial A^j}{\partial z_k}\right) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{g} \sqrt{P_{2g+1}(z_k)}} \det \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{g-1} & \ldots & z_g^{g-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{i<j}(z_i - z_j)}{\prod\limits_{k=1}^{g} \sqrt{P_{2g+1}(z_k)}}.$$

(Hemos utilizado la expresión conocida del álgebra para un «determinante de Vandermonde».) Está claro, que este jacobiano es distinto de cero, si los números $z_1, \ldots, z_g$ son diferentes de par en par. La afirmación queda demostrada.

OBSERVACIÓN. El problema de inversión de la aplicación de Abel es conocido en la geometría de las superficies de Riemann como el «problema de inversión de Jacobi». Este problema admite una solución explícita: cualquiera función simétrica de las coordenadas $z_1, \ldots, z_g$ de los puntos $Q_1, \ldots, Q_g$ se expresa mediante una θ-función de Jacobi—Riemann (véase [1], parte II, § 4), construida por un toro (abeliano) de Jacobi T^{2g}. Damos una fórmula para calcular la suma de las coordenadas $z_1 + \ldots + z_g$ de los puntos $Q_1, \ldots, Q_g$, sin brindar aquí fórmulas generales:

$$z_1 + \ldots + z_g = \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta(y_1, \ldots, y_g) + c, \tag{18}$$

donde el operador $\frac{d}{dx}$ tiene la forma

$$\frac{d}{dx} = V_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + V_g \frac{\partial}{\partial y_g}, \tag{19}$$

además,

$$V_k = c_{1k}, \quad k = 1, \ldots, g \tag{20}$$

(las magnitudes c_{jk} están determinadas por las fórmulas (10)), c es una constante.

Los propios puntos $Q_1, \ldots, Q_g$ se determinan a partir de las ecuaciones $A(Q_1, \ldots, Q_g) = y$, unívocamente, con exactitud hasta la permutación.

Utilicemos la transformación de Abel a la integración de las ecuaciones de Kovalévskaya para el movimiento de un cuerpo sólido pesado con un punto fijado. Las ecuaciones del problema de Kovalévskaya tienen la forma (véase [31])

$$\begin{aligned} 2\dot{p} &= qr, & \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ 2\dot{q} &= -pr - \mu\gamma_3, & \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} &= \mu\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{aligned} \qquad \mu = \text{const.} \tag{21}$$

Las ecuaciones (21) pueden ser escritas en forma de Hamilton, pero no la damos (véase más abajo Suplemento 1). Estas ecuaciones tienen las siguientes integrales:

$$H = 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2\mu\gamma_1 \text{ (energía)}, \tag{22}$$

$$L = 2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 \text{ (momento)}, \tag{23}$$

$$K = (p^2 - q^2 + \mu\gamma_1)^2 + (2pq + \mu\gamma_2)^2 \text{ (integral de Kovalévskaya)}. \tag{24}$$

Además, se cumple la condición de conexión $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Consideremos una superficie compatible del nivel de estas integrales: $H = 6h$, $L = 2l$, $K = k^2$, donde h, l, k^2 son constantes.

Si se cumple la condición de conexión $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ las ecuaciones (22) — (24) dan una superficie bidimensional (variedad invariante de un sistema dinámico (21)).

Introducimos las coordenadas s_1, s_2 en esta superficie (variables de Kovalévskaya), suponiendo

$$s_{1,2} = 3h + \frac{R(x_1, x_2) \mp \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2},$$

donde $x_{1,2} = p \pm iq$, $R(z) = -z^4 + 6hz^2 + 4\mu lz + \mu^2 - k^2$ $R(x_1, x_2) = -x_1^2x_2^2 + 6hx_1x_2 + 2\mu l(x_1 + x_2) + \mu^2 - k^2$.

PROBLEMA 2. Demostrar, que en las variables s_1, s_2 las ecuaciones (21) se escribirán en forma

$$\dot{s}_1 = \pm \frac{i\sqrt{\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad \dot{s}_2 = \mp \frac{i\sqrt{\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)}, \tag{25}$$

donde $\Phi(z)$ es un polinomio de quinto grado, que tiene la forma

$$\Phi(z) = \{z[(z - 3h)^2 + \mu^2 - k^2] - 2\mu^2 l^2\} \times \times (z - 3h - k)(z - 3h + k). \tag{26}$$

OBSERVACIÓN. La ecuación (25) coincide con la ecuación de conmutatividad en la superficie de nivel de dos integrales, indicada en [1], parte II, § 30.

Los segundos miembros de las ecuaciones (25) son funciones unívocas en una superficie hiperelíptica de Riemann de género 2, dada por la ecuación $w^2 = \Phi(z)$. Por eso obtenemos movimientos de un par de puntos (P_1, P_2) por esta superficie de Riemann.

Por ejemplo, sean todas las raíces del polinomio $\Phi(z)$ reales y distintas. Designémoslas por $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Si los datos iniciales para el sistema (25) se escogen reales y tales, que $a_1 \leqslant s_1 \leqslant \leqslant a_2$, $a_3 \leqslant s_2 \leqslant a_4$, entonces en cualquier instante t los números $s_i(t)$ serán reales y satisfarán las mismas desigualdades. Los puntos $P_1 = P_1(t)$, $P_2 = P_2(t)$ se moverán en la superficie de Riemann por los ciclos encontrados sobre los segmentos $[a_1, a_2]$ y $[a_3, a_4]$

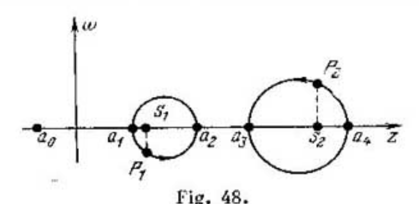


Fig. 48.

(véase la fig. 48). Estos ciclos están pegados de dos ejemplares $[a_1, a_2]^+$ y $[a_1, a_2]^-$, $[a_3, a_4]^+$ y $[a_3, a_4]^-$ por los extremos de los segmentos correspondientes. Un «punto de fase» (P_1, P_2) se mueve por un toro bidimensional (real). Para integrar las ecuaciones (25), apliquemos a ellas la transformación de Abel, construida por una curva hiperelíptica de género 2, dada por la ecuación $w^2 = \Phi(z)$. Aquí tenemos dos diferenciales holomorfas independientes $\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}$ y $\frac{z\,dz}{\sqrt{\Phi(z)}}$. Hacemos

$$\begin{aligned} A^1(P_1, P_2) &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}, \\ A^2(P_1, P_2) &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{\Phi(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{\Phi(z)}} \end{aligned} \tag{27}$$

(P_0 es cualquier punto de la superficie de Riemann).

AFIRMACIÓN 3. *Después de la transformación* (27), *las ecuaciones de Kovalévskaya* (25) *pasan a un sistema lineal con los coeficientes cons-*

tantes de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} A^1(P_1(t),\ P_2(t)) = 0,$$
$$\frac{d}{dt} A^2(P_1(t),\ P_2(t)) = \frac{i}{2}\ . \tag{28}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que los puntos $P_1(t)$, $P_2(t)$ se distinguen de los puntos de ramificación $a_0, \ldots, a_4$. Entonces los parámetros locales en el entorno de estos puntos son s_1, s_2. Por eso, en virtud de las ecuaciones (25) tendremos:

$$\frac{d}{dt} A^1(P_1(t),\ P_2(t)) = \frac{\dot{s}_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{\dot{s}_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} =$$
$$= \frac{i}{2}\frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{\sqrt{\Phi(s_1)}} - \frac{i}{2}\frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = 0,$$
$$\frac{d}{dt} A^2(P_1(t),\ P_2(t)) = \frac{\dot{s}_1 s_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{\dot{s}_2 s_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = \frac{i}{2}\,.$$

La afirmación queda demostrada.

PROBLEMA 3. Demostrar, que un sistema de la forma

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{s_2\sqrt{\Phi(s_1)}}{s_1 - s_2}\,, \qquad \frac{ds_2}{dt} = \frac{s_1\sqrt{\Phi(s_2)}}{s_2 - s_1} \tag{29}$$

con una transformación de Abel también pasa a ser un sistema con los coeficientes constantes.

En vigor de la afirmación 3 tenemos:

$$A^1(P_1(t),\ P_2(t)) = A^1(P_1(t_0),\ P_2(t_0)),$$
$$A^2(P_1(t),\ P_2(t)) = A^2(P_1(t_0),\ P_2(t_0)) + \frac{i}{2}(t - t_0). \tag{30}$$

De manera que después del paso a la variedad de Jacobi, el sistema de ecuaciones de Kovalévskaya se resuelve completamente. Para obtener una dependencia explícita del tiempo t de las variables s_1, s_2, es necesario invertir el cambio de variables (27), o sea, solucionar el problema de inversión de Jacobi.

CONCLUSIÓN. La variedad invariante $\{H = 6h,\ L = 2l,\ K = k^2,\ \gamma^2 = 1\}$ del problema de Kovalévskaya (al prolongarse en un dominio complejo), es un toro de Jacobi T^4 de la superficie de Riemann $\{w^2 = \Phi(z)\}$.

Ahora demos otros ejemplos de los sistemas de Hamilton, que admiten la integración con ayuda de la transformación de Abel, es decir, de tales sistemas, cuyos toros invariantes, al prolongarse en un dominio complejo, son toros de Jacobi de las superficies de Riemann.

EJEMPLO 1. Recordemos, que la «ecuación de conmutatividad» (véase [1], parte II, § 30).

$$[\mathcal{L}, A_2 + c_1 A_1 + c_2 A_2] = 0, \quad (31)$$

donde $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 + u(x)$ es un operador de Sturm—Liouville; A_0, A_1, A_2, son operadores diferenciales respecto a x, de los órdenes primero, tercero y quinto; c_1, c_2, son constantes. Esta ecuación puede ser escrita en forma de Lagrange

$$\frac{\delta L}{\delta u(x)} = 0 \quad (32)$$

con lagrangiano

$$L = L(u, u', u'') = \frac{u''^2}{2} - \frac{5}{2} u'' u^2 + \frac{5}{2} u^4 + \\ + c_1\left(\frac{u'^2}{2} + u^3\right) + c_2 u^2 + c_3 u; \quad c_3 = \text{const.} \quad (33)$$

Las soluciones del sistema (32) son potenciales periódicos con zonas finitas (bizonales) y casi periódicos del operador $\mathcal{L}$ (véase [1], parte II, § 30). El sistema de Hamilton correspondiente, con dos grados de libertad, tiene dos integrales independientes J_1, J_2 en involución, o sea, es integrable completamente. Las coordenadas explícitas γ_1, γ_2 en las superficies de nivel de estas integrales tiene forma (para el caso $c_1 = 0$)

$$u = -2(\gamma_1 + \gamma_2), \\ \frac{1}{8}(3u^2 - u'') = \gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{2}\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j, \quad (34)$$

donde $\lambda_0, \ldots, \lambda_4$ son raíces del polinomio, $P_5(\lambda_i) = 0$; la expresión de los coeficientes del polinomio $P_5(\lambda)$ por medio de las constantes c_1, c_2, c_3 y de las integrales J_1, J_2 es dada en las fórmulas (30.30) de la parte II del libro [1]. En estas coordenadas la ecuación (32) se escribe en una forma coincidente con (25) después de volver a designar $s_i \to \gamma_i$, $t \to x$ ([1], parte II, ecuaciones (30, 33)) y por eso también se integra por el cambio de Abel. (La superficie de Riemann de género 2 es dada, en este caso, por el polinomio $P_5(\lambda)$.)

Prestemos atención a que las fórmulas (29) describen la dependencia temporal $u(x, t)$ de las soluciones de la ecuación de KdV (véase [1], parte II, § 30), donde $s_i \to \gamma_i$ (¡verifíquese!).

OBSERVACIÓN. Las ecuaciones de conmutatividad de órdenes superiores se integran también por la transformación de Abel y por eso tienen, como variedades invariantes (en un dominio complejo), los toros de Jacobi de las superficies hiperelípticas de Riemann de géneros superiores.

EJEMPLO 2. En el problema de Neumann sobre el movimiento de una partícula en una esfera bidimensional

$$x^2 = \sum_{i=0}^{2} x_i^2 = 1 \tag{35}$$

bajo la influencia de un potencial cuadrático

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} a_i x_i^2, \qquad a_i = \text{const}, \tag{36}$$

las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\ddot{x}_i = -a_i x_i + \lambda(t) x_i, \qquad i = 0,\ 1,\ 2, \tag{37}$$

$$x^2 \equiv \sum_{i=0}^{2} x_i^2 = 1, \tag{37'}$$

donde $\lambda(t)$ es un multiplicador de Lagrange, que surge a causa de la superposición de la conexión (35). El sistema (37), (37′) puede ser obtenido de un flujo de Hamilton en $\mathbb{R}^6$ con hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} a_i x_i^2 + \frac{1}{2} (x^2 y^2 - (xy)^2) \tag{38}$$

por una acotación en la esfera $x^2 = 1$.

PROBLEMA 4. Demostrar que las funciones

$$F_k(x, y) = x_k^2 + \sum_{i \neq k} \frac{(x_k y_i - x_i y_k)}{a_i - a_k}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \tag{39}$$

son un sistema de integrales independientes en la involución para un sistema con hamiltoniano (38).

El propio hamiltoniano H tiene la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} a_i F_i. \tag{40}$$

PROBLEMA 5. Comprobar que la transformación

$$x' = y, \quad y' = -x, \quad H' = \sum_{i=0}^{2} a_i^{-1} F_i \tag{41}$$

transforma un flujo de Hamilton construido en un flujo geodésico, en un elipsoide triaxial («problema de Jacobi»)

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \tag{42}$$

(las geodésicas en un elipsoide triaxial fueron halladas por Jacobi).

Mostremos que el problema de Neumann (y, por consiguiente, el problema de Jacobi) se integra por la transformación de Abel. Reducimos el problema de Neumann, siguiendo los trabajos modernos, al ya considerado problema sobre los potenciales bizonales («ecuaciones de conmutatividad» (32)).

Sean ψ_0, ψ_1, ψ_2 funciones propias de un operador $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 + u(x)$ con propios valores a_0, a_1, a_2, correspondientemente, o sea, soluciones de ecuaciones diferenciales

$$\mathcal{L}\psi_i = a_i\psi_i, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{43}$$

Las ecuaciones (43) vuelven a escribirse en forma

$$\psi_i'' = -a_i\psi_i + u(x)\psi_i, \qquad i = 0, 1, 2, \tag{44}$$

que coincide con las ecuaciones (37) del problema de Neumann después de volver a designar $x \to t$, $\psi_i \to x_i$, $u(x) \to \lambda(t)$ (multiplicador de Lagrange). Queda por satisfacer la ecuación de conexión $\sum x_i^2 = 1$. Escojamos para esto un potencial bizonal $u(x)$, de tal manera, que los ceros $\lambda_0, \ldots, \lambda_4$ del polinomio correspondiente $P_5(\lambda)$ (véase más arriba) tengan la forma:

$$\begin{gathered}\lambda_0 = a_0 < \lambda_1 < \lambda_2 = a_1 < \lambda_3 < \lambda_4 = a_2,\\ P_5(\lambda) = \prod_{i=0}^{4}(\lambda - \lambda_i)\end{gathered} \tag{45}$$

(«extremos derechos de lagunas» en el espectro del operador $\mathcal{L}$ véase [1], parte II, § 30). Resulta que las soluciones que necesitamos de las ecuaciones (43) se expresan simplemente por las variables γ_1, γ_2, determinadas por las igualdades (34).

PROBLEMA 6. Demostrar que las funciones de forma

$$\psi_i(x) = \alpha_i\sqrt{(a_i - \gamma_1(x))(a_i - \gamma_2(x))}, \qquad i = 0, 1, 2, \tag{46}$$

donde α_i son constantes y satisfacen las ecuaciones (43),

$$\text{si } u = -2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sum_{i=0}^{4}\lambda_i,$$

$$\gamma_1' = 2i\sqrt{P_5(\gamma_1)}/(\gamma_1 - \gamma_2), \qquad \gamma_2' = 2i\sqrt{P_5(\gamma_2)}/(\gamma_2 - \gamma_1).$$

PROBLEMA 7. Demostrar, que si se escogen constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ en forma

$$\alpha_i = [\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)]^{-1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \tag{47}$$

entonces, para las funciones ψ_i de forma (46) se cumple la condición de conexión

$$\psi_0^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 = 1. \tag{48}$$

Las fórmulas (46), (47) dan una completa reducción del problema de Neumann (y, por consiguiente, del problema de Jacobi) al problema de inversión de Jacobi para la superficie de Riemann de género 2 con puntos de ramificación (45).

Es curioso notar que, a pesar de la coincidencia de los toros invariantes y los flujos en ellos (¡hasta en un dominio complejo!) para la ecuación (32) de potenciales bizonales, así como también para los problemas de Neumann y Jacobi, todos estos sistemas de Hamilton no son canónicamente equivalentes (¡verifíquese!).

Los sistemas de Neumann y Jacobi con dos grados de libertad, considerados en detalle por nosotros, casi automáticamente vuelven a escribirse para las dimensiones grandes. La integración de estos sistemas siempre puede ser reducida a potenciales de zonas finitas.

§ 13. Propiedades más simples de las variedades de Kahler. Toros abelianos

DEFINICIÓN 1. A una variedad compleja M^{2n} con una métrica hermitiana $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dz^\alpha\, d\bar{z}^\beta$, donde $\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, se la llamará de *Kahler*, si una 2-forma real correspondiente $\Omega = \frac{i}{2} \sum\limits_{\alpha<\beta} g_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ es cerrada: $d\Omega = 0$. Tiene lugar la afirmación (véase [1], parte I, §27): para una métrica de Kahler la forma $\Omega^n = \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ (n factores) es un elemento de volumen no nulo múltiple:

$$\Omega^n = c\,dV = c \sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^n, \qquad c \neq 0. \tag{1}$$

COROLARIO. *Las formas Ω^i, $i = 1, \ldots, n$ en una variedad compacta de Kahler no son cohomológicas a nulo. Por eso, los grupos $H^{2i}(M^{2n}, \mathbb{R})$ son no triviales.*

DEMOSTRACIÓN. Si la forma Ω es exacta, $\Omega = d\omega$, entonces la forma Ω^n es exacta, $\Omega^n = d(\omega \wedge \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega)$. Pero en una variedad compacta tenemos:

$$\int\limits_{M^{2n}} \Omega^n = c \int\limits_{M^{2n}} dV \neq 0.$$

Esto significa que la forma Ω no es exacta. El corolario queda demostrado.

EJEMPLO 1. Cualquiera superficie de Riemann es una variedad de Kahler por razonamientos de dimensión.

EJEMPLO 2. Una métrica hermitiana en $\mathbb{C}P^n$ se obtiene de la forma

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{n} dz^k\, d\bar{z}^k - \left(\sum_{k=0}^{n} z^k\, d\bar{z}^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \bar{z}^j\, dz^j\right) \tag{2}$$

en un espacio $\mathbb{C}^{n+1}$, a la cual consideramos como una forma en la esfera S^{2n+1}: $|z^0|^2 + \ldots + |z^n|^2 = 1$. Verifiquemos que la forma ds^2 es invariante respecto a las transformaciones

$$z^k \mapsto e^{i\varphi} z^k, \quad \bar{z}^k \mapsto e^{-i\varphi}\bar{z}^k.$$

Con la transformación indicada obtendremos:

$$dz^k \mapsto e^{i\varphi}(dz^k + iz^k\, d\varphi), \quad d\bar{z}^k \mapsto e^{-i\varphi}(d\bar{z}^k - i\bar{z}^k\, d\varphi),$$

así que

$$\sum_k dz^k\, d\bar{z}^k \mapsto \sum_k dz^k\, d\bar{z}^k + i\left[\sum_k (z^k\, d\bar{z}^k - \bar{z}^k\, dz^k)\right] d\varphi + d\varphi^2,$$

$$\sum_k z^k\, d\bar{z}^k \mapsto \sum_k z^k\, d\bar{z}^k - i d\varphi, \ \sum_j \bar{z}^j\, dz^j \mapsto \sum_j \bar{z}^j\, dz^j + i d\varphi.$$

Por consiguiente:

$$\sum_k dz^k\, d\bar{z}^k - \left(\sum_k z^k\, d\bar{z}^k\right)\left(\sum_j \bar{z}^j\, dz^j\right) \mapsto$$

$$\mapsto \sum_k dz^k\, d\bar{z}^k - \left(\sum_k z^k\, d\bar{z}^k\right)\left(\sum_j \bar{z}^j\, dz^j\right).$$

De manera que es posible considerar la forma ds^2 como una métrica en $\mathbb{C}P^n$. La forma Ω, definida por esta métrica, es del tipo:

$$\Omega = \frac{i}{2}\sum dz^k \wedge d\bar{z}^k - \frac{i}{2}\left(\sum z^k\, d\bar{z}^k\right) \wedge \left(\sum \bar{z}^k\, dz^k\right). \tag{3}$$

En la esfera S^{2n+1} tenemos $\sum z^k \bar{z}^k = 1$, de donde $\sum z^k\, d\bar{z}^k + \sum \bar{z}^k\, dz^k = 0$. Por eso la acotación de la forma Ω en la esfera da

$$\Omega = \frac{i}{2}\sum dz^k \wedge d\bar{z}^k. \tag{4}$$

Esta forma es cerrada (ha sido considerada en el § 1 al examinar un anillo de cohomologías del espacio $\mathbb{C}P^n$), por eso la variedad $\mathbb{C}P^n$ es de Kahler.

EJEMPLO 3. Ahora demos un ejemplo de una variedad compleja compacta, que no admite una estructura de Kahler, o sea la variedad de Hopf. Designemos por Γ a un grupo, que actúa en el espacio $\mathbb{C}^n \setminus 0$, engendrado por la transformación $z \mapsto 2z$. Está claro, que un factor $(\mathbb{C}^n \setminus 0)/\Gamma$ por esta acción es una variedad compleja compacta, homeomorfa a un producto directo $S^1 \times S^{2n-1}$. Entonces,

$H^2(S^1 \times S^{2n-1}, \mathbb{R}) = 0$ $(n > 1)$, y no es posible introducir una estructura de Kahler en esta variedad si $n > 1$.

Están definidas en la variedad de Kahler los períodos de la forma Ω que son sus integrales por los ciclos bidimensionales de $H_2(M^{2n}, \mathbb{Z})$. Se dice que la variedad es *de Hodge*, si todos los períodos de la forma Ω son enteros (o se hacen enteros después de multiplicarse por un mismo número, $\Omega \to \lambda\Omega$).

Por ejemplo, para la variedad $\mathbb{C}P^n$ sabemos que $H_2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, por eso es posible multiplicar una métrica ds^2 por un número conveniente, para que el único período de la forma Ω se vuelva un número entero.

PROBLEMA 1. La generatriz en el grupo $H_2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ es una subvariedad $\mathbb{C}P^1$, dada en $\mathbb{C}P^n$ por las ecuaciones $z^2 = \ldots = z^n = 0$. Calcular el período de la forma $\Omega = \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{n} dz^k \wedge d\bar{z}^k$ por este ciclo (multiplicador normalizante).

AFIRMACIÓN 1. *Una subvariedad complejo-analítica N^{2m} de la variedad de Kahler M^{2n}, es de Kahler.* Si *M^{2n} es de Hodge, entonces N^{2m} también es de Hodge.*

DEMOSTRACIÓN. Sean: $f: N^{2m} \to M^{2n}$, una inmersión; ds^2, una métrica hermitiana, que da en M^{2n} una estructura de Kahler; Ω, una forma cerrada, conexa con ella. Entonces, ds^2 induce una métrica hermitiana f^*ds^2 en N^{2m} y la forma conexa con ella es igual a $f^*\Omega$ y también cerrada. Por eso, la variedad N^{2m} es de Kahler. Si c es cualquier ciclo bidimensional en la variedad N^{2m}, entonces es justa la igualdad

$$\int_c f^*\Omega = \int_{f_*c} \Omega.$$

Para un ciclo con coeficientes enteros c, el ciclo f_*c es también con coeficientes enteros, por eso $\int_{f_*c} \Omega$ es un número entero para la variedad de Hodge M^{2n}. De aquí se deduce, que N^{2m} es de Hodge. La afirmación está demostrada.

En la variedad $\mathbb{C}P^n$ se destacan subvariedades complejas compactas y algebraicas. La clase más simple de estas variedades se da por un juego de ecuaciones («intersecciones completas»)

$$\left.\begin{array}{l} F_1(z_0, \ldots, z_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_h(z_0, \ldots, z_n) = 0, \end{array}\right\} \quad (5)$$

donde todas las funciones $F_1, \ldots, F_k$ son polinomios homogéneos:

$$F_i(cz_0, \ldots, cz_n) = c^{\alpha} F_i(z_0, \ldots, z_n).$$

COROLARIO. *Todas las subvariaciones complejas regulares en CP^n son variedades de Hodge.*

OBSERVACIÓN. Cada subvariedad de este tipo define un ciclo $N^{2m} \subset CP^n$. Para las subvariedades algebraicas compactas este ciclo nunca es cohomológico a nulo. Realmente, sean: $f: N^{2m} \to CP^n$, una inmersión (un encaje); Ω, una forma estándar en CP^n. Entonces, $f^*\Omega$ es una 2-forma en N^{2m}, conexa con una métrica inducida de Kahler. Por eso, $(f^*\Omega)^m$ es un múltiplo no nulo de un elemento de volumen en N^{2m}. En virtud de compactidad, tendremos:

$$\int_{N^{2m}} (f^*\Omega)^m \neq 0,$$

de donde $\int_{f_*N^{2m}} \Omega^m \neq 0$. El ciclo f_*N^{2m} no es frontera en CP^n porque la forma Ω^m es cerrada y su integral por cualquiera frontera es igual a cero, en virtud de la fórmula de Stokes.

Ahora consideremos el caso, cuando los toros complejos $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ son de Hodge, donde el retículo Γ está engendrado por $2n$ vectores linealmente independientes $e_1, \ldots, e_{2n}$. La métrica de Kahler en el toro T^{2n} se obtiene, si tomamos en $\mathbb{C}^n$ cualquiera métrica hermitiana con coeficientes constantes. Si en el toro T^{2n} está dada alguna métrica de Kahler, entonces, es posible hacerla media (integrarla) por el toro T^{2n} y obtener una métrica con coeficientes constantes.

PROBLEMA 2. Demostrar que si una métrica inicial es de Hodge, entonces, después de hacerla media, obtendremos una métrica de Hodge con los mismos períodos (consideramos, que el volumen del toro T^{2n} es igual a 1).

Así, es suficiente con examinar un caso de métricas con coeficientes constantes. Cada tal métrica es definida por cierto producto escalar hermitiano en $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$:

$$H(x, y) = \sum_{\alpha\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} z_1^{\alpha} \bar{z}_2^{\beta}, \quad x = (z_1^{\alpha}), \ y = (z_2^{\beta}), \ h_{\beta\alpha} = \bar{h}_{\alpha\beta}. \tag{6}$$

$H(x, y)$ puede ser considerada como una función bilineal de valor complejo en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$, que satisface las relaciones:

$$H(y, x) = \overline{H(x, y)}, \quad H(ix, y) = iH(x, y). \tag{7}$$

Si $H(x, y) = F(x, y) + iG(x, y)$, donde $F(x, y)$ y $G(x, y)$ son reales, entonces de las igualdades (7) se deduce, que $F(x, y) =$

$= F(y, x)$, $G(x, y) = -G(y, x)$, $F(x, y) = G(ix, y)$. Por eso, la forma $F(x, y)$ es definida como positiva y toda la forma se define por una parte imaginaria de $G(x, y)$.

AFIRMACIÓN 2. *El toro $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ es de Hodge si, y sólo si, existe una forma antisimétrica real $G(x, y) = -G(y, x)$ tal, que:*

1) *la forma $F(x, y) = G(ix, y)$ es simétrica y definida positiva.*

2) *$G(e_\alpha, e_\beta)$ es un número entero para cualesquiera dos vectores del retículo.*

A estas condiciones se las llaman *relaciones de Frobenius.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de los razonamientos arriba mencionados es suficiente con demostrar que la condición 2) es equivalente a que la métrica en el toro T^{2n}, definida por una forma hermitiana $H(x, y) = G(ix, y) + iG(x, y)$, es de Hodge. Sabemos que el rango del grupo $H_2(T^{2n}, \mathbb{Z})$ es igual a $C_{2n}^2 = n(2n - 1)$ (número de combinaciones), donde la base de los ciclos bidimensionales en T^{2n} tiene la forma $c_{\alpha\beta} = \{\lambda e_\alpha + \mu e_\beta\}$, $0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1$ $(\alpha < \beta)$. La forma G es conexa con la métrica de Kahler, por eso el toro T^{2n} es de Hodge si, y sólo si, las integrales de la forma G por todos los ciclos $c_{\alpha\beta}$ son enteras.

La acotación de la forma G en el ciclo $c_{\alpha\beta}$ es igual a $G(e_\alpha, e_\beta) \times \times d\lambda \wedge d\mu$, y la integral por este ciclo es igual a $G(e_\alpha, e_\beta)$. La afirmación queda demostrada.

En el § 4 de la parte II del libro [1] fue introducida una importante clase de toros abelianos complejos. Si definimos una matriz (B_{kj}) con las igualdades $e_{n+k} = \sum_{j=1}^{n} B_{kj} e_j$, $1 \leqslant k \leqslant n$, entonces, para el toro abeliano la matriz (B_{kj}) debe ser simétrica y tener una parte imaginaria positiva. En particular, en el parágrafo anterior se mostró que los toros de Jacobi de las superficies de Riemann son abelianos. Tiene lugar la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN 3. *Cualquier toro abeliano es de Hodge.*

DEMOSTRACIÓN. Damos una forma hermitiana $H(x, y)$ con la igualdad

$$H(x, y) = \beta_{kj} z_1^k \bar{z}_2^j, \quad x = (z_1^1, \ldots, z_1^n), \quad y = (z_2^1, \ldots, z_2^n). \tag{8}$$

Aquí la matriz (β_{kj}) es inversa a la matriz positiva definida $\operatorname{Im} B$. La parte imaginaria de la forma $H(x, y)$ es del tipo

$$G(x, y) = \operatorname{Im} H(x, y) = \frac{1}{2i} \beta_{kj} (z_1^k \bar{z}_2^j - z_2^j \bar{z}_1^k) \tag{9}$$

en virtud de la simetría de la matriz (β_{kj}). Comprobemos, que la forma antisimétrica $G(x, y)$ toma valores enteros en la base $e_1, \ldots$

$\ldots, e_{2n}$ del retículo Γ. Tenemos, para $m, l \leqslant n$:

$$G(e_m, e_l) = \frac{1}{2i} \beta_{kj} (\delta_m^k \delta_l^j - \delta_l^j \delta_m^k) \equiv 0,$$

$$G(e_m, e_{n+l}) = \sum_j \frac{1}{2i} \beta_{kj} (\delta_m^k \bar{B}_{lj} - B_{lj} \delta_m^k) =$$

$$= -\delta_m^k \sum_j \beta_{kj} (\operatorname{Im} B)_{jl} = -\delta_m^k \delta_{kl} = -\delta_{ml} = -G(e_{n+l}, e_m),$$

$$G(e_{n+m}, e_{n+l}) = \sum_{k,j} \frac{1}{2i} \beta_{kj} (B_{mk} \bar{B}_{lj} - B_{lj} \bar{B}_{mk}) =$$

$$= \sum_{k,j} \beta_{kj} (b''_{mk} b'_{lj} - b'_{mk} b''_{lj}) = b'_{lm} - b'_{ml} = 0,$$

donde se han introducido las designaciones $b'_{jk} = \operatorname{Re} B_{jk}$, $b''_{jk} = \operatorname{Im} B_{jk}$. Así, la forma $G(x, y)$ es con coeficientes enteros en el toro $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$. Es evidente que la métrica hermitiana (8) es definida positivamente. La afirmación queda demostrada.

PROBLEMA 3. Demostrar la corrección de una afirmación inversa: cualquier toro de Hodge es abeliano.

Notemos, en conclusión, que la importancia de la clase de toros de Hodge (o abelianos) consiste en que cualquier toro abeliano puede ser realizado explícitamente con ayuda de θ-funciones como una subvariación algebraica regular en un espacio proyectivo complejo (Lefshetz). Este teorema es justo para todas las variedades de Hodge (Kodaira; véase [21]).

§ 14. Homologías con coeficientes en los haces

Es conveniente describir un tipo más de homologías, que tiene una importancia esencial en diferentes dominios de las matemáticas (pero no en los límites de los materiales de este libro).

Sea X un espacio recubierto con los dominios abiertos U_α, $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.

Exigimos que el recubrimiento $\{U_\alpha\}$ sea «localmente finito» (es decir, sólo juegos finitos de los dominios U_α pueden intersecarse).

DEFINICIÓN 1. a) Se llama *prehaz* F a la correspondencia que a cada dominio $U \subset X$ le confronta un grupo abeliano (anillo, campo) F_U; se exige, que a un encaje (inmersión) $U \subset V$ le corresponda un homomorfismo de «restricción»

$$i_{UV} : F_V \to F_U. \qquad (1)$$

Si $U \subset V \subset W$, entonces $i_{UW} = i_{UV} i_{VW}$. El prehaz F define el prehaz $F|_U$ en cualquier dominio $U \subset X$.

b) El prehaz F se llama haz, si tiene las siguientes propiedades:

1) Sea que un dominio U se representa en forma de unión de dominios U_α:

$$U = \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

Entonces, si $i_{U_\alpha U}(f) = 0$ para todos los α, un elemento $f \in F_U$ debe ser nulo.

2) Cualquier punto tiene un entorno bastante pequeño U tal, que un juego de elementos «coordinados» $f_\alpha \in F_{U_\alpha}$ se representa como un conjunto de restricciones de un elemento común $f \in F_U$. Aquí

$$U = \bigcup_\alpha U_\alpha, \quad U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta = U_{\beta\alpha},$$
$$i_{U_{\alpha\beta}U_\beta} f_\beta = i_{U_{\beta\alpha}U_\alpha} f_\alpha \text{ («coordinación»)},$$
$$i_{U_\alpha U} f = f_\alpha.$$

A un conjunto vacío $\varnothing$ le corresponde siempre un cero: $F_\varnothing = 0$.

Con el recubrimiento $\{U_\alpha\}$ se relaciona un complejo simplicial, «nervio de recubrimiento», designado por $N\{U_\alpha\}$:

1) los vértices σ^0_α corresponden a dominios U_α;

2) las aristas $\sigma^1_{\alpha\beta}$ corresponden a pares (U_α, U_β), si la intersección es no vacía, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$;

3) los triángulos $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$ corresponden al trío $(U_\alpha, U_\beta, U_\gamma)$, donde la intersección es no vacía, $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$;

4) el simplex $\sigma^k_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_k}$ corresponde a un juego de dominios $(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_k})$ tales, que la intersección $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ es no vacía.

Aparecen «cohomologías de recubrimiento» con coeficientes en el prehaz F: cocadenas k-dimensionales que son funciones lineales en los símplex $\sigma^k_{\alpha_0\ldots\alpha_k}$ de dimensión k en el nervio $N\{U_\alpha\}$ con valor en los grupos $F(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k})$. Aquí las cocadenas tienen su dominio de valores en cada símplex. A una cocadena c^k le corresponde su cofrontera

$$(\delta c^k, \delta^{k+1}_{\alpha_0\ldots\alpha_{k+1}}) = \sum_{q=0}^{k=1} (-1)^q i_{UU_q}(c^k, \sigma^k_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_q\ldots\alpha_{k+1}}),$$

donde

$$(c^k, \sigma^k_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_q\ldots\alpha_{k+1}}) \text{ se encuentra en un grupo } F_{U_q},$$
$$U = U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_{k+1}},$$
$$U \subset U_q = U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap \hat{U}_{\alpha_q} \cap \ldots U_{\alpha_{k+1}}$$

(el dominio U_{α_q} está borrado de la intersección).

A las cohomologías de recubrimiento se las llamarán grupos cocientes de los cociclos por las cofronteras:

$$H^q (N \{U_\alpha\}, F) = \operatorname{Ker} \delta / \operatorname{Im} \delta = Z^q/B^q.$$

Sea que un recubrimiento $\{V_\beta\}$ está «inscrito» en $\{U_\alpha\}$: si la intersección $V_\beta \cap U_\alpha$ es no vacía, entonces V_β se encuentra íntegramente en U_α. Es fácil de verificar que surge una aplicación simplicial (un símplex pasa a ser simplex) de los nervios de estos recubrimientos:

$$N \{V_\beta\} \xrightarrow{\varphi_{UV}} N \{U_\alpha\}.$$

De manera que, utilizando (1), tenemos una aplicación de cocadenas y cohomologías:

$$H^* (N \{U_\alpha\}, F) \xrightarrow{\varphi^*_{UV}} H^* (N \{V_\beta\}, F).$$

Toda esta estructura (para los recubrimientos bastante «pequeños») describe las cohomologías con coeficientes en el haz: $H^* (X, F)$ es un «límite de espectro» (φ^*_{UV}) de todos los recubrimientos del espacio X.

Los elementos x de este «límite del espectro» están representados por todos los elementos posibles $x_U \in H^q (N \{U_\alpha\}, F)$ para todos los recubrimientos posibles $\{U_\alpha\}$.

Los elementos $x_U \in H (N \{U_\alpha\}, F)$ y $x_W \in H^q (N \{W_\gamma\}, F)$ se representan con un mismo elemento de $H^q (X, F)$ si, y sólo si, tenemos para cierto recubrimiento más pequeño V, inscrito en U y W

$$\varphi^*_{UV} x_U = \varphi^*_{WV} x_W = x_V \in H^q (N \{V_\beta\}, F).$$

EJEMPLO 1. Haz constante. Sean $F_U = G$ (un grupo abeliano, el mismo para todos los $U \neq \varnothing$) aplicaciones i_{UV} idénticas

$$i_{UV} \equiv 1 : G \approx G.$$

Si $X = M^n$ es una variedad, y un recubrimiento es tal, que todos los conjuntos $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ son contractables (por ejemplo, U_α son figuras convexas, pequeñas por su tamaño en una métrica M^n), entonces es justa la igualdad

$$H^* (N \{U_\alpha\}, G) = H^* (M^n, G).$$

PROBLEMA 1. Demostrar que en este caso el nervio es un complejo equivalente homológicamente a M^n.

EJEMPLO 2. Haces continuos (funcionales). Aquí F_U es un anillo (espacio lineal) de las funciones de alguna clase: continuas, suaves, holomorfas, algebraicas, etc. en el dominio $U \subset X$.

PROBLEMA 2. Demostrar que $H^0(X, F)$ son funciones de la misma clase, definidas globalmente en toda la variedad $X = M^n$ y $F_U = H^0(U, F|_U)$.

DEFINICIÓN GENERAL. A un haz $\widetilde{F}$, definido por un prehaz F, se le llamará *nuevo prehaz* tal, que $\widetilde{F}_U = H^0(U, F|_U)$ para cualquier dominio U.

El grupo $H^1(X, F)$ aparece, por ejemplo, en el siguiente problema: sea dado un juego de las «partes principales» f_α de una función f en los dominios U_α, donde $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$. Aquí $X = M^{2n}$ es una variedad compleja. Las partes principales f_α son, por ejemplo, partes de Laurent de una función incógnita f cerca de los polos. Es necesario hallar una función meromorfa f en X tal, que las funciones $(f - f_\alpha)$ son holomorfas en los dominios U_α. Está claro, que es necesaria la «coordinación» o sea, $f_\alpha - f_\beta = g_{\alpha\beta}$ son holomorfas en las intersecciones $U_\alpha \cap U_\beta$. Indicar la relación de este problema con las cohomologías $H^1(X, F)$ en un haz, donde $F(U) = H^0(U, F)$ es un espacio lineal de las funciones holomorfas en el dominio U. Demostrar que el problema es resoluble, si $H^1(X, F) = 0$.

EJEMPLO 3. Un ejemplo más de un haz: sea $X \xrightarrow{f} Y$ una aplicación continua. A un dominio $U \subset Y$ le corresponde $f^{-1}(U \subset) \subset X$. Hagamos

$$F^j_U = H^j(f^{-1}(U)).$$

Aparecen las cohomologías $H^q(Y, F^j)$, $j \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. En la variante más general del teorema de Leray (véase el § 8) es necesario cambiar $E_2^{q,j}$ por $H^q(Y, F^j)$. Todo lo demás sigue siendo correcto. Si $X \xrightarrow{p} Y$ es un espacio fibrado, donde la base es un complejo celular y simplemente conexa, entonces tenemos

$$H^q(Y, F^j) = H^q(Y, H^j(\widetilde{F})),$$

donde $\widetilde{F} = p^{-1}(y)$ es una fibra. Demostrarlo.

EJEMPLO 4. El problema sobre la clasificación de un espacio fibrado con una base X y un grupo estructural G, que fue considerado en el § 25 de la parte II del libro [1] desde otro punto de vista, da un ejemplo de haz (hablando en general, de los grupos no conmutativos). Sea dado un espacio fibrado $E \xrightarrow{p} X$ con un grupo G y una fibra $\widetilde{F}$. Si $\{U_\alpha\}$ es un recubrimiento X, donde $p^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \widetilde{F}$, entonces la estructura de un espacio fibrado es definida por las «aplicaciones de pegadura» (véase [1], parte II, § 24)

$$\lambda_{\alpha\beta}^{-1} = \lambda_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \qquad (2)$$

Al mismo tiempo para $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ tenemos

$$\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{\beta\gamma}\lambda_{\gamma\alpha} = 1. \qquad (3)$$

La condición (3) significa, que el juego $(\lambda_{\alpha\beta})$ es un cociclo unidimensional en el recubrimiento $\{U_\alpha\}$ con valor en el haz F, y $F(U_\alpha)$ son funciones continuas sobre U_α con valor en G. Si un espacio fibrado es directo, entonces tendremos (es posible, que al principio haya que desmenuzar el recubrimiento) un juego de funciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to G$ tal, que $\lambda_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}\varphi_\beta$. De manera que las clases del espacio fibrado son elementos de $H^1(X, F)$. Esto no es un grupo, si G es no abeliano.

PROBLEMA 3. Calcular $H^1(X, F)$, si G es un grupo abeliano.

PROBLEMA 4. Demostrar que un haz F sobre una variedad suave, donde F_u es un espacio lineal de las funciones suaves en un dominio U (más exactamente, suaves en un dominio cerrado $\bar{U} \supset U$), tiene cohomologías triviales con $q > 0$: $H^q(M^n, F) = 0$, $q > 0$; $H^0(M^n, F) = C^*(M^n)$ es un anillo de funciones sobre M^n. Sobre las variedades complejas se tiene un haz holomorfo, para el que no es cierto este hecho.

PROBLEMA 5. Por analogía, si es dado un espacio fibrado vectorial con base $B = M^n$: sean F_U secciones suaves de un espacio fibrado sobre un dominio U. Demostrar la igualdad (no será cierto esto en una variante holomorfa):

$$H^q(M^n, F) = 0, \qquad q > 0.$$

$H^0(M^n, F)$ es un espacio de secciones de un espacio fibrado.

INDICACIÓN. Aprovechar el hecho de que es posible prolongar una función suave del dominio U sobre toda la variedad M^n.

PROBLEMA 6. Sean $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, tres haces, donde para todo U de forma esférica lo suficientemente pequeño, tengamos una sucesión exacta de los grupos:

$$0 \to F_U^{(0)} \xrightarrow{\alpha_U} F_U^{(1)} \xrightarrow{\beta_U} F_U^{(2)} \to 0,$$

con esto, todos los α_U y β_U conmutan con las aplicaciones $i_{UV}: F_U^{(k)} \to F_V^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$. Construir una sucesión exacta de cohomologías

$$0 \to H^0(M^n, F^{(0)}) \xrightarrow{\alpha} H^0(M^n, F^{(1)}) \xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta} H^0(M^n, F^{(2)}) \xrightarrow{\delta} H^1(M^n, F^{(0)}) \xrightarrow{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\alpha} H^1(M^n, F^{(1)}) \xrightarrow{\beta} H^1(M^n, F^{(2)}) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^2(M^n, F^{(0)}) \xrightarrow{\alpha} \dots$$

EJEMPLO 1. Sean: F_U, funciones suaves reales en el dominio U; $F_U^{(0)}$ un haz constante de forma $F_U^{(0)} = \mathbb{Z}$ y $F_U^{(2)}$ funciones con valor

en $G = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Calcular $H^1(M^n, F^{(2)})$; clasificar los espacios fibrados con el grupo $G^1 = S^1$, utilizando los problemas dados arriba.

EJEMPLO 2. Sean: $\widetilde{F}_U^{(1)}$, un espacio lineal de las funciones holomorfas en el dominio U; $\widetilde{F}_U^{(0)} = \mathbb{Z}$, un haz constante; $\widetilde{F}_U^{(2)}$ un grupo con operación de multiplicación de las funciones holomorfas en U, que no se anulan. La aplicación $\alpha: \mathbb{Z} \to F_U^{(1)}$ es una inmersión (un encaje) de las constantes, la aplicación $\beta: \widetilde{F}_U^{(1)} \to \widetilde{F}_U^{(2)}$ tiene la forma $f \xrightarrow{\beta} \exp(2\pi i f)$, la inscripción del haz $\widetilde{F}^{(2)}$ es multiplicativa.

PROBLEMA 7. Demostrar que el grupo $H^1(M^n, \widetilde{F}^{(2)})$ clasifica los 1-espacios fibrados holomorfos (véase [1], parte II, § 25). ¿Cuál es la relación del grupo $H^1(M^n; \widetilde{F}^{(1)})$ con la clasificación de los espacios fibrados holomorfos, que son productos topológicamente directos (es decir, sin estructura compleja)?

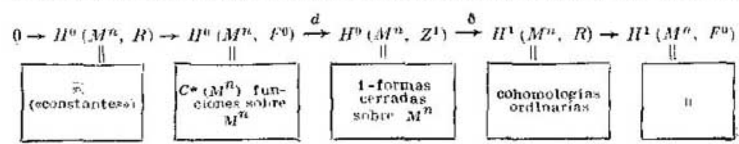
EJEMPLO 3. Por definición, son tensores las secciones de diferentes potencias tensoriales de un espacio fibrado tangente de los vectores y covectores. Con los tensores están relacionados los haces, donde F_U son campos tensoriales suaves sobre el dominio $U \subset M^n$ en la base M^n. En el caso cuando se toman tensores antisimétricos (con los índices inferiores), o sea, formas diferenciales, podemos definir los haces F^i, donde F_U^i son formas sobre el dominio $U \subset M^n$. Surge una «sucesión exacta de los haces» (es decir, de los grupos F_U^i para todos los pequeños dominios de forma esférica $U \subset M^n$):

$$0 \to R \to F^0 \xrightarrow{d} F^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} F^n \to 0 \qquad (4)$$

Aquí R es un haz constante (constantes) y el operador d en cualquier dominio U transforma las formas del grado i en las formas del grado $i+1$. La exactitud de la sucesión de los haces (4) se deduce del corolario 1 del teorema 1.2, que afirma que para los dominios pequeños de forma esférica U cada forma cerrada ω con $\deg \omega > 0$ es localmente exacta, o sea de $d\omega = 0$ y $\deg \omega > 0$ se deduce $\omega = d\omega'$. Escojamos un haz de formas cerradas $Z_U^1 \subset F_U^1$, donde $Z_U^1 = \operatorname{Ker} d$ (1-formas cerradas en el dominio $U \subset M^n$). Tenemos una sucesión exacta de haces, por definición:

$$0 \to R \to F^{(0)} \xrightarrow{d} Z^1 \to 0.$$

Consideremos la sucesión exacta de las cohomologías de estos haces:



Utilizando el resultado del problema 4 (véase más arriba), tenemos $H^1(M^n, F^0) = 0$. Por eso tenemos una aplicación sobre («epimorfismo»):

$$H^0(M^n, Z^1) \xrightarrow{\delta} H^1(M^n, R) \to 0.$$

El núcleo de la aplicación δ tiene forma df, f es una función suave. De aquí concluimos

$$H^1(M^n, R) = \operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d = H^0(M^n, Z^1)/(df)$$

(o sea, clases de formas cerradas por las exactas).

Complicando este razonamiento, es posible obtener ya mencionado «teorema de Rham» (véase § 6): los grupos de cohomologías determinados mediante las formas diferenciales coinciden con los simpliciales $H^q(M^n, R)$ para todo q. Mostremos esto para $q \leqslant 2$.

Consideramos los haces

a) $F^0_U/R = \bar{F}^0_U$; b) $Z^2_U = d(F^1_U)$

son 2-formas cerradas.

Tenemos dos sucesiones de haces

a) $0 \to R \to F^0 \to F^0/R \to 0$;

b) $0 \to F^0/R \xrightarrow{d} F^1 \to Z^2 \to 0$.

De la sucesión exacta de cohomologías para a) concluimos, utilizando el resultado del problema 4 (véase más arriba):

a) $H^1(M^n, F^0/R) \cong H^2(M^n, R)$.

De la sucesión exacta b) tenemos:

b) $H^0(M^n, Z^2)/(df) \cong H^1(M^n, F^0/R)$.

Puesto que $H^0(M^n, Z^2)$ son formas cerradas, tenemos definitivamente:

$$Z^2(M^n)/(df) \cong H^2(M^n, R).$$

CAPÍTULO 2

PUNTOS CRÍTICOS DE LAS FUNCIONES SUAVES Y DE LAS HOMOLOGÍAS

§ 15. Funciones de Morse y complejos celulares

Supongamos, que en una variedad compacta suave M sea dada una función de Morse (o sea, todos sus puntos críticos son no degenerados). Estudiaremos la estructura de las superficies de nivel $f_c = \{f(x) = c\}$ y de dominios de menores valores $M_c = \{f(x) \leqslant c\}$.

LEMA 1. (M. Morse). *Sean: $f(x)$, una función suave sobre M; x_0, un punto estacionario no degenerado o crítico para f. Es posible hallar tales coordenadas locales $y^1, \ldots, y^n$ en el entorno del punto x_0, que en estas coordenadas la función f se escribirá así: $f(y^1, \ldots, y^n) = -(y^1)^2 - \ldots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \ldots + (y^n)^2$. (El número λ se llama índice del punto crítico.)*

DEMOSTRACIÓN. Al principio, hagamos la demostración cuando $n = 2$; para n mayores los razonamientos son completamente análogos.

En virtud del carácter local de la afirmación del lema, es posible considerar, que $f(x_1, x_2)$ es dada en un disco $D_\varepsilon^2(0)$ de radio $\varepsilon > 0$, $f(0) = 0$, donde 0 es un punto crítico para f. Existen funciones suaves g_1, g_2 tales, que $f = x^1 g_1 + x^2 g_2$; $g_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x^i}$.

En realidad, tiene lugar la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = f(1 \cdot x) - f(0 \cdot x) = f(x).$$

Luego

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} x^\alpha\, dt = x^\alpha \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha}\, dt = x^\alpha g_\alpha(x),$$

donde

$$g_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha}\, dt.$$

12—01126

Está claro que $g_{\alpha}(0)=0$, puesto que el grad $f(0)=0$. Por consiguiente, existen funciones suaves $h_{\alpha\beta}(x)$ tales, que $g_{\alpha}(x)= = x^{\beta}h_{\alpha\beta}(x)$. Así: $f(x)=x^{\alpha}x^{\beta}h_{\alpha\beta}(x)$, donde se puede considerar, que $h_{\alpha\beta}=h_{\beta\alpha}$. Luego: $h(0)=\| h_{\alpha\beta}(0)\| = \left\| \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{\beta}} \right\|$. En realidad:

$$g_{\alpha}(x)=\int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^{\alpha}}\,dt = x^{\beta}\int_0^1 \frac{\partial g_{\alpha}(tx)}{\partial x^{\beta}}\,dt =$$

$$= x^{\beta}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\int_0^1 \frac{\partial f(t\tau x)}{\partial x^{\alpha}}\,d\tau\right)dt =$$

$$= x^{\beta}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 f(t\tau x)}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{\beta}}\,d\tau\,dt = h_{\alpha\beta}(x)\cdot x^{\beta}.$$

De aquí

$$h_{\alpha\beta}(0)=\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{\beta}}.$$

Luego hagamos la demostración del lema con $n=2$. En las coordenadas locales (x^1, x^2) la función f es de la forma:

$$f=(x^1)^2 h_{11}+2x^1x^2h_{12}+(x^2)^2 h_{22}.$$

Se puede considerar que $h_{11}(0)\neq 0$. En efecto, la matriz $\| h_{\alpha\beta}(0)\|$ es simétrica y regular y por eso es posible, mediante cambio lineal de coordenadas, reducirla a la forma diagonal. Ya que desde el principio se hubiesen podido considerar las coordenadas (x^1, x^2) tales, que $\| h_{\alpha\beta}(0)\|$ es de forma diagonal, y se puede decir que $h_{11}(0)\neq 0$. Entonces $h_{11}(x)\neq 0$ también en algún entorno abierto del punto 0, y en este entorno tenemos:

$$f(x)=h_{11}\left((x^1)^2+2x^1x^2\,\frac{h_{12}}{h_{11}}+(x^2)^2\,\frac{h_{12}^2}{h_{11}^2}\right)+(x^2)^2\left(h_{22}-\frac{h_{12}^2}{h_{11}}\right)=$$

$$=h_{11}\left(x^1+\frac{h_{12}}{h_{11}}\,x^2\right)^2+(x^2)^2\left(h_{22}-\frac{h_{12}^2}{h_{11}}\right).$$

Puesto que $h_{11}h_{22}-h_{12}^2\neq 0$ en algún entorno del punto 0 (la matriz $\| h_{\alpha\beta}(0)\|$ es regular), entonces, efectuando el reemplazo

$$y^1=\sqrt{|h_{11}|}\left(x^1+\frac{h_{12}}{h_{11}}\,x^2\right);\quad y^2=\sqrt{\left|h_{22}-\frac{h_{12}^2}{h_{11}}\right|}\,x^2,$$

obtenemos:

$$\tilde{f}(y^1, y^2)=\pm(y^1)^2\pm(y^2)^2.$$

Debido a que el cambio de coordenadas es sin duda localmente regular, el lema queda demostrado.

Demos la demostración del lema de Morse en el caso de un n arbitrario

Recordemos, que es simétrica la matriz $\| h_{\alpha\beta}(0) \|$ arriba introducida. En adelante pasamos a la demostración por inducción. Sea que la función f en las coordenadas $y^1, y^2, \ldots, y^n$ ya tiene la forma

$$f(y) = \pm (y^1)^2 \pm \ldots \pm (y^{k-1})^2 + \sum_{\alpha, \beta \geqslant k} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta}(y),$$

donde las funciones $P_{\alpha\beta}(y)$ forman una matriz simétrica y regular en el punto 0. Está claro, que cuando $k = 1$ se cumple este supuesto de inducción (véase la construcción de la matriz $\| h_{\alpha\beta} \|$, que desempeña el papel de la matriz $\| P_{\alpha\beta} \|$ cuando $k = 1$). Reescribimos la función $f(y)$ de la siguiente manera:

$$f(y) = \pm (y^1)^2 \pm \ldots \pm (y^{k-1})^2 + P_{kk}(y)(y^k)^2 + \sum_{\alpha, \beta \geqslant k} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta}(y)$$

$$(\alpha \neq \beta \text{ cuando } \beta = k)$$

la matriz $(n \times n)$ $\| P_{\alpha\beta}(y) \|$ está representada en la fig. 49. Puesto que $\| P_{\alpha\beta} \|$ es simétrica y regular, existe un cambio lineal de varia-

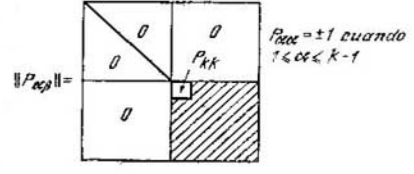


Fig. 49.

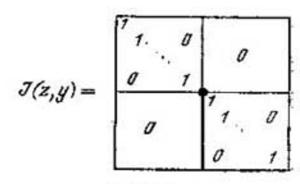


Fig. 50.

bles $y^k, y^{k+1}, \ldots, y^n$ tal, que en un punto (en el origen de coordenadas) la matriz $\| P_{\alpha\beta}(0) \|$ se reducirá a la forma diagonal; en particular, se puede considerar que las coordenadas $y^k, \ldots, y^n$ son escogidas exactamente de esta manera y, por consiguiente, $P_{kk}(0) \neq 0$. Consideremos la función $q(y) = \sqrt{|P_{kk}(y)|}$ y efectuemos el cambio de las variables: $(y^i) \to (z^i)$ por fórmulas

$$z^i = y^i \quad \text{con} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1; \quad k+1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$z^k = q(y)\left(y^k + \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}(y)}{P_{kk}(y)}\right).$$

Hallemos el jacobiano de cambio $(y) \to (z)$ en el punto 0 (vease la fig. 50). Es evidente que $\left.\frac{\partial z^k}{\partial y^k}\right|_0 = q(0) = \sqrt{|P_{kk}(0)|} \neq 0$, o sea det $I(z, y) = \frac{\partial z^k}{\partial y^k} \neq 0$. Según et teorema sobre las funciones implí-

citas, las funciones $(z^1, \ldots, z^n)$ son coordenadas locales en algún entorno suficientemente pequeño del punto 0 (lo que es evidente, en virtud de que la matriz del cambio de coordenadas es triangular). Así, obtenemos:

$$f(z) = \sum_{i \leq k-1} \pm (z^i)^2 + P_{kk} \frac{(z^k)^2}{q^2(y)} - 2P_{kk} \frac{z^k}{q(y)} \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} + \\ + P_{kk} \left(\sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right)^2 + 2 \left(\frac{z^k}{q(y)} - \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right) \sum_{i>k} y^i P_{ik} + \\ + \sum_{\alpha, \beta > k+1} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta} = \pm (z^1)^2 \pm \ldots \pm (z^k)^2 + \sum_{\alpha, \beta \geq k+1} z^\alpha z^\beta \widetilde{P}_{\alpha\beta}.$$

El paso de la inducción ha concluido, lo que demuestra la afirmación necesaria para un n arbitrario.

OBSERVACIÓN. El lema demostrado no es muy importante para el estudio de las superficies de nivel de la función $f(x)$ en un entorno del punto crítico. Está claro de antemano que la topología de los niveles se define por la forma d^2f a causa de su regularidad.

LEMA 2. *Sea $f(x)$ una función suave sobre una variedad compacta cerrada M^m* y *que el segmento $[a, b]$ (donde $a < b$)* no *contenga valores críticos de la función f (es decir, en el conjunto $f^{-1}[a, b]$ no hay puntos críticos). Entonces, la variedad f_a es difeomorfa a f_b y la variedad M_a (con borde) es difeomorfa a M_b.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de compacidad de M se tiene un $\varepsilon > 0$ tal, que el segmento $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ tampoco contiene valores críticos de la función $f(x)$. Se puede considerar, que en M es dada una métrica positiva de Riemann; entonces vamos a examinar un campo vectorial grad $f(x) = v(x)$. Este campo no tiene singularidades en la variedad (con borde) $f^{-1}[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ y $v(x)$ es ortogonal respecto a las hipersuperficies de nivel $f^{-1}(\alpha)$, $a \leq \alpha \leq b$. Consideremos las trayectorias integrales del campo $v(x)$, que comienzan en $f^{-1}(b)$ y terminan en $f^{-1}(a)$, véase la fig. 51.

En virtud de la compacidad de M, es posible realizar la deformación suave de la superficie $f^{-1}(b)$ a lo largo de las trayectorias integrales del campo $v(x)$ sobre la superficie $f^{-1}(a)$. Es evidente, que $f^{-1}(b)$ y $f^{-1}(a)$ son difeomorfas. Por analogía se determina el difeomorfismo entre M_a y M_b, ya que la preimagen completa $f^{-1}[a, b]$ es difeomorfa a $f_a \times I$, donde I es un segmento. El lema queda demostrado.

Ahora consideremos la conducta de las superficies de nivel cerca de los puntos críticos de la función $f(x)$.

Sea $x_0 \in M^n$ un punto crítico no degenerado para $f(x)$, donde $f(x_0) = 0$. Entonces, en vigor del lema 1 (de Morse), en un entorno bastante pequeño $U(x_0)$ del punto x_0 se pueden introducir unas

coordenadas curvilíneas $x^1, \ldots, x^n$ tales, que $f(x) = -(x^1)^2 - \ldots$ $\ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2$. Consideramos que el centro 0 del entorno $U(x_0)$ está ubicado en x_0, y que $f(0) = 0$. Examinemos tres hipersuperficies: f_0, f_ε, $f_{-\varepsilon}$, donde $\varepsilon > 0$ es bastante pequeño. Éstas se dan por las ecuaciones (en el dominio U)

$$(-x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 = \begin{cases} 0 \\ \varepsilon. \\ -\varepsilon. \end{cases}$$

Aquí λ es un índice del punto crítico. Es evidente, que en las coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ la superficie f_0 es un cono con un vértice en 0, y ambas superficies $f_{\pm\varepsilon}$ son hiperboloides (véase la fig. 52).

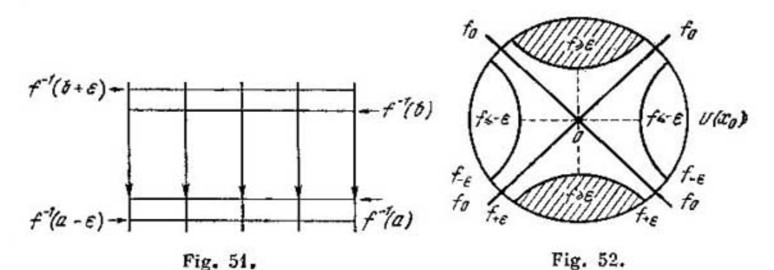


Fig. 51. Fig. 52.

LEMA 3. *En el caso, cuando* $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] = M_{+\varepsilon} \setminus M_{-\varepsilon}$ *contiene sólo un punto crítico del índice* λ, *la variedad* $M_{+\varepsilon}$ *es de tipo homotópico de un complejo celular, que se obtiene de* $M_{-\varepsilon}$ *al pegar a* $M_{-\varepsilon}$ *una célula* σ^λ *(de dimensión* λ, *donde* λ *es un índice del punto crítico* x_0) *a la frontera* $f_{-\varepsilon} = \partial M_{-\varepsilon}$.

DEMOSTRACIÓN. Construimos la deformación φ_t: $M_{+\varepsilon} \to M_{+\varepsilon}$, donde $\varphi_0 = 1$, y φ_1: $M_{+\varepsilon} \to M_{-\varepsilon} \cup \sigma^\lambda$ idéntica en $M_{-\varepsilon}$; la existencia de tal deformación demuestra el lema. Consideremos un campo vectorial $v(x) = -\operatorname{grad} f(x)$ y, en calidad de φ_t consideremos la deformación de puntos x fuera de $M_{-\varepsilon}$ y fuera del entorno U a lo largo de las trayectorias integrales del campo $v(x)$. En el entorno U, en calidad de φ_t, consideremos la deformación mostrada en la fig. 53. Aquí el segmento AB representa condicionalmente un disco $D^\lambda(x^1, \ldots, x^\lambda)$, cuya frontera (la esfera $S^{\lambda-1}$) está sumergida suavemente en el borde $f_{-\varepsilon}$ del dominio $M_{-\varepsilon}$ (en el dibujo $\lambda = 1$ y la frontera —la esfera S^0— es un par de los puntos A y B). El resultado de deformación se muestra en la fig. 54. El lema queda demostrado.

TEOREMA 1. *Cualquier variedad suave compacta conexa cerrada* M^n *es del tipo homotópico de un complejo celular, en el cual a cada punto*

crítico P_λ del índice λ le corresponde una célula de dimensión λ, donde $\{P_\lambda\}$ son puntos críticos de cierta función de Morse sobre M.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función de Morse sobre M, donde en cada nivel crítico f se halla exactamente un punto crítico. Hay muchas de estas funciones (véase [1], p. II, § 10). De manera que el teorema se deduce de los lemas anteriores y del teorema 5 del § 10, p. II del libro [1].

En una serie de casos las propiedades analíticas de la función f restringen los índices de los puntos críticos.

PROBLEMA 1. Si $f = \mathrm{Re}\, F(z^1, \ldots, z^n)$ es una parte real de la función complejo-analítica en $\mathbb{C}^n$, entonces el índice es igual a n en cualquier punto crítico no degenerado $(z_0^1, \ldots, z_0^n) = z_0$.

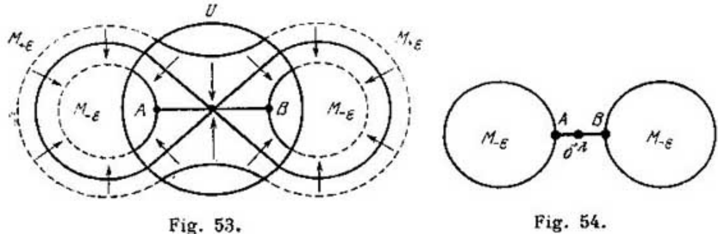


Fig. 53. Fig. 54.

PROBLEMA 2. Si f es una función armónica en $\mathbb{R}^n$, entonces el índice de un punto crítico no degenerado no puede ser igual a 0 o n (principio del máximo).

Pero no hay funciones armónicas y analíticas sobre una variedad compacta. Indiquemos una aplicación topológica del resultado del problema 1: sea M^{2n} una subvariedad compleja compacta en $\mathbb{C}P^N = \mathbb{C}^N \cup \mathbb{C}P_\infty^{N-1}$. Entonces la «parte finita» V de la variedad M^{2n} se halla en $\mathbb{C}^N$. La intersección $W = \mathbb{C}P^{N-1} \cap M^{2n}$ es «sección hiperplana». La parte real de una de coordenadas complejas en $\mathbb{C}^N$ da una función de Morse f en una parte finita V de la variedad M^{2n}. Todos los puntos críticos para f tienen un índice n. De aquí y del teorema es fácil deducir, que la variedad M^{2n} es homotópicamente equivalente a un complejo celular $[W \cup \sigma_1^n \cup \ldots \cup \sigma_k^n] \cup \sigma^{2n}$, donde k es el número de los puntos críticos de la función f en la parte finita $V \subset \mathbb{C}^n$. (Demostrarlo meticulosamente). De aquí se deducen las igualdades

$$\pi_i(W) = \pi_i(M^{2n}), \quad i < n-1,$$
$$H_i(W) = H_i(M^{2n}), \quad i < n-1 \quad \text{ó} \quad n < i < 2n.$$

La inmersión (el encaje $H_{n-1}(W) \to H_{n-1}(M^{2n})$ es un homomorfismo sobre (epimorfismo).

§ 16. Desigualdades de Morse

Hay una estrecha ligazón entre el número de los puntos estacionarios (críticos) de las funciones $f(x)$ sobre la variedad suave cerrada M^n y las invariantes topológicas de variedad, o sea, grupos de homologías, característica de Euler, etc.

En el § 15, p. II del libro [1] fue dado el teorema de que el número $\sum_{\lambda \geqslant 0} (-1)^{\lambda} \mu_{\lambda}(f)$ no depende de la función de Morse f sobre M^n y coincide con la característica de Euler. Aquí $\mu_{\lambda}(f)$ es el número de los puntos críticos del índice λ para f. Utilizando los resultados del § 15 obtenemos la siguiente afirmación:

TEOREMA 1. *Si $b_k(M^n)$ son rangos de los grupos de homologías de la variedad M^n (con cualquier campo de coeficientes), entonces tienen lugar las desigualdades (de Morse) para cualquier función (de Morse) f sobre M^n (o sea, la cual tiene sólo puntos críticos no degenerados):* $\mu_{\lambda}(f) \geqslant b_{\lambda}(M^n)$ para todo $\lambda = 0, 1, \ldots, n$.

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema 15.1 de este capítulo la función f engendra sobre la variedad M^n una estructura de espacio celular. Esto significa, que la variedad M^n es homotópicamente equivalente a un espacio celular K, que se obtiene mediante sucesivas pegaduras de las células $K_{i+1} = K_i \cup \sigma^{\lambda_i}$, al mismo tiempo el número sumario de las células de dada dimensión λ es igual precisamente al número $\mu_{\lambda}(f)$ de los puntos críticos f del índice λ. Como ya está demostrado en el § 4 (véase el teorema 4.1), semejante espacio celular es equivalente homotópicamente a un complejo celular $\widetilde{K}$ con el número de células $\mu_{\lambda}(f)$ de dimensión λ. De manera que $\widetilde{K}$ es equivalente homotópicamente a M^n y $H_q(\widetilde{K}) = H_q(M^n)$ para todo q y todos los coeficientes G. Ya que el rango del grupo de homologías $H_{\lambda}(\widetilde{K})$ siempre es no mayor que el número de células de dimensión λ, el teorema está demostrado.

Este teorema, sin embargo, no da un juego completo de relaciones entre los números $\mu_{\lambda}(f)$, que están identificados simplemente con los números de células del complejo $\widetilde{K} \sim M^n$, y los números de Betti $b_{\lambda}(M^n) = (\text{rango } H_{\lambda}(M^n))$. Conocemos una relación más (véase el § 2).

$$\sum_{\lambda \geqslant 0} (-1)^{\lambda} b_{\lambda} = \sum_{\lambda \geqslant 0} (-1)^{\lambda} \mu_{\lambda}(f). \tag{1}$$

El juego completo de estas relaciones es cómodo expresar algebraicamente así: formamos las funciones generadores $P(M^n, t) = \sum b_{\lambda} t^{\lambda}$ (polinomio de Poincaré de la variedad M^n) y $Q(M^n, f, t) = \sum \mu_{\lambda}(f) t^{\lambda}$ (polinomio de Poincaré de la función f definido de hecho para cual-

quier complejo celular $\widetilde{K}$, donde μ_λ es el número de células de dimensión λ). Entonces de (1) se deduce, haciendo $t = -1$, que la diferencia $Q - P$ se divide por $(1 + t)$. Resulta que la razón $(Q - P)/1 + t$ tiene coeficientes no negativos (enteros). La demostración será dada más abajo en un aspecto más general. Es cómodo también generalizar las desigualdades de Morse en una función con puntos críticos degenerados.

Sea $f(x)$ una función infinitamente diferenciable.

DEFINICIÓN 1. El punto $x_0 \in M$ se llama *punto topológicamente regular* para la función $f(x)$, si se tiene un entorno abierto $U = U(x_0)$ homeomorfo al producto directo de la superficie de nivel por un segmento $\{f^{-1}(a)\} \times I[-\varepsilon, \varepsilon]$ (donde $a = f(x_0)$), (véase

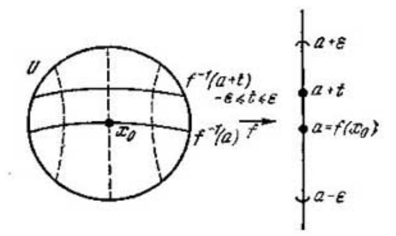


Fig. 55.

la fig. 55). Al mismo tiempo, es necesario, que este homeomorfismo realice un homeomorfismo de fibras, para que las superficies $(f^{-1}(a), t)$ coincidan con las superficies de nivel $f^{-1}(a + t)$ en el entorno U.

DEFINICIÓN 2. Al punto $x_0 \in M$ se le llamará *punto bifurcacional* (punto de bifurcación) para la función f, si x_0 no es un punto topológicamente no degenerado.

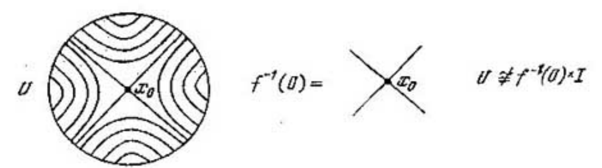


Fig. 56.

Consideremos ejemplos. Si $x_0 \in M$ es un punto crítico no degenerado de la función de Morse $f(x)$ sobre M, entonces, evidentemente, x_0 es un punto bifurcacional (véase la fig. 56).

Pero el punto crítico degenerado x_0 de la función suave f no siempre es un punto bifurcacional.

EJEMPLO. Consideremos $M = \mathbb{R}^1(x)$, $f(x) = x^3$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^1$. Entonces, x_0 es un punto crítico degenerado para f, pero, al mismo tiempo, x_0 es un punto topológicamente no degenerado (no bifurcacional) para f (véase la fig. 57).

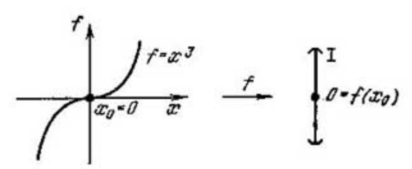


Fig. 57.

Sea M^n una variedad suave compacta cerrada y sea tolerable la función suave $f(x)$, es decir, que tiene un número finito de puntos bifurcacionales (por ejemplo, f es la función de Morse sobre M).

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_N$ $(N < \infty)$ valores críticos para la función f (o sea, $f^{-1}(c_\alpha)$ tiene por lo menos un punto bifurcacional). Como f tiene sólo un número finito de los puntos bifurcacionales, todos ellos son aislados. Sea $\{x\}_\alpha$ un conjunto de puntos bifurcacionales en nivel $\{f(x) = c_\alpha\}$. Consideremos $M_{c_\alpha} = \{f(x) \leqslant c_\alpha\}$. Los grupos relativos de homologías $H_k(M_{c_\alpha} = M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ son los importantísimos invariantes de puntos bifurcacionales de la función f. (Al grupo $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ es posible comprenderlo, a causa del aislamiento de los puntos $\{x\}_\alpha$, como el grupo $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus U\{x\}_\alpha)$, donde $U\{x\}_\alpha$ es un juego de entornos abiertos bastante pequeños de los puntos $\{x\}_\alpha$.

DEFINICIÓN 3. *Al polinomio de Poincaré de la función* $f: M \to \mathbb{R}^1$ *lo llamaremos polinomio* $Q(M, f, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k=0}^{n} b_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) t^k$, donde $b_k(X, Y) = \dim H_k(X, Y)$.

TEOREMA 2. *Sean* $P(M, t)$ *y* $Q(M, f, t)$ *los polinomios de Poincaré arriba introducidos. Entonces, la diferencia* $Q - P$ *se divide en* $1 + t$, *y la razón* $(Q - P)/1 + t$ *tiene coeficientes enteros no negativos.*

LEMA 1. *Sean* $a < b$ *dos números del dominio de los valores de la función* $f: M \to \mathbb{R}^1$ *tales, que en el segmento* $[a, b]$ *no hay valores críticos de* f. *Entonces,* M_a *se contrae a* M_b, *y* $H_*(M_a, M_b) = 0$.

La demostración del lema fue dada en el § 15 para las funciones de Morse. La demostración general la omitimos.

LEMA 2. *Tiene lugar la igualdad*

$$b_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha}\setminus\{x\}_\alpha) = b_k(M_{c_\alpha+\varepsilon}, M_{c_\alpha-\varepsilon})$$

para algún $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeño.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que son isomorfos los mismos grupos $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha}\setminus\{x\}_\alpha)$ y $H_k(M_{c_\alpha+\varepsilon}, M_{c_\alpha-\varepsilon})$. Esta última afirmación se deduce de la definición de grupo $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha}\setminus\{x\}_\alpha)$ y del lema precedente. Consideremos ahora tres polinomios del tipo de Poincaré de forma especial: $P(M_a) = \sum_{(k)} b_k(M_a)t^k$; $P(M_b, M_a) = \sum_{(k)} b_k(M_b, M_a)t^k$, donde $a < b$ (o sea, $M_b \supset M_a$); $P(\operatorname{Im}\partial) = \sum_{(k)} \dim(\operatorname{Im}\partial_{k+1})t^k$, donde el operador $\partial_{k+1}\colon H_{k+1}(M_b, M_a) \to H_k(M_a)$ es un operador de frontera en la sucesión exacta del par (M_b, M_a) (véase el § 5).

LEMA 3. *Tiene lugar la igualdad*

$$P(M_b, M_a) - \{P(M_b) - P(M_a) = (1+t)P(\operatorname{Im}\partial).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la sucesión exacta homológica del par (M_b, M_a):

$$H_{k+1}(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(M_a) \xrightarrow{i} H_k(M_b) \xrightarrow{j}$$
$$\xrightarrow{j} H_k(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(M_a).$$

De la exactitud de la sucesión se deduce el siguiente sistema de relaciones;

$$b_k(M_b, M_a) = \dim(\operatorname{Im}(j)) + \dim(\operatorname{Im}(\partial_k));$$
$$\dim(\operatorname{Im}(j)) = b_k(M_b) - \dim \operatorname{I}(i)) =$$
$$= b_k(M_b) - \{b_k(M_a) - \dim(\operatorname{Im}(\partial_{k+1}))\} =$$
$$= \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\} + \dim(\operatorname{Im}(\partial_{k+1}));$$
$$b_k(M_b, M_a) - \dim(\operatorname{Im}(j)) = b_k(M_b, M_a) - \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\} -$$
$$- \dim(\operatorname{Im}(\partial_{k+1})) = R_k - \dim(\operatorname{Im}(\partial_{k+1})) - \dim(\operatorname{Im}(\partial_k)).$$

donde $R_k = b_k(M_b, M_a) - \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\}$.

Así: $R_k = \dim(\operatorname{Im}(\partial_{k+1})) + \dim(\operatorname{Im}(\partial_k))$,

$$t^k R_k = t^k \dim(\operatorname{Im}(\partial_{k+1})) + t(t^{k-1}\dim(\operatorname{Im}(\partial_k))),$$

o sea, $\sum_{(k)} t^k R_k = (1+t)P(\operatorname{Im}\partial)$, lo que demuestra el lema.

Ahora pasemos directamente a la demostración del teorema. Consideremos todos los valores críticos $c_1, c_2, \ldots, c_N$ $(N < \infty)$ para

la función $f(x)$ (o sea tales, que en $f^{-1}(c_i)$ hay por lo menos un solo punto de bifurcación de la función f). Luego consideremos los números $a_0, a_1, \ldots, a_N, a_{n+1}$ tales, que $a_0 < c_1$, $a_i < c_{i+1} < a_{i+1}$; $c_N < a_{N+1}$ (o sea, los valores no críticos $\{a_i\}$ dividen a los valores críticos $\{c_i\}$; véase la fig. 58).

Fig. 58.

De los lemas precedentes obtenemos:

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) - \{P(M_{a_{i+1}}) - P(M_{a_i}) = (1+t)\,P(\operatorname{Im}\partial)_i.$$

Sumando estas igualdades según i, desde 0 hasta $N+1$, obtenemos, evidentemente:

$$Q(M, t) - P(M_{a_{N+1}}) - P(M_{a_0}) = (1+t)\,K(t),$$

donde el polinomio $K(t)$ tiene los coeficientes no negativos. Con esto, hemos aprovechado el hecho de que

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) = P(M_{c_i}, M_{c_i} \setminus \{x\}_i)$$

(esto se deduce de los lemas precedentes). Ahora notemos, que $P(M_{a_{N+1}}) \equiv P(M)$, ya que a_{N+1} es posible considerarlo tan grande, que $a_{N+1} > \max\limits_{x \in M} f(x)$, y por eso $M_{a_{N+1}} = M$; luego: $P(M_{a_0}) = 0$, puesto que a a_0 es posible considerarlo escogido de tal modo, que $a_0 < \min\limits_{x \in M} f(x)$, o sea, $M_{a_0} = \varnothing$, y en la definición del polinomio de Poincaré la sumación por k comienza desde $k = 0$. Así, definitivamente, $Q(M, f) - P(M) = (1+t)\,K(t)$, lo que demuestra el teorema.

Ahora consideremos los corolarios de este teorema. Sea tomado en calidad del grupo de coeficientes G un grupo $\mathbb{R}$ de números reales. Entonces, los números $b_k = \operatorname{rang}(H_k)$ se llaman números de Betti del espacio M. Sea f una función suave tolerable sobre la variedad M; escribimos el polinomio de Poincaré para $f(x)$ en forma $Q(M, f) = \sum\limits_{k \geqslant 0} \mu_k t^k$, y el polinomio de Poincaré para M en forma $P(M) = \sum\limits_{k \geqslant 0} b_k t^k$. Los números μ_k los denominamos «números de Morse» de la función suave f; (una interpretación particularmente clara de estos números surge en el caso, cuando f es una función de Morse sobre M). Entonces, en virtud del teorema arriba demostrado obtenemos:

$$Q(M, f) - P(M) = \sum_{(k)} (\mu_k - b_k)\,t^k = (1+t)\,K(t).$$

De aquí obtenemos que el polinomio $\sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k$ tiene los coeficientes no negativos, o sea, $\mu_k \geqslant b_k$. De manera que los números de Betti b_k de la variedad M estiman por abajo los números de Morse μ_k. Luego, $\sum_{(k)} \mu_k t^k = \sum_{(k)} b_k t^k + (1+t) K(t)$; para $t = -1$, obtenemos $\sum_{(k)} (-1)^k \mu_k = \sum_{(k)} (-1)^k b_k$, donde en el segundo miembro se encuentra la característica de Euler de la variedad M (suma de alternación de los números de Betti: $\chi(M) = \sum_{(k)} (-1)^k b_k$). De manera que la suma de alternación de los números de Morse para la función arbitraria tolerada f sobre M resulta un invariante homotópico de la variedad M (en particular, ella es la misma para la función arbitraria suave f).

Luego desarrollemos en serie $(1+t)^{-1}$ respecto a t:

$$(1+t)^{-1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha t^\alpha;$$

entonces

$$\Big(\sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k\Big) \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha t^\alpha > 0,$$

es decir, la serie del primer miembro tiene por sus coeficientes (después de la reducción de términos semejantes) los números no negativos. De aquí, fijando cierto λ, obtenemos el sistema de las siguientes desigualdades:

$$(\mu_0 - b_0)(-1)^\lambda + (\mu_1 - b_1)(-1)^{\lambda-1} + \\ + (\mu_2 - b_2)(-1)^{\lambda-2} + \ldots + (\mu_\lambda - b_\lambda) \geqslant 0,$$

es decir,

$$\mu_\lambda - \mu_{\lambda-1} + \mu_{\lambda-2} - \ldots \pm \mu_0 \geqslant b_\lambda - b_{\lambda-1} + b_{\lambda-2} - \ldots \pm b_0.$$

Sea ahora $f(x)$ la función de Morse sobre una variedad compacta M. En este caso los números $\{\mu_k\}$ adquieren un sentido particularmente geométrico. Sea x_0 un punto crítico no degenerado (y, por consiguiente, bifurcacional) para la función $f(x)$ (sea (índice x_0) $= \lambda$). Hallamos las dimensiones de los grupos $H_*(M_c, M_c \setminus (x_0)) = H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$, donde $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño, $c = f(x_0)$ es un valor crítico; además, sea x_0 un punto crítico único en un nivel crítico $f^{-1}(c)$.

Puesto que se cumple la identidad $H_*(X, Y) \cong H_*(X/Y, *)$ para un par de complejos celulares (X, Y) (donde Y es un subcomplejo del complejo X), entonces $H_*(M_{c+\varepsilon} M_{c-\varepsilon}) \cong H_*(M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon}, *)$. En virtud de la equivalencia homotópica anteriormente estudiada

$M_{c+\varepsilon} \sim M_{c-\varepsilon} \cup \sigma^\lambda$ (donde σ^λ es un célula de dimensión λ), tenemos, que $H_*(M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon}, *) \cong H_*(\bar{\sigma}^\lambda/\partial\sigma^\lambda, *) \cong H_*(S^\lambda, *)$, donde $\sigma^\lambda/\partial\sigma^\lambda = S^\lambda$ es una esfera de dimensión λ. Así,

$$H_k(M_c, M_c) \setminus (x_0)) \cong H_k(S^\lambda, *) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k=\lambda, \\ 0, & \text{si } k \neq \lambda. \end{cases}$$

Consideremos algunos ejemplos instructivos, cuando x_0 es un punto crítico degenerado para $f(x)$. Sea, por ejemplo, $f(x, y) = \mathrm{Re}(z^n)$, donde $z = x + iy$. En la fig. 59 se muestra la conducta de los niveles de f. De manera que $M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon} \cong S^1 \vee S^1$.

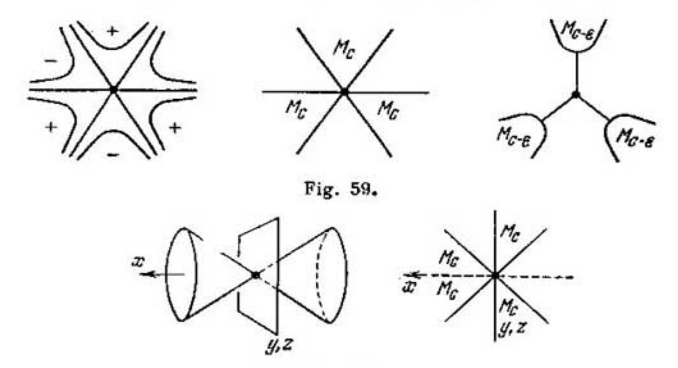


Fig. 59.

Fig. 60.

Como hemos demostrado anteriormente, mediante perturbaciones pequeñas de la función f, es posible transformar los puntos críticos degenerados en una reunión de puntos críticos no degenerados. En el ejemplo examinado, el punto 0 para $\mathrm{Re}(z^n)$ se desintegra en la reunión $(n - 1)$ de las singularidades no degeneradas (véanse los detalles más arriba). Esta observación es el reflejo de una afirmación general: el polinomio $Q(M, f)$ no se cambia con una perturbación bastante pequeña de la función f. En efecto, $Q(M, f)$ está expresado por los términos de los grupos de homologías relativas $H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$ que, evidentemente, no cambian ante perturbaciones suficientemente de la función f. De manera que el polinomio $Q(M, f)$ nos comunica, que cantidad de puntos críticos no degenerados de cada índice λ surge con la desintegración de las singularidades degeneradas de la función f (para una perturbación suficientemente pequeña de la misma).

Para finalizar, consideremos un ejemplo más de la singularidad degenerada de f. Sea $f(x, y, z) = x^3 - 3x(y^2 + z^2)$.

Dejamos al lector la comprobación, utilizando la fig. 60, que para el caso $M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon} \sim S^1 \vee S^2$, y calcular las homologías $H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$.

§ 17. Función regular de Morse-Smale. Asas. Superficies

Es posible demostrar que en cualquier variedad cerrada conexa suave compacta, siempre existe una función de Morse que tiene un solo mínimo y un solo máximo.

Por ejemplo, para las variedades orientables bidimensionales M_g^2 es posible hallar tal función entre las funciones de la altura para las inmersiones «buenas» de la superficie en $\mathbb{R}^3$ (véase la fig. 61).

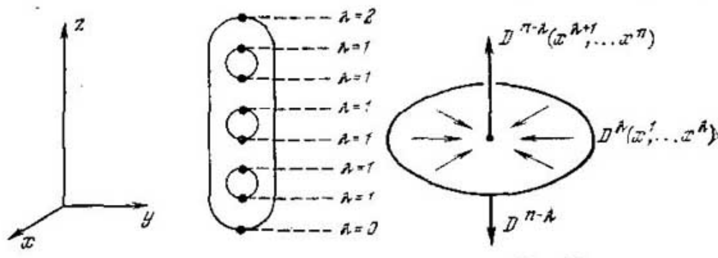


Fig. 61. Fig. 62.

Se puede mostrar, que en una variedad siempre hay funciones de Morse con los valores críticos ordenados respecto a los índices, o sea, $f(x_\lambda) = f(x_\mu)$, donde $\lambda = \mu$ y $f(x_\lambda) > f(x_\mu)$, donde $\lambda > \mu$, λ, μ son índices de los puntos x_λ y x_μ respectivamente. A estas funciones se las denominan a veces «regulares» (o funciones de Smale). A diferencia de las funciones generales de Morse, estas funciones de Morse ya no serán densas por doquier en el espacio de todas las funciones suaves sobre M.

TEOREMA 1. *En cualquier variedad cerrada suave compacta siempre hay una función regular, que tiene exactamente un punto de máximo (punto del índice* $\lambda = n = \dim M$*) y exactamente un punto de mínimo (punto del índice* 0*).*

Si ahora, de acuerdo con el teorema del § 15, se reconstruye por la función regular de Morse la partición celular de M^n, entonces en cada paso se pegarán células de dimensión mayor que la dimensión de las células precedentes.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Introducimos una noción útil complementaria: campo semejante a gradiental para la función suave

$f(x)$ sobre M^n. Designamos por $\xi(f)$ la derivada de la función f a lo largo del campo ξ.

DEFINICIÓN 1. Un campo vectorial suave ξ sobre M se llama *semejante a gradiental*, si: 1) $\xi(f) \neq 0$ sobre un conjunto $M \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}$, donde $\{x_i\}$ son puntos críticos para la función de Morse f; 2) para cualquier punto x_i hay un entorno abierto $U(x_i)$ tal, que en cualquier sistema de coordenadas, en el cual

$$f(x)\,|_{U(x_i)} = f(x_i) - \sum_{h=1}^{\lambda} (x^h)^2 + \sum_{h=\lambda+1}^{n} (x^h)^2,$$

el campo ξ es de forma

$$\xi(x) = (-x^1, \ldots, -x^\lambda;\ x^{\lambda+1}, \ldots, x^n).$$

Es evidente, que para cualquier función de Morse f sobre M hay tales campos ξ (por ejemplo, $\xi = \operatorname{grad} f$ respecto a alguna métrica de Riemann sobre M).

Sean $x_i \in M$ un punto crítico para f, (índice x_i) $= \lambda$ y ξ un campo semejante a gradiental para f. Consideremos así llamado diagrama de separatriz del punto x_i, o sea, el total de todas las trayectorias integrales del campo ξ, entrantes o salientes del punto x_i. Entonces, en el entorno $U(x_i)$ este diagrama tiene la forma representada en a fig. 62.

Las trayectorias entrantes llenan el disco $D^\lambda(x^1, \ldots, x^\lambda)$; las salientes, el disco $D^{n-\lambda}(x^{\lambda+1}, \ldots, x^n)$.

Consideremos dos esferas: $S^{\lambda-1} = D^\lambda \cap \{f(x) = f(x_i) - \varepsilon\}$; $S^{n-\lambda-1} = D^{n-\lambda} \cap \{f(x) = f(x_i) + \varepsilon\}$ para un ε suficientemente pequeño. Se puede considerar, que $S^{\lambda-1} = \partial D$, $S^{n-\lambda-1} = \partial D^{n-\lambda-1}$ en el entorno $U(x_i)$; véase la fig. 63.

Consideremos una «dilatación» de los discos $D^\lambda(x_i)$ y $D^{n-\lambda}(x_i)$ a lo largo de las trayectorias integrales del campo ξ; entonces las esferas $S^{\lambda-1}(x_i)$ y $S^{n-\lambda-1}(x_i)$ también se deformarán suavemente de algún modo, moviéndose a lo largo de las trayectorias sin autosecarse hasta que encuentren algún otro punto crítico x_j. (Claro que las trayectorias del campo ξ pueden intersecarse sólo en los puntos críticos de la función f.)

LEMA 1. *Sea que en la fibra $M_{b'} \setminus M_{a'} = f^{-1}[a', b']$ hay sólo dos puntos críticos x_0 e y_0 de la función f, con esto $a' < a = f(x_0) < f(y_0) = b < b'$; sea ξ un campo semejante a gradiental para f. Supongamos que en la fibra $f^{-1}[a', b']$ se cumple la relación $D^{n-\lambda}(x_0) \cap D^{\lambda'}(y_0) = \varnothing$ (aquí $\lambda = \operatorname{ind}(x_0)$; $\lambda' = \operatorname{ind}(y_0)$). Entonces en la variedad M^n hay una nueva función de Morse g tal, que $f = g$ fuera de $f^{-1}[a', b']$, además g tiene sobre M los mismos puntos críticos que*

la función f; el campo ξ es semejante a gradiental también para la función g; $g(x_0) > g(y_0)$; $g = f +$ const *en los entornos $U(x_0)$, $U(y_0)$.* ◢

DEMOSTRACIÓN. De las condiciones del lema se deduce que en la fibra $f^{-1}[a', b']$ no se intersecan los diagramas de separatriz de los

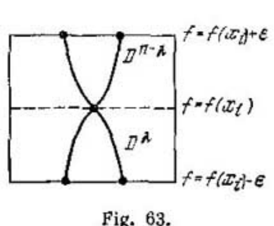


Fig. 63.

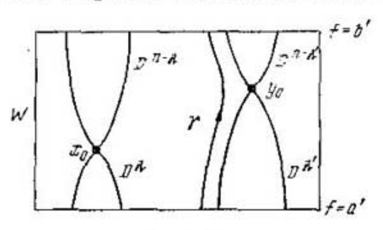


Fig 64.

puntos x_0 e y_0 (véase la fig 64), o sea, $(D^{n-\lambda}(x_0) \cup D^{\lambda}(x_0)) \cap \cap (D^{n-\lambda}(y_0) \cup D^{\lambda'}(y_0)) = \varnothing$ Designemos: $W = f^{-1}[a', b']$;

$$A = D^{n-\lambda}(x_0) \cup D^{\lambda}(x_0); \qquad B = D^{n-\lambda'}(y_0) \cup D^{\lambda}(y_0)\cdot$$

Entonces, es evidente

$$W \setminus (A \cup B) \cong (f^{-1}(b') \setminus ((A \cup B) \cap f^{-1}(b'))) I[a', b'] \cong$$
$$\cong f^{-1}(a') \setminus ((A \cup B) \cap f^{-1}(a'))) I[a', b']$$

La misma relación puede ser escrita así: el complemento $W \setminus (A \cup B)$ es difeomorfo al producto directo

$$(f^{-1}(b) \setminus (S^{n-\lambda'}(y_0) \cup S^{n-\lambda-1}(x_0))) I[a', b'] \cong$$
$$\cong (f^{-1}(a') \setminus (S^{\lambda'-1}(y_0) \cup S^{\lambda-1}(x_0))) I[a', b'],$$

donde $I[a', b']$ es un segmento. (Para simplificar, consideramos que $a' = 0$; $b' = 1$.) En particular, el difeomorfismo entre la variedad $f^{-1}(b') \setminus (S^{n-\lambda'}(y_0) \cup S^{n-\lambda-1}(x_0))$ y la variedad $f^{-1}(a') \setminus (S^{\lambda'-1}(y_0) \cup \cup S^{\lambda-1}(x_0))$ se realiza a lo largo de las trayectorias integrales γ del campo ξ. Consideremos sobre $f^{-1}(a')$ una función suave $\alpha(x)$ tal, que $\alpha(x) = 0$ en un entorno suficientemente pequeño $A \cap f^{-1}(a')$ y $\alpha(x) = 1$ en un entorno bastante pequeño $B \cap f^{-1}(a')$. Es posible hacerlo, ya que $A \cap B = \varnothing$. Por la función α dada sobre $f^{-1}(a')$, vamos a construir una función suave $\alpha(x)$ en todo W, prolongando α con valores constantes a lo largo de las trayectorias integrales del campo ξ (estas trayectorias no se intersecan fuera de $A \cup B$). La función obtenida $\alpha(x)$ sobre W es constante a lo largo de cualquier

trayectoria γ, que no se incluye en un entorno abierto de $A \cup B$, $\alpha = 0$ en $U(A)$ y $\alpha = 1$ en $U(B)$.

Consideremos la función suave $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}$, dada por el gráfico de la fig. 65.

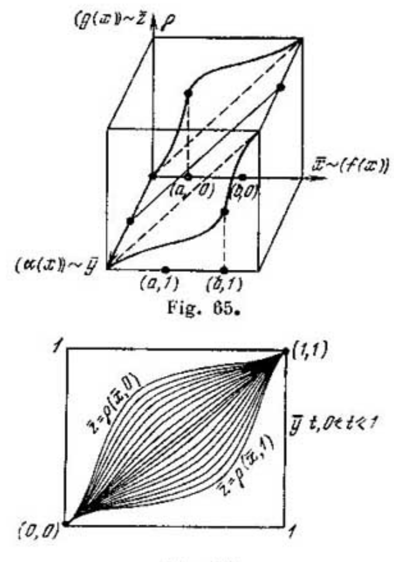


Fig. 65.

Fig. 66.

En la fig. 66 se muestra la evolución de las líneas de intersección del gráfico $\bar{z} = \rho(\bar{x}, \bar{y})$ con el plano $\bar{y} = t$ (const) con el cambio de t desde 0 hasta 1.

Escribamos de la siguiente manera las condiciones formales puestas en la función ρ:

1) $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho(\bar{x}, \bar{y})) > 0$ para todo $(\bar{x}, \bar{y})$ y $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ crece de 0 a 1, cuando $\bar{x}$ crece de 0 a 1;

2) $\rho(a, 0) = b$; $\rho(b, 1) = a$;

3) $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho(\bar{x}, 0)) \equiv 1$ para todos $\bar{x}$ en un entorno de a; $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho(\bar{x}, 1) \equiv 1$ para todo $\bar{x}$ en un entorno de b (véase la fig. 67).

Definamos, ahora, la función buscada $g(x) = \rho(f(x), \alpha(x))$, $x \in W$. Entonces $g(x_0) = \rho(f(x_0), \alpha(x_0)) = \rho(a, 0) > \rho(b, 1) = \rho(f(y_0), \alpha(y_0)) = g(y_0)$. Así, $g(x_0) > g(y_0)$. De las condiciones 1) — 3) en la función ρ, se deduce que la función $g(x)$ satisface todas las exigencias formuladas en la condición del lema. El lema queda demostrado.

LEMA 2. *Consideremos $W = f^{-1}[a', b']$. Sean $x_0, y_0 \in W$; $f(x_0) < f(y_0)$ y $\lambda(x_0)$ = (índice de f en el punto x_0) $\geqslant \lambda(y_0)$ = (índice de f en el punto y_0). Entonces, sobre M hay una función g de Morse tal, que $g(x_0) > g(y_0)$; g tiene los mismos puntos críticos que f; la función $g(x)$ satisface todas las restantes condiciones del lema precedente.*

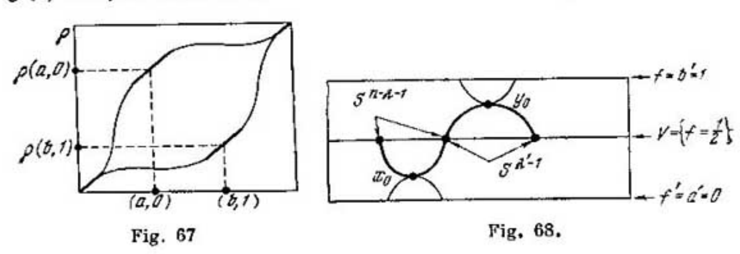


Fig. 67

Fig. 68.

DEMOSTRACION. En el caso cuando $A \cap B = \varnothing$, el lema ya está demostrado (véase el lema precedente). En caso general, $A \cap B \neq \varnothing$. Reduzcamos este caso a la situación: $A \cap B = \varnothing$. Examinemos la superficie $\{f(x) = 1/2\} = V$ (consideramos $a' = 0$; $b^1 = 1$; $0 < f(x_0) < \frac{1}{2} < f(y_0) < 1$). Hacemos $\lambda = \lambda(x_0)$, $\lambda' = \lambda(y_0)$. Sea $A \cap B \neq \varnothing$. Esto significa, que $S^{n-\lambda-1}(x_0) \cap S^{\lambda'-1}(y_0) \neq \varnothing$ en la superficie V, véase la fig. 68. (En realidad, si esta intersección es vacía, entonces $A \cap B = \varnothing$.) Puesto que ($1/2 \in [a', b']$ no es valor crítico, entonces V^{n-1} es una variedad suave $(n-1)$-dimensional, y las esferas $S^{n-\lambda-1}(x_0)$ y $S^{\lambda'-1}(y_0)$ son subvariedades suaves en V.

Por cuanto $\dim S^{n-\lambda-1}(x_0) + \dim S^{\lambda'-1}(y_0) = n - \lambda - 1 + \lambda' - 1 = n - \underbrace{(\lambda - \lambda')}_{\geqslant 0} - 2 < n - 1$, entonces se deduce del teorema general sobre la t-regularidad (véase [1], p. II, § 10), que existe una isotopía de encaje (de inmersión) $i\colon S^{\lambda'-1} \to V$, tan pequeña como se quiera en la inmersión próxima, la cual ya tendrá una intersección vacía con la esfera $S^{n-\lambda-1}(x_0)$. Está claro, que es posible prolongar esta isotopía en un entorno pequeño de la superficie V, haciéndola (a la isotopía) idéntica fuera de este entorno. Sometiendo el

campo semejante a gradiental ξ a la isotopía buscada, obtendremos ya dos diagramas A y B de separatriz no intersecados (véase la fig. 69).

Hemos reducido la situación al caso $A \cap B = \varnothing$. El lema queda demostrado.

De este modo queda demostrada por completo la afirmación del teorema sobre la existencia de una función regular de Morse.

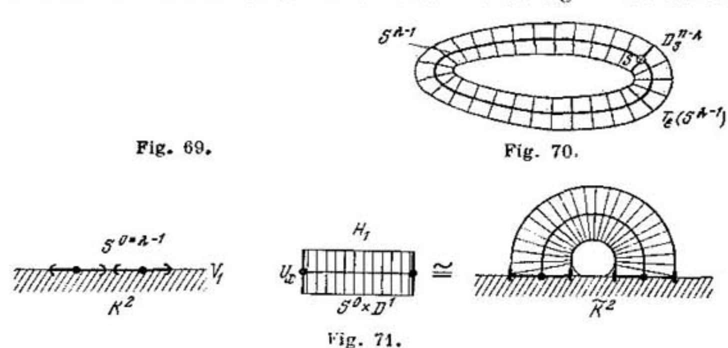


Fig. 69. Fig. 70.

Fig. 71.

La segunda parte de la afirmación del teorema (sobre la existencia de una función regular de Morse con un máximo y un mínimo) la dejamos al lector como un ejercicio útil (y bastante simple, particularmente, para las variedades bidimensionales).

Ahora consideremos con mayores detalles el procesamiento de pegar una célula σ^λ a la frontera de la variedad $M_{-\varepsilon}$ (véase más arriba). Aclaremos qué sucede con la variedad $M_{-\varepsilon}$ después del «levantamiento más allá del punto crítico x_λ» desde el punto de vista diferencial, es decir, cómo cambia la variedad M_- desde el punto de vista de la llamada operación de la pegadura de asas.

Consideramos el producto directo $H_\lambda^n = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, donde D^q es un disco de dimensión q. La variedad (con borde) H_λ^n se llama el asa de índice λ. Claro que la frontera ∂H_λ^n es de forma $\partial H_\lambda^n = (\partial D^\lambda) \times D^{n-\lambda} \cup D^\lambda \times (\partial D^{n-\lambda}) = (S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) \cup (D^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$. Definamos la operación de la pegadura del asa H_λ^n a una variedad K^n con un borde $V^{n-1} = \partial K^n$. Sea $S^{\lambda-1} \subset V^{n-1}$ una esfera suavemente sumergida tal, que en un entorno tubular bastante pequeño $T_\varepsilon(S^{\lambda-1})$ (de radio $\varepsilon > 0$) se representa en forma del producto directo $T_\varepsilon(S^{\lambda-1}) \underset{\text{dif}}{\cong} S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, donde $\{s \times D^{n-\lambda}\}$, $s \in S^{\lambda-1}$ son

discos ortogonales (normales), de radio ε, a la esfera $S^{\lambda-1}$ (véase la fig. 70).

Entonces se puede construir una nueva variedad suave $\widetilde{K}^n$ con el borde $\widetilde{V}^{n-1} = \partial\widetilde{K}^n$, considerando la pegadura de K^n con H_λ^n por la aplicación $\chi : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to T_\varepsilon(S^{\lambda-1}) \underset{\text{dif}}{\cong} S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, la cual es un difeomorfismo de $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ (que es una parte de la frontera ∂H_λ^n) en el entorno tubular $T_\varepsilon(S^{\lambda-1})$. La operación de la pegadura del asa H_1^2 con $n = 2$ se muestra en la fig. 71.

Suavizando los "ángulos" surgidos en los puntos $x \in \partial T_\varepsilon(S^{\lambda-1}) = S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$, obtenemos una variedad suave $\widetilde{K}^n$ con un borde suave $\widetilde{V}^{n-1}$. (Esta suavización es mostrada con punteado en la fig. 72.)

En la fig. 72 se indica la operación de pegadura del asa H_1^3 a K^3.

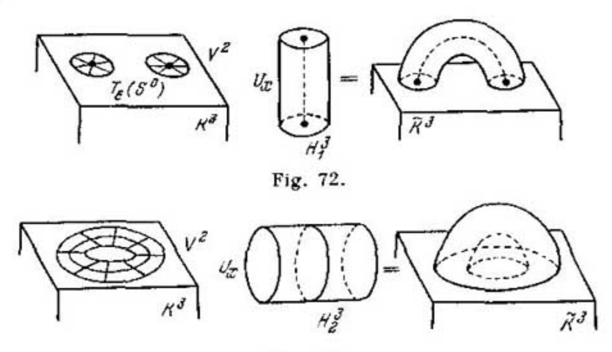


Fig. 72.

Fig. 73.

En la fig. 73 se muestra la operación de pegadura del asa H_2^3 a K^3.

TEOREMA 2. *Cualquier variedad suave compacta conexa cerrada M^n es difeomorfa a una reunión de asas $\{H_\lambda^n\}$, donde P_λ son puntos críticos de alguna función de Morse sobre M^n; λ es índice de P_λ y a cada punto P_λ le corresponde un asa H_λ^n.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que M_a es difeomorfa a M_b con $a < b$, si en el segmento $[a, b]$ no hay valores críticos de la función $f(x)$, resulta suficiente con examinar el cambio de $M_{-\varepsilon}$ al pasar por el punto crítico P_λ. Consideremos una deformación suave $M_\varepsilon \to M_{-\varepsilon}$ (véase el lema 15.3), pero ahora la cambiemos del modo mostrado en la fig. 74.

El resultado de la deformación se indica en la fig. 75.

Está claro, que el «eje» del asa H_λ^n es un disco D^λ $(x^1, \ldots, x^\lambda)$ compuesto de las trayectorias integrales del campo $v(x) = -\mathrm{grad}\, f(x)$ salientes de un punto singular del campo $v(x)$. El teorema queda demostrado.

Si, por el contrario, se da la descomposición de la variedad M en la suma de asas $\{H_\lambda^n\}$, entonces es posible reconstruir una función

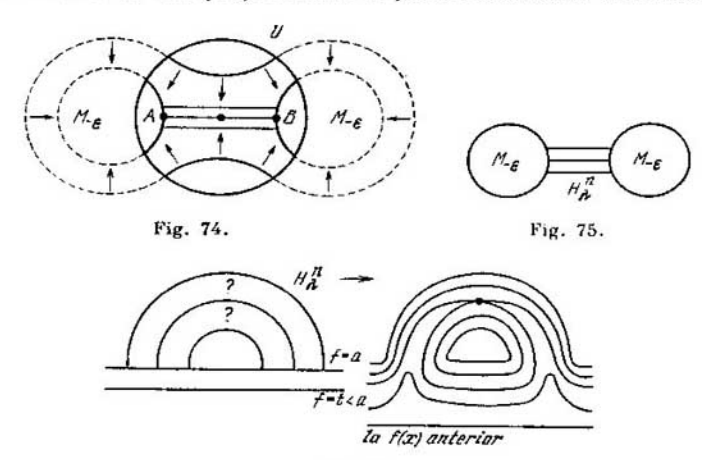


Fig. 74.

Fig. 75.

Fig. 76.

de Morse $f(x)$ sobre M^n tal, que la descomposición de M en suma de asas, asociada con ella, coincide con la partición inicial de M en una reunión de asas $\{H_\lambda^n\}$. La demostración se hace por inducción según el número de asas y sus índices. Las asas $\{H_0^n\}$ se pueden identificar con los discos D^n, cuyos centros se pueden declarar puntos críticos de índice 0, construimos la función $f(x)$, presentando sus superficies suaves de nivel f_c (la función $f(x)$ será definida no unívocamente). Entonces, en calidad de superficies $\{f_c\}$ en los discos $\{D^n\} = \{H_0^n\}$ tomamos las esferas concéntricas con centro en los mínimos locales de la función $f(x)$. Sea $f(x)$ ya construida en una variedad suave $\{f \leqslant a\}$ con un borde $V^{n-1} = \{f = a\}$ y sea que el asa H_λ^n está pegada al borde V^{n-1}. Se requiere prolongar $f(x)$ en el asa H_λ^n. La prolongación se muestra en la fig. 76.

La función obtenida $g(x)$ de nuevo resultó constante en el borde de la variedad $\{f \leqslant a\} \cup H_\lambda^n$, por eso es posible prolongar el procesamiento.

Consideremos las variedades bidimensionales $\{M^2\}$ y sus descomposiciones en sumas de asas $\{H^2_\lambda\}$, en concordancia con los teoremas arriba demostrados. Al mismo tiempo demostremos una vez más el teorema de clasificación de las superficies bidimensionales (véase el § 3).

Examinemos sobre M^2 una función regular de Morse $f(x)$; sean: x_0, un punto de mínimo (el único punto de índice 0); $x_1, \ldots, x_N$, los puntos de índice 1; x_{N+1}, el punto de máximo (el único punto de índice 2), además, $f(x_i) < f(x_{i+1})$, $0 \leqslant i \leqslant N$. Supongamos, que $0 \leqslant f(x) \leqslant N+1$ y $f(x_i) = i$. Entonces, un conjunto $0 \leqslant f \leqslant \leqslant \varepsilon < 1$ es un asa H^2_0 (homotópicamente equivalente a un punto σ^0, que es célula de dimensión nula). Al pasar por el valor crítico $f(x_1) = 1$, surge la pegadura del asa H^2_1 (véase la fig. 77).

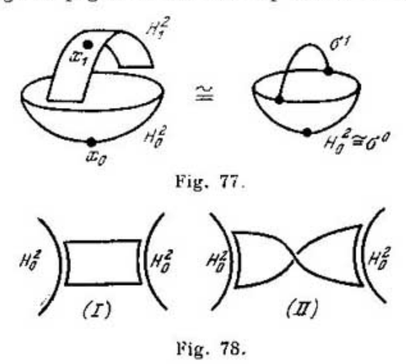


Fig. 77.

Fig. 78.

Cuando $n = 2$, hay sólo dos métodos de pegar el asa H^2_1 a H^2_0 (véase la fig. 78).

Ambos métodos son homotópicamente equivalentes pero distintos, si se consideran los difeomorfismos de las variedades con borde obtenidas: $H^2_0 \cup_I H^2_1 \underset{\text{dif}}{\cong} S^1 \times D^1$ (cilindro); $H^2_0 \cup_{II} H^2_1$ (cinta de Moebius). En el primer caso, se obtiene una superficie orientable (con borde), en el segundo, no orientable.

Prosiguiendo el procesamiento y pasando a los puntos $x_2, x_3, \ldots, x_N$, pegamos en cada paso una célula unidimensional σ^1_i, $1 \leqslant \leqslant i \leqslant N$; y en los términos de asas: o bien pegamos $S^1 \times D^1$, o bien pegamos la cinta de Moebius. Al pasar por un punto x_N $(f(x_N) = N)$, desde el punto de vista homotópica, obtenemos un ramo de circunferencias: $\bigvee\limits_{i=1}^{N} S^1_i$; cada circunferencia $S^1_i = \sigma^1_i \cup_{\sigma^0}$ corresponde a un punto crítico x_i (de índice 1). El último paso consiste en pegar el

asa $H_2^2 \cong D^2$, o sea, de una célula bidimensional σ^2, homeomorfa al disco D^2. De manera que M^2 es homotópicamente equivalente a un complejo celular $\sigma^0 \cup \sigma_1^1 \cup \ldots \cup \sigma_N^1 \cup \sigma^2$, y difeomorfa a: $H_0^2 \cup \underbrace{\cup H_1^2 \cup \ldots \cup H_1^2}_{N} \cup H_2^2$. La pegadura de la célula (asa) $D^2 = H_2^2$ a la obtenida en el $(N + 1)$-ésimo paso de la variedad K^2 con borde $S^1 = \partial K^2$, puede ser realizada ya de una sola manera: por una aplicación idéntica 1_{S^1}: $\partial D^2 \to \partial K^2$.

La célula $\sigma^2 \cong D^2$ puede ser identificada con un polígono fundamental W, obtenido por nosotros anteriormente en la demostración del teorema de clasificación de $\{M^2\}$, y el ramo $\bigvee_{i=1}^{N} S_i^1$ se lo puede identificar con una frontera del polígono W, en la cual todos los vértices ya están identificados en un vértice.

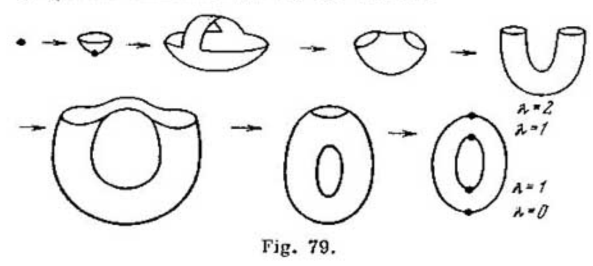


Fig. 79.

En la fig. 79 se muestra el procesamiento sucesivo para reconstruir el toro $T^2 = M_{g=1}^2$ para una inmersión (encaje) estándar en $\mathbb{R}^3$ tal, que $f(P) = z$ (función de altura) es una función de Morse con 4 puntos críticos: x_0 (mín); x_1, x_2 ensilladuras de índice 1); x_3 (máx). Para $g > 1$ la función de altura análoga en M_g^2 tiene $2g + 2$ puntos críticos no degenerados: x_0 (mín); $x_1, \ldots, x_{2g}$ (ensilladuras); x_{2g+1} (máx).

En cualquier M_g^2 es posible construir una función de altura suave $f(x)$ en $\mathbb{R}^3$ con 4 puntos críticos (mín. máx y dos ensilladuras). Estas ensilladuras serán degeneradas cuando $g > 1$. La inmersión buscada $M_g^2 \to \mathbb{R}^3$ se muestra en la fig. 80.

Las ensilladuras x_1, x_2 son degeneradas para $g > 1$, y la función de altura en un entorno de los puntos x_1, x_2 es de la misma estructura, que la función $\operatorname{Re}(x + iy)^{1+g}$ (véase la fig. 80). Luego, en cualquier M^2 ($M_{g>0}^2$ o M_μ^2) hay una función suave $f(x)$ con tres puntos críticos: mín, máx ensilladura (degenerada). (Demostrar, que esta función para $M_{g>0}^2$ no puede ser realizada como función de altura con alguna inmersión $M_g^2 \to \mathbb{R}^3$.) En efecto, consideremos una forma canónica

simétrica M_g^2 (o M_μ^2): $W = a_1 \ldots a_N a_1^{-1} \ldots a_{N-1} a_N^{\pm 1}$ (véase el § 3 sobre la existencia de tal forma). La función buscada $f(x)$ está dada en la fig. 81 por sus líneas de nivel (no unívocamente): a la izquierda

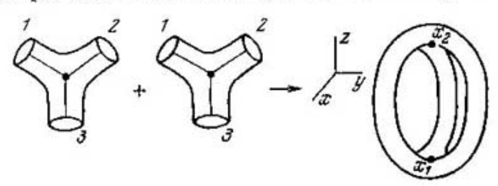


Fig. 80.

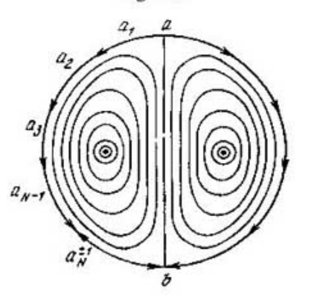


Fig. 81.

de ab está el máx, a la derecha, el mín; la ensilladura degenerada — en el vértice del polígono fundamental. La función $f(x)$ en un entorno pequeño de esta ensilladura degenerada es de forma $\mathrm{Re}(x + iy)^k$ (hallar k como función de g o de μ). La desintegración de este punto singular en la reunión de las singularidades no degeneradas se muestra en la fig. 82. La desintegración la demostraremos en términos de un correspondiente campo vectorial de grad f; los puntos críticos de f coinciden con las singularidades del campo de grad f.

Supongamos $f(x, y) = \mathrm{Re}(z^k)$ (donde $z = x + iy$). Entonces el punto $0 \in \mathbb{R}^2(x, y)$ es un punto crítico degenerado de f (y la singularidad degenerada para el campo $v(x, y) = \mathrm{grad} \times \mathrm{Re}(z^k)$). En la fig. 82 se indica el cuadro de las trayectorias integrales del campo v.

Consideremos una perturbación pequeña $f(x, y) \to \mathrm{Re} \coprod_{\alpha=1}^{k} (z - \varepsilon_\alpha)$, donde $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ para $i \neq j$. En la fig. 82 se observa la desintegración de la singularidad degenerada en la unión $k - 1$ de puntos singulares no degenerados.

OBSERVACIÓN. Al construir sobre la variedad M^2 una función suave f con tres puntos críticos, hemos utilizado la siguiente representación de M^2: $W = a_1 a_2 \ldots a_N a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{N-1}^{-1} a_N^{\pm 1}$ y hemos partido el

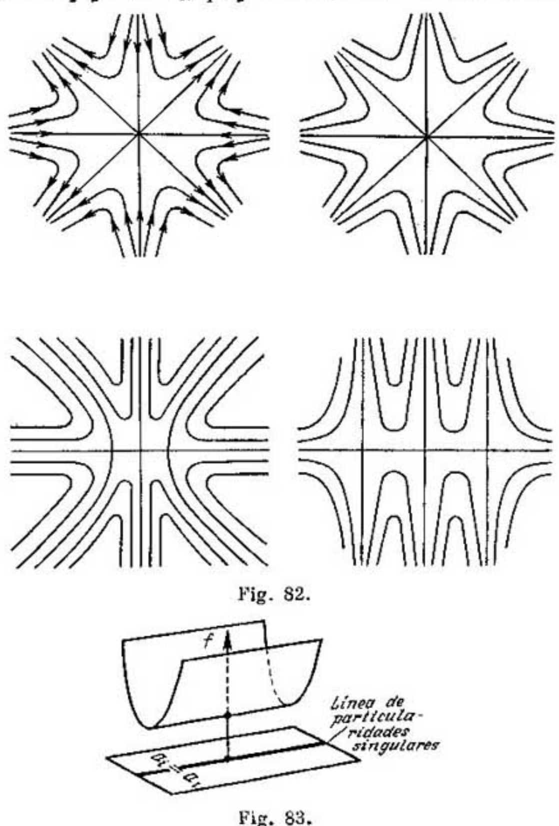


Fig. 82.

Fig. 83.

polígono W con un segmento (ab) de tal manera, que, por un lado, de (ab) no haya un par de lados enumerados con la misma letra a_i. Esto fue necesario para evitar (al construir la función) el surgimiento de una variedad continua de puntos críticos degenerados (véase la fig. 83).

§ 18. Dualidad de Poincaré

En topología, geometría algebraica y en el álgebra homológica, bajo un término general de «dualidad de Poincaré» se entiende un conjunto de afirmaciones sobre el isomorfismo de las homologías y cohomologías de dimensiones complementarias en diferentes situaciones. El teorema más simple (de Poincaré) afirma, que para una variedad cerrada compacta suave conexa M^n tiene lugar un isomorfismo: $H_k(M; \mathbb{R}) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{R})$, donde $H_*(M; \mathbb{R})$ son grupos de homologías con coeficientes reales, $n = \dim M^n$. Evidentemente, este isomorfismo es equivalente a la condición $b_k(M) = b_{n-k}(M)$ en los números de Betti de la variedad M. Si la variedad M es no orientable, entonces la dualidad de Poincaré tiene lugar para las homologías por módulo 2: $H_k(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$. Consideremos las variedades orientables. El caso no orientable se examina de modo análogo.

La dualidad se basa en lo siguiente.

Construiremos dos particiones celulares: K y $\widetilde{K}$ de la variedad M^n, duales entre sí. Más exactamente, confrontemos a cada célula $\sigma^i \in K$ (con ayuda de cierta correspondencia $D\colon K \to \widetilde{K}$) alguna célula $(n-i)$-dimensional $D(\sigma^i) = \widetilde{\sigma}^{n-i}$ (es decir, una célula de dimensión complementaria), con esto la correspondencia D satisfará las siguientes condiciones:

1. D es una correspondencia biunívoca entre las células del complejo K y células del complejo $\widetilde{K}$.

2. Para cualesquiera dos células $\sigma^i, \sigma^{i-1} \in K$ su coeficiente de incidencia $[\sigma^i : \sigma^{i-1}]$ con exactitud hasta el signo, que depende sólo de la dimensión i, es igual al coeficiente de incidencia de las células $\widetilde{\sigma}^{n-i}$, $\widetilde{\sigma}^{n-i+1}$, correspondientes a las células iniciales con la correspondencia D; o sea, $[\sigma^i : \sigma^{i-1}] = \pm[\widetilde{\sigma}^{n-i+1} : \widetilde{\sigma}^{n-i}]$. Recordemos que consideramos un caso orientable. Pero en el caso de la variedad no orientable, es necesario tomar el coeficiente de incidencia por módulo 2, o sea, en el caso no orientable se cumplirá la igualdad $[\sigma^i : \sigma^{i-1}] = [\widetilde{\sigma}^{n-i+1} : \widetilde{\sigma}^{n-i}] \bmod 2$.

Consideremos en M^n una función regular de Morse $f(x)$, cuyos puntos críticos están ordenados respecto a sus índices, o sea, $f(x_i) \geqslant f(x_j)$, si $\lambda_1 > \lambda_j$. La existencia de tal función «regular» de Morse fue demostrada más arriba.

Damos orientación en M^n y consideramos junto con la función f otra función $-f = g$. Claro está, que si x_i es un punto crítico para f de índice λ_i, entonces x_i es un punto crítico también para $g = -f$ de índice $n - \lambda_i$.

Tomemos en calidad de partición celular K de la variedad M, una partición engendrada por la función f (véase más arriba), y en

calidad de $\widetilde{K}$ una partición engendrada por la función $-f$. Consideremos más atentamente la conexión entre los complejos K y $\widetilde{K}$. Tenemos un entorno pequeño $U(x_i)$ del punto x_i, y su descomposición mediante las funciones f y $-f$ (véase la fig. 84).

Ahora construimos la correspondencia buscada (aplicación de las células) D, donde $D: K \to \widetilde{K}$. Tomamos $D(\sigma^\lambda) = \widetilde{\sigma}^{n-\lambda}$ (véase la

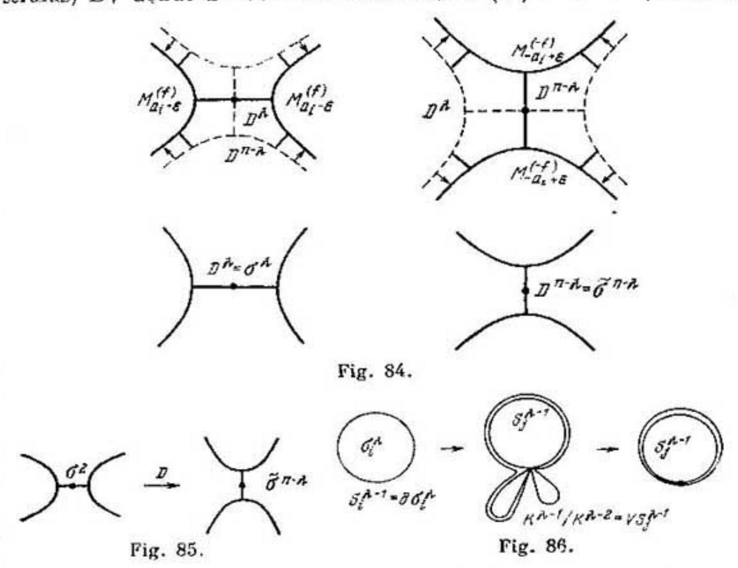


Fig. 84.

Fig. 85.

Fig. 86.

fig. 85). Las células σ^λ para la función f y $\widetilde{\sigma}^{n-\lambda}$ para la función $g = -f$, fueron definidas en el § 15.

Estudiemos ahora la conexión entre los coeficientes de incidencia: $[\sigma^\lambda : \sigma^{\lambda-1}]$ y $[\widetilde{\sigma}^{n-\lambda+1} : \widetilde{\sigma}^{n-\lambda}]$.

Consideremos una célula σ_i^λ (i es el número de la célula) y una célula $\sigma_j^{\lambda-1}$; el número $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}]$ es, por definición, el grado de una aplicación $p_{ij}^\lambda : S_i^{\lambda-1} \to S_j^{\lambda-1}$, donde $S_i^{\lambda-1} = \partial(\sigma_i^\lambda)$ (o sea, frontera de la célula σ_i^λ); p_{ij}^λ coincide con la composición de la aplicación característica $\partial\sigma_i^\lambda \to K^{\lambda-1}$, acotada de σ_i^λ en su frontera $\partial\sigma_i^\lambda$, y la proyección del complejo cociente $K^{\lambda-1}/K^{\lambda-2} = \bigvee S_j^{\lambda-1}$ en el j-ésimo sumando de este ramo $S_j^{\lambda-1}$ (véase la fig. 86).

El número obtenido (véase [1], p. II, § 15) coincide con el índice de intersección de la esfera $S_i^{\lambda-1} = \partial\sigma_i^\lambda$ con la célula $\widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ (véase la fig. 87).

Claro que el índice de intersección de la esfera $S_i^{\lambda-1}$ con la célula $\widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ es igual al coeficiente de enganche de la esfera $S^{\lambda-1}$ con la esfera $\widetilde{S}_j^{n-\lambda} = \partial\widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ (aquí omitimos la designación de la

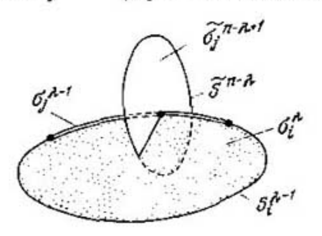


Fig. 87.

aplicación característica). Connotamos a este coeficiente de enganche con $w(S_i^{\lambda-1};\ \widetilde{S}_j^{n-\lambda})$. De este modo, queda demostrado que $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}] = w(S_i^{\lambda-1} : \widetilde{S}_j^{n-\lambda})$. Por analogía obtenemos, que $[\widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1} : \widetilde{\sigma}_i^{n-\lambda}] = w(S_j^{n-\lambda};\ S_i^{\lambda-1})$. Comparando las dos últimas fórmulas obtenemos definitivamente, que los complejos $\widetilde{K}$ y K son duales, o sea, $[\sigma^\lambda : \sigma^{\lambda-1}] = \pm[\widetilde{\sigma}^{n-\lambda-1} : \sigma^{n-\lambda}]$.

De manera que el operador de dualidad $D\colon K \to \widetilde{K}$ tiene tal propiedad, que las células σ_j^λ y $\widetilde{\sigma}_j^{\lambda-1} = D\sigma_j^\lambda$ se intersecan sólo en un punto interior y, con esto, transversalmente (para las variedades orientables M^n con orientación escogida de las células, este índice de intersección es igual a $+1$). Los demás pares de células no se intersecan jamás. Las células dan una base de los grupos con coeficientes enteros (y otros) de cadenas $C_\lambda(K)$ y $C_\mu(\widetilde{K})$. De esto modo entre los grupos de cadenas se establece un producto no degenerado bilineal escalar $a \circ b$, llamado «índice de intersección»: si $a \in C_\lambda(K)$ y $b \in C_{n-\lambda}(\widetilde{K})$, entonces

$$\sigma_i^\lambda \circ D\sigma_q^\lambda = \delta_{iq}, \qquad a \circ b = \sum_{i,\ j} a_i b_j (\sigma_i^\lambda \circ \widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda})$$

(en un caso no orientable por módulo 2); aquí

$$a = \sum_i a_i \sigma_i^\lambda, \quad b = \sum_j b_j \widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda}.$$

Fue demostrada la propiedad de conjugación

$$(\partial a) \circ b = a \circ (\partial b),$$

donde $a \in C_\lambda(K)$, $b \in C_{n-\lambda-1}(\widetilde{K})$, porque $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}] = [D\sigma_i^\lambda : D\sigma_j^{\lambda-1}]$.

De manera que el complejo $(C(\widetilde{K}), \partial)$ está conjugado al complejo $(C(K), \partial)$. De aquí se deduce el siguiente teorema

Teorema 1. *Tiene lugar un «isomorfismo de dualidad de Poincaré» canónico:*

$$H_k(M^n) \cong H^{n-k}(M^n),$$

donde M^n es una variedad suave orientable cerrada. En particular, tenemos para los números de Betti

$$b_k = b_{n-k}$$

los rangos H_k, H_{n-k}, coinciden). Entre las homologías de dimensiones complementarias H_k y H_{n-k}, se ha construido una forma no degenerada bilineal (para las homologías con coeficientes enteros, unimodular), denominada «índice de intersección de los ciclos». Si $n = 2k$, entonces $n - k = k$, y tenemos una forma no degenerada en $H_k(M)$: $a \circ b = (-1)^k\, b \circ a$.

La demostración del teorema se deduce inmediatamente de la conclusión precedente con una nota complementaria, que ambos complejos K y $\widehat{K}$ son homotópicamente equivalentes a M^n y por eso tienen iguales homologías y cohomologías, según los resultados del § 5.

EJEMPLO 1. Para cualquier variedad conexa orientable M^n tenemos $H_0 = \mathbb{Z} = H_n(M^n)$.

Para una variedad no orientable tenemos $H_0(M^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (siempre), pero $H_n(M^n, \mathbb{Z}) = 0$. Por el módulo 2 tenemos $H_0(M^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 = H_0(M^n, \mathbb{Z}_2)$.

EJEMPLO 2. Sean: $n = 2$, y M^2, orientable. El grupo $H_1(M^2, \mathbb{Z})$ es de forma no degenerada antisimétrica, o sea, índice de intersección. Por eso la dimensión de b_1 es par y hay una base canónica de ciclos $a, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$, donde

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

El grupo $H_1(M^2; \mathbb{Z})$ no tiene torsión, y es posible escoger todos los ciclos a_i, b_i con coeficientes enteros.

EJEMPLO 3. Sea $M^2 = \mathbb{R}P^2$ (no orientable). El grupo $H_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ con una generatriz x (la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$). De la no degeneración de la forma $a \circ b$ (mod 2) en el grupo $H_1(M^2, \mathbb{Z}_2)$, obtenemos

$$x \circ x = 1 \pmod 2.$$

EJEMPLO 4. Sea M^4 orientable. En la variedad $M^n \times M^n$ tenemos un ciclo $\Delta = (x, x)$ — diagonal, $\Delta \in H_n (M^n \times M^n)$. El índice de intersección $\Delta \circ \Delta$ es igual a una característica de Euler, ya que este número $\Delta \circ \Delta$ coincide con una singularidad sumaria de un campo vectorial (véase [1], p. II, § 15). En los grupos $H_k (M^n \times M^n, \mathbb{R}) = \sum_{q+l=k} H_q (M^n) \otimes H_l (M^n)$ hay una base de ciclos $z_i \otimes z_j$, donde $\{z_i\}$ es una base en el grupo $H_* (M^n)$. Aquí el índice de intersección es de la forma

$$(z_i \otimes z_j) \circ (z'_k \otimes z'_l) = (z_i \circ z'_k)(z_j \circ z'_l);$$

él es no trivial sólo si $\dim z_i + \dim z'_k = n$, $\dim z_j + \dim z'_l = n$ (¡verificarlo!).

PROBLEMA 1. Sea dada una aplicación $f: M^n \to M^n$ y sean conocidas todas las aplicaciones $f_{k,*}: H_k (M^n, \mathbb{R}) \to H_k (M^n, \mathbb{R})$. Calcular índice de intersección $\Delta \circ \Delta_f$ en $M^n \times M^n$, donde $\Delta_f = (x, f(x))$ es un gráfico. Demostrar la fórmula de Lefschetz $\Delta \circ \Delta_f = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{Sp} f_{k,*}$. (Para las variedades no orientables es necesario reemplazar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Z}_2$.) La expresión $\Delta \circ \Delta_f$ da un número algebraico de puntos inmóviles de la aplicación f (véase [1], p. II, § 15). Al principio, consideremos los casos más simples: $M^n = S^n$, $M^n = T^n$, $M^n = \mathbb{R}P^n$, $M^n = M_g^2$. En particular, si f es homotópica a la aplicación en un punto, entonces $f_{k*} = 0$ para $k > 0$ y f_{0*} es idéntica. En este caso $\Delta \circ \Delta_f = 1 = Spf_{0*}$, lo que coincide con el resultado del § 15, p. II del libro [1].

PROBLEMA 2. Demostrar que la dualidad de Poincaré en las cohomologías $H^*(M^n)$ es dada por una multiplicación cohomológica. Esto significa, exactamente, que la forma

$$(ab, [M^n]) = \langle a, b \rangle$$

es no degenerada: aquí $a \in H^q (M^n)$, $b \in H^{n-q} (M^n)$, son coeficientes o campo. Si se trata de homologías y cohomologías con coeficientes enteros $H^* (M^n; \mathbb{Z})$ y $H_* (M^n; \mathbb{Z})$, donde hay una torsión, entonces aquí es cómodo obtener la ley sobre la dualidad de Poincaré de un «operador de tallado» (véase § 7)

$$Da = a \frown [M^n], \tag{1}$$

donde $a \in H^k (M^n; \mathbb{Z})$ y $a \frown [M^n] \in H_{n-k} (M^n; \mathbb{Z})$. Para los campos de coeficientes, en virtud de la fórmula

$$((a \frown [M^n]), b) = (ab, [M^n]), \tag{2}$$

y en virtud de la conjugación recíproca H_q y H^q la fórmula (1) no da nada de nuevo y substancial.

PROBLEMA 3. Sea $M \supset K$, al mismo tiempo sean M y K complejos celulares finitos y $M \setminus K$ una variedad orientable suave abierta. Demostrar las igualdades:

$$H_i(M, K; \mathbb{Z}) \cong H_i(M/K; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i}(M \setminus K; \mathbb{Z}), \quad i > 0,$$
$$H^i(M, K; \mathbb{Z}) \cong H^i(M/K; \mathbb{Z}) \cong H_{n-i}(M \setminus K; \mathbb{Z}), \quad i > 0$$

(la dualidad de Lefschetz). Examinar un caso especial: $i = 0$.

PROBLEMA 4. Sea $K^m \subset S^n$ $(m < n)$ una inmersión (encaje de un complejo celular finito K^m en una esfera S^n. Demostrar las igualdades

$$H_i(K^m; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i-1}(S^n \setminus K^m; \mathbb{Z}), \quad i > 0,$$
$$H^i(K^m; \mathbb{Z}) \cong H_{n-i-1}(S^n \setminus K^m; \mathbb{Z}), \quad i > 0$$

(la dualidad de Alexander). Examinar un caso especial: $i = 0$.

PROBLEMA 5. Sea M^n una variedad orientable cerrada compacta suave $H_k(M^n; \mathbb{Z}) = R_k \oplus T_k$ una descomposición de los grupos H_k en suma directa de los grupos abelianos libres R_k y de los grupos abelianos de orden finito T_k. Entonces se tienen los siguientes isomorfismos: $R_k = R_{n-k}$, $T_k = T_{n-k-1}$.

OBSERVACION. Las relaciones $R_k \cong R^k$, $T_k \cong T^{k+1}$ se cumplen para cualquier complejo celular finito.

Recordemos, que se denomina característica de Euler de la variedad M^n a una suma alternada: $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i = \chi(M^n)$, donde $n = \dim M^n$; $\beta_i = \dim H_i(M^n; \mathbb{Z}_2)$ son números de Betti de mod 2 de la variedad M^n. De la dualidad de Poincaré (para las variedades cerradas) obtenemos: $\beta_i = \beta_{n-i}$, y por eso tenemos para variedades de dimensión impar M^{2k+1}: $\chi(M^{2k+1}) = \sum (-1)^i \beta_i = 0$ (para las M^n orientables es posible utilizar los números de Betti con $G = \mathbb{R}$).

§ 19. Puntos críticos de las funciones suaves y categoría de Lusternik—Shnirelman

Si f **una** función de Morse, es decir, sobre la variedad M no son degenerados los puntos críticos, entonces el número de puntos críticos de la función f, como ya lo sabemos del § 16, se estima inferiormente: $\mu_k \geqslant b_k$, donde μ_k es el número de puntos críticos del índice k y b_k es un número de Betti: $b_k = \dim H_k(M; G)$, donde $G = \mathbb{R}$, o bien $G = \mathbb{Z}_2$ (o bien $\mathbb{Z}_p$, p es primo). Así, por ejemplo, en cualquier superficie bidimensional de tipo M_g^2 cualquier función de Morse tiene no menos de $(2g + 2)$ puntos críticos. Pero la situación se complica bruscamente, si tratamos de estimar inferiormente el número de puntos críticos para una función suave arbitraria f, que no necesariamente tiene que ser función de Morse. Como muestran algunos ejemplos elementales, el número de las singularidades degeneradas puede ser considerablemente menor. Tal como fue indicado

anteriormente, al deformarse la función f en un espacio de funciones suaves, las singularidades no degeneradas pueden reunirse, formando singularidades degeneradas. Tales uniones mutuas disminuyen el número de puntos críticos. Mientras una función de Morse en M_g^2 debe tener no menos de $2g + 2$ puntos críticos, en cualquier M_g^2 existe una función suave con tres puntos críticos, de los cuales uno es degenerado (y se desintegra en $2g$ no degenerados con una perturbación conveniente), y otros dos son puntos de mínimo y de máximo. Están cumplidas las desigualdades de tipo $\sum_{(k)} \mu_k \geqslant \sum_{(k)} b_k$ (véase el § 16) en el caso, cuando f no es una función de Morse; pero ahora los números μ_k no tienen el sentido, que obtenían en un caso no degenerado (o sea, números de singularidades no degeneradas de índice k). Ahora los números μ_k describen el «grado de complejidad» de los puntos críticos, el cual ya no se relaciona directamente con la cantidad de los mismos. Es más, como fue mostrado anteriormente, no cada punto crítico (degenerado) debe ser necesariamente punto de bifurcación (véase más arriba el § 16), y por eso las desigualdades $\sum_{(k)} \mu_k \geqslant \sum_{(k)} b_k$ pueden no tomar en cuenta ciertas singularidades degeneradas. De manera que esto no da posibilidad de estimar inferiormente el número de singularidades de una función suave arbitraria f sobre una variedad M^n dada. Resulta que hay cierta invariante topológica de la variedad M^n (llamada categoría de Lusternik—Shnirelman) —cat (M^n)— que estima inferiormente el número de puntos críticos de la función f. Pasemos a describir esta invariante.

Sean: X, un espacio topológico (de Hausdorff); $A \subset X$, un subconjunto cerrado arbitrario en X.

DEFINICIÓN 1. *A la categoría $cat_X(A)$ de un subconjunto cerrado A respecto a un espacio X se denomina número minimal k para el cual existen tales subconjuntos cerrados $A_1, \ldots, A_k$ en* X, *que* $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, *y cada subconjunto A_i se contrae en un punto por el espacio X.*

OBSERVACIÓN. No se supone la conexión de subconjuntos $\{A_i\}$. El propio espacio X lo suponemos, para simplificar, conexo. Si $A = X$, consideramos (por definición), que $\text{cat}_X(X) = \text{cat}(X)$. Este número se llama categoría de Lusternik—Shnirelman. La categoría $\text{cat}_X(A)$ puede tomar los valores: 1, 2, 3, . . .

Enumeremos y demostremos las propiedades fundamentales de $\text{cat}_X(A)$.

LEMA 1. *Si $A \subset B \subset X$, entonces $cat_X(A) \leqslant cat_X(B)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $q = \text{cat}_X(B)$, es decir, existen subconjuntos cerrados B_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, tales, que $B = \bigcup_{i=1}^{q} B_i$ y cada B_i se contrae por X en un punto. Consideremos los subconjuntos cerrados $A_i =$

$= A \cap B_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Entonces, es evidente que $A = \bigcup_{i=1}^{q} A_i$ y cada A_i se contrae por X en un punto. En consecuencia, $\operatorname{cat}_X(A) \leqslant q = \operatorname{cat}_X(B)$, lo que se quería demostrar.

LEMA 2. *Sean A y B dos subconjuntos cerrados arbitrarios en X. Entonces* $\operatorname{cat}_X(A \cup B) \leqslant \operatorname{cat}_X(A) + \operatorname{cat}_X(B)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean, $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ y $B = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$; entonces $A \cup B = \bigcup_{\alpha=1}^{p+k} C_\alpha$, donde $C_\alpha = A_\alpha$, para $1 \leqslant \alpha \leqslant k$, y $C_\alpha = B_{\alpha-k}$, para $k+1 \leqslant \alpha \leqslant k+p$. Puesto que A_i y B_j se contraían por X en un punto, entonces C_α se contrae en un punto y la $\operatorname{cat}_X(C) \leqslant k + p = \operatorname{cat}_X(A) + \operatorname{cat}_X(B)$. El lema queda demostrado.

LEMA 3. *Sean $A \subset B$ subconjuntos cerrados en X. Entonces* $\operatorname{cat}_X(\overline{B \setminus A}) \geqslant \operatorname{cat}_X(B) - \operatorname{cat}_X(A)$, *donde por $\overline{B \setminus A}$ se designa la clausura del subconjunto $B \setminus A$ en X.*

DEMOSTRACIÓN. Como $B = A \cup (\overline{B \setminus A})$, entonces, en virtud del lema 2, obtenemos $\operatorname{cat}_X(B) \leqslant \operatorname{cat}_X(A) + \operatorname{cat}_X(\overline{B \setminus A})$. El lema queda demostrado.

LEMA 4. *Sean $A \subset B$ dos subconjuntos cerrados en X y que el conjunto B se deforme continuamente en el subconjunto A (es decir, hay una homotopía φ_t de la aplicación de inmersión $i\colon B \to X$ en tal aplicación $\varphi_1\colon B \to X$, con la cual $\varphi_1(B) \subseteq A$. Entonces $\operatorname{cat}_X(A) \geqslant \operatorname{cat}_X(B)$. (El conjunto $\varphi_1(B) \subset X$ puede ser no homeomorfo a B.)*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\operatorname{cat}_X(A) = k$. Consideremos el recubrimiento $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, donde todos los A_i se contraen por X en un punto. Como $\varphi_1(B) \subseteq A$, es posible considerar $R_j = \varphi_1(B) \cap A_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$. En virtud de la condición del lema, hay una aplicación continua α: $i(B) \to \varphi_1(B)$, donde el subconjunto $i(B)$ es homeomorfo a B. Supongamos que $B_j = \alpha^{-1}(R_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Está claro, que $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$. Luego, aplicando a B_j la homotopía φ_t, deformamos B_j por X en un subconjunto $\varphi_1(B_j) = R_j \subset A_j$, o sea, R_j se contrae por X en un punto; con lo cual cada B_j se contrae en un punto por X; por consiguiente, $\operatorname{cat}_X(B) \leqslant k$. El lema queda demostrado. Véase la fig. 88.

LEMA 5. *Sean $A \subset X$, A es compacto y X una variedad. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal, que $\operatorname{cat}_X(U_\varepsilon A) = \operatorname{cat}_X(A)$, donde con $U_\varepsilon(A)$ se designa un ε-entorno cerrado de un subconjunto $A \subset X$. El número ε depende de A.*

DEMOSTRACIÓN. Como $A \subset U_\varepsilon A$, entonces por el lema 1 obtenemos: $\operatorname{cat}_X(A) \leqslant \operatorname{cat}_X(U_\varepsilon A)$. Demostremos la desigualdad inversa.

Sean: $\text{cat}_X(A) = k$, y $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, donde cada A_i se contrae por X en un punto. Puesto que X es una variedad, entonces, evidentemente, existe un $\varepsilon > 0$ tal, que $U_\varepsilon(A_i)$ se contrae (tras de A_i) en un punto por X $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Como $U_\varepsilon(A) = \bigcup_{i=1}^{k} U_\varepsilon(A_i)$, entonces $\text{cat}_X(U_\varepsilon(A)) \leqslant k = \text{cat}_X(A)$. El lema queda demostrado.

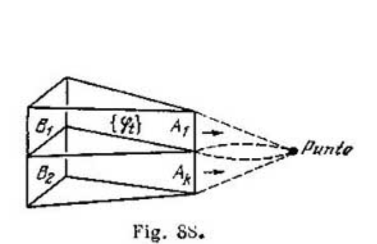


Fig. 88.

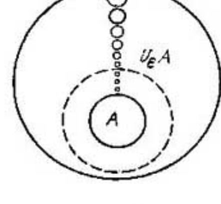


Fig. 89.

OBSERVACIÓN. Si X no es una variedad, el lema 5 no es justo (véase la fig. 89).

LEMA 6. *Supongamos que X es una variedad. Sean A, B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ subconjuntos cerrados en X, y $A = \lim_{n\to\infty} B_n$, es decir, $\rho(A, B_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, donde X se supone que es un espacio métrico; $\rho(C, D) = \sup_{x\in C}(\inf_{y\in D} \rho(x, y)) + \sup_{y\in D}(\inf_{x\in C} \rho(x, y)$; $\rho(x, y)$ es la distancia entre los puntos x e y en X. Supongamos, que $\text{cat}_X(B_n) \geqslant k$. Entonces también $\text{cat}_X(A) \geqslant k$.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del lema 5, existe un $\varepsilon > 0$ tal, que $\text{cat}_X(U_\varepsilon A) = \text{cat}_X(A)$. Puesto que $\rho(A, B_n) \to 0$, entonces hay un número N tal, que $B_n \subset U_\varepsilon A$ para todos los $n > N$. De este modo, tenemos: $k \leqslant \text{cat}_X(B_n) \leqslant \text{cat}_X(U_\varepsilon A) = \text{cat}_X(A)$. El lema queda demostrado.

TEOREMA 1. *Sean M^n una variedad suave, compacta, conexa, cerrada, y $f(x)$ una función suave en M^n. Entonces se cumple la desigualdad $k \geqslant \text{cat}(M^n)$, donde k es el número de los puntos críticos distintos de la función f. (En particular, k puede ser infinito.)*

De hecho el teorema es justo para los puntos de bifurcación de la función f, o sea, $p \geqslant \text{cat}(M^n)$, donde p es igual al número de puntos bifurcacionales distintos de la función f. Al principio, examinemos una analogía, que se tiene entre la conducta de la categoría de un conjunto de los puntos críticos de la función f y la conducta de los números propios de una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$.

Consideremos la inmersión (el encaje) estándar de una esfera S^{n-1} en $\mathbb{R}^n$ $(x^1, \ldots, x^n)$, es decir, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \; |x| = 1\}$. Sea $B(x, y)$ una forma simétrica bilineal real en $\mathbb{R}^n$. Examinemos la función suave $f(x)$ asociada a ella en la esfera S^{n-1}, dada por la fórmula $f(x) = B(x, x)$, $|x| = 1$. Hallemos todos los puntos críticos de la función f. Sean $x \in S^{n-1}$, $\bar{a} \in T_x(S^{n-1})$; consideremos la derivada $\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}\right|_x$ de la función f en un punto x según la dirección $\bar{a}$. Sea $x(t)$ cualquier curva suave en la esfera S^{n-1} tal, que $x(0) = x$, $\dot{x}(0) = \bar{a}$; entonces

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}\right|_x = \frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} B(x(t), \; x(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle Bx(t), \; x(t)\rangle\Big|_{t=0},$$

donde con $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se designa un operador simétrico (respecto a un producto escalar euclídeo $\langle , \rangle$), asociado a una forma B. Luego

$$\left.\frac{df}{d\bar{a}}\right|_x = \frac{d}{dt} \langle Bx(t), \; x(t)\rangle_{t=0} = \langle B\dot{x}, \; x\rangle + \langle Bx, \; \dot{x}\rangle = 2\langle Bx, \; \bar{a}\rangle.$$

Por consiguiente, el punto $x_0 \in S^{n-1}$ es crítico si, y sólo si, $\langle Bx_0, \bar{a}\rangle \equiv 0$ para cualquier vector $\bar{a} \in T_{x_0}S^{n-1}$. Esta condición es equivalente a la siguiente: el vector Bx_0 es ortogonal a un plano $T_{x_0}S^{n-1}$, o sea, $Bx_0 = \lambda x_0$, donde λ es un número real.

Sean $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ vectores propios de la forma B, y $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ los números propios correspondientes. En virtud de la simetría del operador B todos los vectores $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ son ortogonales de par en par (los consideramos unidades), y los números $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ son reales. Recordemos, que $f(e_\alpha) = \langle Be_\alpha, e_\alpha\rangle = \langle \lambda_\alpha, e_\alpha, e_\alpha\rangle = \lambda_\alpha \langle e_\alpha, e_\alpha\rangle = \lambda_\alpha$. Vamos a considerar, que los números λ_α (también los vectores e_α) estan en orden creciente, o sea, $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}$.

Examinemos en la esfera S^{n-1} todos los posibles ecuadores i-dimensionales S^i, es decir, secciones de la esfera S^{n-1} con los planos de dimensión $i + 1$, que pasan por el origen de las coordenadas. Designemos al conjunto de todos estos «ecuadores» por M_i (o sea, $M_i = \{S^i\}$). Fijamos un ecuador arbitrario $S^i \subset S^{n-1}$ y consideremos el $\max\limits_{x \in S^i} f(x)$. Se sabe muy bien de la teoría de las formas cuadráticas, que tiene lugar la igualdad $\lambda_i = \inf\limits_{M_i} (\max\limits_{x \in S^i} f(x))$; $0 \leqslant i \leqslant n - 1$. (Proponemos al lector demostrar esta relación por su cuenta.) Está claro, que la fórmula arriba dada concuerda con la ordenación fijada: $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}$. Notemos, que el grupo $SO(n)$ actúa transitivamente en cada clase M_i (cualquier ecuador S^i se obtiene de un ecuador fijado S_0^i mediante alguna torsión $g \in SO(n)$).

PROPOSICIÓN 1. *El número de los puntos críticos distintos de la función $f(x) = \langle Bx, x\rangle$ en la esfera S^{n-1}, no es menor que el número duplicado de clases $\{M_i\}$, o sea, que el número $2n$.*

DEMOSTRACIÓN. Si todos los números propios $\{\lambda_\alpha\}$ de la forma B son distintos, entonces los puntos críticos de la función f son exactamente puntos $\{\pm e_\alpha\}$ (o sea, extremos de los vectores $\pm e_\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \leqslant n-1$). Puesto que el número de estos puntos es igual a $2n$, luego n es igual al número de clases $\{M_i\}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Si existe tal par de índices $i < j$, que $\lambda_i = \lambda_j$, entonces la esfera S^{j-i} se compone completamente de puntos degenerados críticos de la función f y, ya que hay continuo de estos puntos, la afirmación buscada, evidentemente, se cumple.

OBSERVACIÓN. Como la función $f(x) = \langle Bx, x\rangle$ es invariante respecto a la aplicación $x \to -x$, entonces $f(x)$ es de hecho la función $\tilde{f}$ en un espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{n-1}$; para la función $\tilde{f}$ la propuesta arriba demostrada se reformula así: el número de puntos críticos distintos de la función $\tilde{f}$ en $\mathbb{R}P^{n-1}$ no es menor que el número de clases $\{M_i\}$, o sea, que el número n.

Después de estas notas preliminarias examinemos los puntos críticos de la función suave f sobre una variedad arbitraria suave compacta cerrada M^n. Efectuamos los siguientes cambios en la construcción arriba expuesta.

Cambiamos la esfera S^n por la variedad M; la forma $B(x, x)$ por la función arbitraria suave $f(x)$, $x \in M$; en vez de las torsiones $g \in SO(n)$, que conservaban cada clase M_i (véase más arriba), examinamos las homotopías continuas que, como será mostrado, conservan algunas clases de subconjuntos cerrados, análogos de clases M_i; en lugar de los números propios λ_i de la forma $\vec{B}$ trataremos ciertos análogos suyos, construidos por las clases de subconjuntos cerrados. Pasemos a una exposición detallada.

Sea M^n una variedad suave compacta conexa cerrada. Con M_i designemos a la clase de todos los subconjuntos cerrados $X \subset M^n$ tales, que $\operatorname{cat}_M(X) \geqslant i$. Está claro, que $M_i \supseteq M_{i+1}$. Connotemos con $\theta(M^n)$ al espacio de todos los subconjuntos cerrados en la variedad M^n. El espacio $\theta(M^n)$ se transforma en un espacio métrico mediante la introducción de la métrica

$$\rho(X, Y) = \sup_{x\in X}(\inf_{y\in Y} \rho(x, y)) + \sup_{y\in Y}(\inf_{x\in X} \rho(x, y)),$$

donde ρ es una distancia en M^n. Digamos, que $Y = \lim\limits_{p\to\infty} X_p$ si $\lim\limits_{p\to\infty} \rho(Y, X_p) = 0$; $Y, X_p \in \theta$.

LEMA 7. *Cada clase de subconjuntos $M_i \subset \theta(M^n)$ es cerrada respecto a la operación del paso al límite lim y respecto a la homotopía de subconjuntos por la variedad M.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $X_p \in M_i$; $p = 1, 2, 3, \ldots$; $X = \lim_{p\to\infty} X_p$; $\text{cat}_{M^n}(X_p) \geqslant i$ (por definición de clase M_i). Es necesario demostrar, que $\text{cat}_{M^n}(X) \geqslant i$. Esto se deduce inmediatamente del lema 6. Luego: sean $X \in M_i$ e $Y = \varphi_1 X \subset M^n$ un subconjunto, obtenido de X mediante una deformación continua φ_t: $X \to M^n$. Puesto que $\text{cat}_{M^n}(X) \geqslant i$, entonces, en virtud del lema 4, $\text{cat}_{M^n}(Y) \geqslant i$, o sea, $Y \in M_i$, lo que se quería demostrar. El lema queda demostrado.

De manera que los M_i son subconjuntos cerrados en $\theta(M^n)$.

Sea fijada la clase M_i y sea $X \in M_i$. Consideremos un número $\lambda_i = \inf_{X\in M_i} (\max_{x\in X} f(x))$. Esta definición de los números λ_i reproduce el teorema correspondiente de la teoría de formas cuadráticas (véase más arriba).

Designemos por N a la categoría de M^n: $\text{cat}(M^n) = N$. Claro que $N < \infty$. De la definición de las clases M_i obtenemos: $\theta = M_0 = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_N$. Aquí $\theta = M_0 = \{X \in \theta;\ \text{cat}_{M^n}(X) \geqslant 0\}$; claro que $\text{cat}_{M^n}(X) \geqslant 0$ para cualquier $X \in \theta$. Es evidente la coincidencia de las clases M_0 y M_1; en particular, $\lambda_0 = \lambda_1$. La clase M_N contiene la variedad M^n. La cadena de subconjuntos $\{M_i\}$ se rompe en la clase M_N.

Cada función suave f en la variedad M^n define un juego de funciones $f_0, f_1, \ldots, f_N$, donde la función f_i $(0 \leqslant i \leqslant N)$ está definida en la variedad M_i y es dada por la fórmula: $f_i(X) = \max_{x\in X} f(X)$, donde $X \in M_i$. Entonces $\lambda_i = \inf_{X\in M_i} (f_i(X))$. Puesto que $M_i \supseteq M_{i+1}$, con el crecimiento de i, los números λ_i sólo pueden aumentarse: $\lambda_0 = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N$; aquí $N = \text{cat}(M^n)$. Como las clases $M_i \subset \theta$ son cerradas respecto a un paso al límite (véase el lema 7), entonces en cada M_i $(0 \leqslant i \leqslant N)$ hay un elemento X_i^0 tal, que $f_i(X_i^0) = \lambda_i$. En otras palabras, X_i^0 es un subconjunto cerrado en M^n tal, que $\lambda_i = \max_{x\in X_i^0} f(x)$.

LEMA 8. *Consideremos una superficie de nivel $f_{\lambda_i} = \{x \in M^n \mid f(x)\} = \lambda_i\}$. Entonces sobre la superficie f_i hay por lo menos un punto crítico de la función f.*

Demostración. Supongamos lo inverso que en la superficie f_{λ_i} no hay puntos críticos de la función f. Consideremos la clase M_i y sea $X_i^0 \in M_i$ tal subconjunto cerrado en M^n, que $\max_{x\in X_i^0} (f(x)) = \lambda_i$, es decir, $f_i(X_i^0) = \lambda_i$. En virtud del carácter cerrado de X_i^0 existe un punto $x_i^0 \in X_i^0$ tal, que $f(x_i^0) = \lambda_i$, o sea, $x_i^0 \in f_{\lambda_i}$. Como por suposición, el grad $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in f_{\lambda_i}$, entonces, (en virtud de la compacidad de M^n) existe una deformación bastante pequeña de la superficie f_{λ_i} a lo largo de las trayectorias integrales de un

campo vectorial (—grad f) (consideramos, que en M^n está dada una métrica de Riemann) en un dominio de los valores de la función f, menores que λ_i (véase la fig. 90).

Como M^n es una variedad suave compacta, existe una isotopía suave M^n por sí misma, constante fuera de un entorno pequeño de fibra: $\lambda_i - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \lambda_i$ y que pasa de $\{f = \lambda_i\}$ a $\{f = \lambda_i - \varepsilon\}$. Sea $\widetilde{X}_i^0$ una imagen del subconjunto X_i^0 respecto a esta deformación

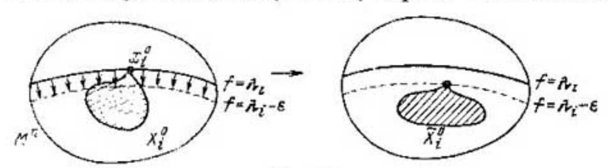


Fig. 90.

Como $\widetilde{X}_i^0$ ha sido obtenida de X_i^0 mediante una homotopía por M^n entonces, en virtud del lema, $\operatorname{cat}_{M^n}(\widetilde{X}_i^0) \geqslant \operatorname{cat}_{M^n}(X_i^0)$ (en realidad tiene lugar la igualdad). Por consiguiente, $\operatorname{cat}_{M^n}(\widetilde{X}_i^0 \geqslant i$, o sea, $\widetilde{X}_i^0 \in M_i$. De aquí obtenemos, que $\sup\limits_{x\in\widetilde{X}_i^0} f(x) \leqslant \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i$, lo que significa, que $\inf\limits_{X\in M_i} (\sup\limits_{x\in X} f(x)) \leqslant \sup\limits_{x\in\widetilde{X}_i^0} f(x) \leqslant \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i$, y esto es imposible, según la definición de λ_i. El lema queda demostrado.

LEMA 9. *Supongamos, que $\lambda_i = \lambda_{i+p}$, donde $p > 0$. Designemos con S al conjunto de los puntos críticos de la función en una superficie de nivel $f_{\lambda_i} = \{f = \lambda_i\}$. Entonces,* $\operatorname{cat}_{M^n}(S) \geqslant p + 1$.

Demostración. Cabe subrayar aquí la analogía con la conducta de los puntos críticos de la función $\langle Bx, x\rangle$ en la esfera S^{n-1}: si $\lambda_i = \lambda_{i+p}$, entonces un elipsoide de forma B, que es un elipsoide de torsión a lo largo de sus propias direcciones $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{i+p}$, engendra el conjunto de los puntos críticos de la función f, homeomorfo a la esfera S^p. Pasemos a demostrar el lema. Puesto que S es cerrado, existe un $\varepsilon > 0$ tal, que $\operatorname{cat}_{M^n}(S) = \operatorname{cat}_{M^n}(U_\varepsilon S)$ (véase el lema 5). Supongamos lo inverso: $\operatorname{cat}_{M^n}(S) \leqslant p$. Examinemos la cadena de las clases $M_i \supset M_{i+1} \supset \ldots \supset M_{i+p}$. Sea $X_{i+p}^0 \in M_{i+p}$ tal subconjunto cerrado, que $\sup\limits_{x\in X_{i+p}^0} f(x) = \lambda_{i+p} = \lambda_i$.

Consideremos el conjunto cerrado $X^0 = \overline{X_{i+p}^0 \setminus (X_{i+p}^0 \cap U_\varepsilon S)}$ (véase la fig. 91). Entonces

$$\operatorname{cat}_{M^n}(X^0) \geqslant \operatorname{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \operatorname{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0 \cap U_\varepsilon S) \geqslant \operatorname{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \operatorname{cat}_{M^n}(U_\varepsilon S) = \operatorname{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \operatorname{cat}_{M^n}(S) \geqslant i + p - p = i.$$

De manera que $\text{cat}_{M^n}(X^0) \geqslant i$, o sea, $X^0 \in M_i$. Luego

$$\lambda_i = \lambda_{i+p} = \sup_{x \in X^0_{i+p}} (f(x)) \sup_{x \in X^0} (f(x)) \, \lambda_i = \lambda_{i+p} = \sup_{x \in X^0_{i+p}} (f(x)).$$

De manera que queda demostrado, que $\sup\limits_{x \in X^0} (f(x)) = \lambda_i$, y por eso el conjunto X^0 se puede considerar como uno de los compactos X_i^0 en la clase M_i. De otro lado, $X_i^0 \cap S = \varnothing$ (donde $X^0 = X_i^0$) por

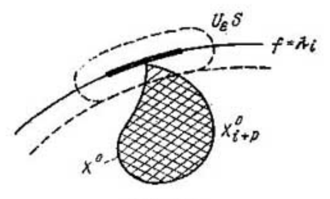


Fig. 91.

construcción de X^0. Esto contradice el lema 8, según el cual el conjunto X_i^0 debe contener por lo menos un punto crítico $x_i^0 \in S$ (o sea, en la superficie f_{λ_i}). La contradicción obtenida demuestra el lema.

Demostración del teorema fundamental.

Y bien, sea $f(x)$ una función suave en una variedad suave compacta M^n. Es necesario demostrar, que el número de puntos críticos distintos de la función f es no menor que cat (M^n). Consideremos la cadena de las clases: $\theta = M_0 = M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_N$, donde $N = \text{cat}(M^n)$. En principio, examinemos el caso, cuando $\lambda_0 = \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_N$, o sea, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$. Entonces, en virtud del lema 8, en cada nivel crítico de f_{λ_i}, $1 \leqslant i \leqslant N$, hay por lo menos un punto crítico de la función $f(x)$; por consiguiente, (ya que las superficies críticas f_{λ_i} son distintas para $1 \leqslant i \leqslant N$), el número de los puntos críticos es no menor que $N = \text{cat}(M^n)$. Así, para el supuesto $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant N)$, el teorema queda demostrado.

Ahora consideremos el caso general: sea que hay números coincidentes entre los $\{\lambda_i\}$; por ejemplo, $\lambda_i = \lambda_{i+p}$. ¿Cuántos puntos críticos (distintos) es posible escoger en la superficie $f_{\lambda_i} = f_{\lambda_{i+p}}$? Del lema 9 obtenemos que $\text{cat}_{M^n}(S) \geqslant p + 1$, donde S es el conjunto de puntos críticos en la superficie f_{λ_i}. Como $\text{cat}_{M^n}(S) \geqslant p + 1$, en S se puede escoger por lo menos $p + 1$ puntos distintos ($S = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{p+1} S_\alpha$, donde cada S_α se contrae por M^n en un punto; es suficiente escoger un punto en cada conjunto S_α). De manera que un valor «de una vez» de λ_j (o sea tal que $\lambda_{j-1} < \lambda_j < \lambda_{j+1}$) aporta

por lo menos un punto crítico, y cada valor «de $(p+1)$ veces» λ_i (o sea, $\lambda_{i-1} < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+p} < \lambda_{i+p+1}$) aporta por lo menos un $(p+1)$-ésimo punto crítico. Esto demuestra el teorema en un caso general.

Como se ve de la demostración, es justa una afirmación análoga también para los puntos bifurcacionales de la función suave f en M^n. Dejamos al lector los razonamientos en detalles.

Pasamos a considerar algunos ejemplos concretos. El primer problema que debe ser examinado, es el siguiente: si es o no la mejor la estimación arriba obtenida (en el caso general), es decir, si existen tales funciones f y tales variedades M^n, para las cuales el número de los puntos críticos es igual a la categoría cat (M^n). Los ejemplos más simples ya muestran, que existen tales pares (M^n, f).

PROPOSICIÓN 2. *Sea M^2 una variedad bidimensional suave compacta cerrada. Entonces la cat $(M^2) = 2$, si M^2 es homeomorfa a S^2, y la cat $(M^2) = 3$, si M^2 no es homeomorfa a una esfera.*

DEMOSTRACIÓN. Si M^2 es homeomorfa a la esfera, la afirmación es obvia. Sea ahora M^2 no homeomorfa a la esfera. Consideremos una partición celular de M^2 de la forma $\sigma^0 \cup (\bigcap_{\alpha=1}^{q} \sigma^1_\alpha) \cup \sigma^2$, o sea, a un ramo de circunferencias $\bigvee_{\alpha=1}^{q} S^1_\alpha$ está pegada una célula σ^2. Designemos por $U_\varepsilon(\bigvee_\alpha S^1_\alpha)$ a un ε-entorno bastante pequeño de un armazón unidimensional $\bigvee S^1_\alpha$ en la variedad M^2, y sea $\bar{D}^2 = M^2 \setminus U_\varepsilon(\bigvee S^1_\alpha)$ un disco cerrado (véase la fig. 92).

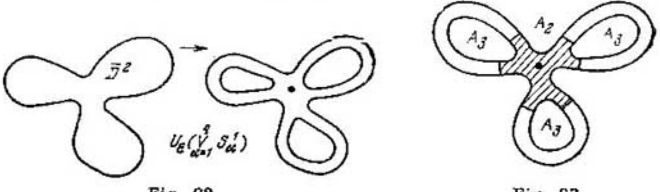


Fig. 92. Fig. 93.

Representemos M^2 en forma de reunión de tres subconjuntos cerrados: $M^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1 = D^2$ (se contrae por sí mismo en un punto), y los conjuntos A_2 y A_3 se muestran en la fig. 93. Aquí $A_2 = U_\varepsilon(\bigvee S^1_\alpha) \cap W_\eta(\sigma^0)$, donde $W_\eta(\sigma^0)$ es un disco de radio η con centro en el punto σ^0 (se supone bastante pequeño el número η); $A_3 = \overline{U_\varepsilon(\bigvee S^1_\alpha) \setminus A_2}$ (clausura).

Claro que A_2 se contrae por sí mismo en un punto, y A_3 se contrae por sí mismo en un juego de q puntos, y por eso se contrae en un punto según M^2. Así, la afirmación queda demostrada.

Es fácil verificar, que si cat $(M^2) = 2$, entonces M^2 es homeomorfa a la esfera.

Ahora, consideremos las funciones suaves f en M^2. Para la esfera S^2 la función estándar de altura tiene exactamente dos puntos críticos, lo que equivale a la categoría de la esfera. Si M^2 es no homeomorfa a la esfera, entonces, como fue mostrado más arriba, en M^2 hay una función suave f con tres puntos críticos, lo que equivale a la categoría cat (M^2). Así, hemos demostrado, que se obtiene una cota inferior, cat (M^n).

El cálculo de cat (M^n) es un problema no trivial; este invariante se somete con gran dificultad al cálculo exacto. Por lo común, el obtener estimaciones superiormente (por arriba) en cat (M^n) no es difícil para una variedad concreta M^n, es suficiente con presentar algún recubrimiento contractable concreto $M^n = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$. El problema más difícil es obtener estimaciones inferiores en cat (M^n). Ofrecemos un modo de estimación inferiormente (por abajo) de cat (M^n).

Consideremos el anillo de cohomologías $H^*(M^n; \mathbb{Z})$. Todas las siguientes construcciones se repiten literalmente para un anillo $H^*(M^n; \mathbb{Z}_p)$. El número k se llama «longitud cohomológica de la variedad M^n», si k es el máximo de todos los números p con la siguiente propiedad: existen los elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in H^*(M^n; \mathbb{Z})$ tales, que el producto $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ es distinto de cero en $H^*(M^n; \mathbb{Z})$. Comprendemos bajo el «producto» aquí una multiplicación ordinaria en el anillo de cohomologías.

PROPOSICIÓN 3. *Tiene lugar una desigualdad:* cat $(M^n) \geqslant k + 1$, *donde k es la longitud cohomológica de la variedad M^n.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $D: H^k(M^n; \mathbb{Z}) \to H_{n-k}(M^n; \mathbb{Z})$ dualidad de Poincaré, que establece isomorfismo entre los grupos indicados. Recordemos, que si $\alpha, \beta \in H^*(M^n; \mathbb{Z})$ son dos cociclos y $\alpha \cdot \beta$ es su producto en al anillo $H^*(M^n; \mathbb{Z})$, entonces $D(\alpha \cdot \beta) = D(\alpha) \cap \cap D(\beta)$, donde por $D(\alpha) \cap D(\beta)$ se designa la intersección de los ciclos $D(\alpha)$ y $D(\beta)$ (la operación de la intersección es dual a la multiplicación cohomológica). Para mayor evidencia, es posible imaginar, que los ciclos $\gamma_1 = D(\alpha)$ y $\gamma_2 = D(\beta)$ están realizados en M^n en forma de subvariedades (o subvariedades con singularidades); entonces el ciclo $\gamma_1 \cap \gamma_2$ se hace como una intersección de estas dos subvariedades (después de reducirlas a una posición general; véase la fig. 94). Consideremos un producto $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_k \neq 0$ de la longitud k en $H^*(M^n; \mathbb{Z})$ y sea $\gamma_i = D(\alpha_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Entonces $D(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_k) = \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \ldots \cap \gamma_k = \gamma$, donde el ciclo γ no es homológico a cero (recordemos, que D es un isomorfismo). Ahora supongamos, que cat $(M^n) \leqslant k$. Esto significa que existen tales

subconjuntos cerrados $A_1, \ldots, A_s$ $(s \leqslant k)$ en M^n, que $M^n = \bigcup_{i=1}^{s} A_i$ y cada A_i se contrae por M^n en un punto. Sin restricción de generalidad, es posible considerar, que $M^n = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, donde todos los A_i se contraen en un punto por M^n. Es suficiente en calidad de $A_{s+1}, \ldots, A_k$ (si $s < k$) tomar $(k - s)$ puntos arbitrarios en M^n. Luego, consideremos que $s = k$. A cada ciclo γ_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ le confrontemos

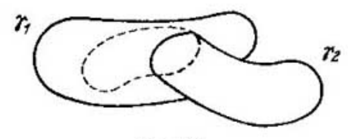


Fig. 94.

un subconjunto A_i. Ya que A_i se contrae en un punto por M^n, entonces $H_*(M; \mathbb{Z})$ se sumerge en $H_*(M, A_i; \mathbb{Z})$ (donde $* > 0$).

De aquí obtenemos, que cada ciclo γ_i es homológico al ciclo $\tilde{\gamma}_i \subset M \setminus A_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ (o sea, el ciclo γ_i se puede "quitar" del subconjunto $A_i \subset M$). Pero en tal caso $\bigcap_{i=1}^{k} \tilde{\gamma}_i$ por un lado es homológico a $\bigcap_{i=1}^{k} \gamma_i = \gamma$, por otro lado $\bigcap_{i=1}^{k} \tilde{\gamma}_i \subset \bigcap_{i=1}^{k} (M \setminus A_i) = M \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \varnothing$, ya que $M = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Esto significa, que γ es homológico a cero, lo que contradice las condiciones del teorema. La demostración está terminada.

Apliquemos la afirmación demostrada al problema de un cálculo concreto de cat (M^n). Así, por ejemplo, si una variedad bidimensional cerrada compacta M^2 no es homeomorfa a la esfera, entonces cat $(M^2) \geqslant 3$. La demostración sigue inmediatamente de la información ya conocida por nosotros sobre la construcción de $H^*(M^2; \mathbb{Z})$ y $H^*(M^2; \mathbb{Z}_2)$.

Demostremos, que cat $(\mathbb{R}P^n) = n + 1$. Obtendremos, al principio, una estimación superior: cat $(\mathbb{R}P^n) \leqslant n + 1$. Consideremos una descomposición estándar $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i'$, donde A_i' son discos n-dimensionales abiertos, definidos así: $A_i' = \{\lambda(x^1, \ldots, \ldots, x^i, \ldots, x^{n+1});\ x^i \neq 0$, donde $\{x^\alpha\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n + 1$, son coordenadas homogéneas en $\mathbb{R}P^n$ (véase [1], p. II, § 2). Como $\{A_i'\}$ es un recubrimiento abierto $\mathbb{R}P^n$, es posible inscribir en cada conjunto A_i' tal disco cerrado A_i, que su reunión será, como antes, un recubri-

miento $\mathbb{R}P^n$ (es suficiente disminuir un poco los discos A_i'). Como cada disco A_i se contrae por sí mismo en un punto, obtenemos la estimación buscada superior.

Ahora demostremos, que cat $(\mathbb{R}P^n) \geqslant n+1$. Para esto basta con demostrar, que la longitud cohomológica $\mathbb{R}P^n$ (con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$) es igual a n. Realmente, $H^* (\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 [x_1]/(x_1^{n+1})$, es decir, el anillo de cohomologías es isomorfo al anillo de polinomios truncados de la generatriz x_1 (el grado de x_1 es igual a 1); por (x_1^{n+1}) está designado el ideal, engendradopor el elemento x_1^{n+1}. De manera que el producto $x_1^n = x_1 \ldots x_n$ (n veces) es distinto de cero. Así, cat $(\mathbb{R}P^n) = n+1$.

Demostremos que cat $(T^n) = n+1$, donde T^n es un toro n-dimensional. Puesto que $H^* (T^n; \mathbb{Z}) = \wedge (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un álgebra exterior de las generatrices unidimensionales x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces el producto $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ es distinto de cero y, por consiguiente, cat $(T^n) \geqslant n+1$. Demostremos que cat $(T^n) \leqslant n+1$. Como $T^n = S^1 \times T^{n-1}$, entonces T^n se puede presentar en forma $T^n = (S^1 \vee T^{n-1}) \cup \sigma^n$. Afirmación general: cat $(X \vee S^n) =$ $=$ cat (X), si cat $(X) \geqslant 2$, donde $X \vee S^n$ es un «ramo» de la esfera S^n y un complejo celular linealmente conexo arbitrario X. Efectivamente, sean cat $(X) = k$ y $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, donde cada A_i se contrae por X en un punto. Sea $x_0 \in X$ un punto, en el cual está hecha la pegadura del ramo: $X \underset{x_0}{\vee} S^n$.

Representemos S^n en forma de la reunión de dos discos cerrados: $S^n = D_1^n \cup D_2^n$, donde $x_0 \in D_1^n$; $x_0 \notin D_2^n$. Consideremos un A_{i_0} tal,

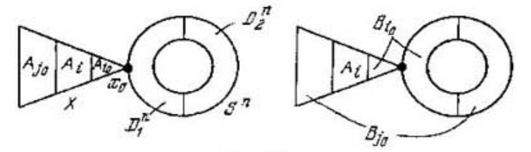


Fig. 95.

que $x_0 \in A_{i_0}$; hacemos $B_\alpha = A_\alpha$, donde $\alpha \neq i_0$ y $\alpha \neq j_0$, donde j_0 es cualquier índice fijado, distinto de i_0: $B_{i_0} = A_{i_0} \cup D_1^n$; $B_{j_0} = A_{j_0} \cup D_2^n$. Notemos, que $A_{j_0} \cap D_2^n = \varnothing$ (véase la fig. 95).

De este modo, $X \vee S^n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$, donde cada B_i se contrae por $X \vee S^n$ en un punto. Así: cat $(X \vee S^n) =$ cat (X). Como un ejercicio elemental dejamos al lector la demostración de la siguiente afirmación más general: cat $(X \vee Y) = \max$ (cat X, cat Y), donde X e Y son espacios linealmente conexos arbitrarios. La fórmula

$\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}(X)$ (si $\text{cat}(X) \geqslant 2$) es un caso particular de esta afirmación. Volviendo al cálculo de $\text{cat}(T^n)$, obtenemos: $\text{cat}(T^n) = \text{cat}((T^{n-1} \vee S^1) \cup \sigma^n) \leqslant \text{cat}(T^{n-1} \vee S^1) + 1$. Puesto que $\text{cat}(T^{n-1}) \vee S^1) = \text{cat}(T^{n-1})$, y como $\text{cat}(T^2) = 3$, entonces, por inducción, obtenemos: $\text{cat}(T^{n+1}) \leqslant n + 1$, lo que se quería demostrar.

Sea $p\colon E \to B$ un espacio fibrado con una fibra F en sentido de Serre, o sea, se cumple el axioma sobre la existencia de una homotopía cubriente.

PROPOSICIÓN 4. *Tiene lugar la desigualdad*: $\text{cat}(E) \leqslant \text{cat}_E(F) \times \times \text{cat}(B)$, *donde* $F \subset E$ *es una fibra del espacio fibrado* $p\colon E \to B$.

DEMOSTRACIÓN. La afirmación necesaria la obtenemos como un caso particular de una afirmación general: sean: $Y \subset B$, un subconjunto cerrado en la base B; $p^{-1}(Y) \subset E$, su preimagen completa en E; entonces se cumple la desigualdad: $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leqslant \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(Y)$. Claro que al suponer $B = Y$, obtenemos la afirmación buscada.

Consideremos en principio el caso, cuando $\text{cat}_B(Y) = 1$. Hay que verificar la desigualdad $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leqslant \text{cat}_E(F)$. Contrayendo Y por base B en un punto, podemos (por axioma sobre la homotopía cubriente) cubrir esta deformación con una deformación del subconjunto $p^{-1}(Y)$ por E en la fibra F. En virtud del lema 4, $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leqslant \text{cat}_E(F)$, lo que se requería.

Ahora consideremos un caso general: sea $\text{cat}_B(Y) = k$. Entonces $Y = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, donde cada A_i se contrae por B en un punto. Supongamos $\widetilde{Y} = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$; $A = A_k$; entonces $Y = \widetilde{Y} \cup A$, donde $\text{cat}_B(\widetilde{Y}) \leqslant \leqslant k-1$, $\text{cat}_B(A) = 1$. Es necesario verificar la desigualdad: $\text{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y} \cup A)) \leqslant \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(\widetilde{Y} \cup A)$. Tenemos:

$$\text{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y} \cup A)) = \text{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y}) \cup p^{-1}(A)) \leqslant$$
$$\leqslant \text{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) + \text{cat}_E(p^{-1}(A)).$$

La desigualdad buscada se deducirá de la siguiente desigualdad:

$$\text{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) + \text{cat}_E(p^{-1}(A)) \leqslant \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(\widetilde{Y} \cup A) = k \cdot \text{cat}_E(F).$$

Ya que $\text{cat}_E(p^{-1}(A)) \leqslant \text{cat}_E(F)$ (A se contrae por B en un punto), entonces, basta con demostrar una desigualdad más fuerte $\text{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) + \text{cat}_E(F) \leqslant \text{cat}_E(F) \cdot k$, o sea, $\text{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) \leqslant \leqslant \text{cat}_E(F) \cdot (k-1)$. A su vez, esta desigualdad se deduce de una desigualdad aún más fuerte: $\text{cat}_E \times (p^{-1}(\widetilde{Y})) \leqslant \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(\widetilde{Y})$, ya que $\text{cat}_B(\widetilde{Y}) \leqslant k-1$. Pero la última desigualdad se puede con-

siderarla cumplida en virtud de la suposición de la inducción, donde la inducción se realiza por $\operatorname{cat}_B(Y)$ (el primer paso de la inducción $\operatorname{cat}_B(Y) = 1$ fue examinado anteriormente). La afirmación está demostrada.

Hay espacios fibrados $p: E \xrightarrow{F} B$, para los cuales la desigualdad $\operatorname{cat}(E) \leqslant \operatorname{cat}_E(F) \cdot \operatorname{cat}(B)$ se transforma en una igualdad. Por ejemplo, consideremos un espacio fibrado de Hopf: $p: S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$; entonces, $2 = 1 \cdot 2$, donde $\operatorname{cat}(S^3) = 2$, $\operatorname{cat}(S^2) = 2$, $\operatorname{cat}_{S^3}(S^1) = 1$ (ya que la fibra S^1 se contrae por S^3 en un punto).

§ 20. Variedades críticas y desigualdades de Morse. Funciones con simetría

Un caso importante de los puntos críticos de las funciones suaves f en la variedad M^n son las llamadas «variedades críticas no degeneradas». Esto significa lo siguiente: a) la ecuación $\operatorname{grad} f = 0$ debe dar un juego de las subvariedades suaves $W_k \subset M^n$ de dimensiones α_k; b) es necesario complementariamente, que la diferencial d^2f en cualquier punto de la subvariedad W_k sea forma cuadrática de rango $n - \alpha_k$, es decir, la forma d^2f debe ser no degenerada en un espacio lineal de vectores, normales a W_k en M^n en alguna métrica de Riemann (positiva).

Naturalmente, las funciones de tal tipo surgen en caso en que en la variedad actúa un grupo de Lie y la función es invariante respecto a las transformaciones del grupo. Otro ejemplo lo dan las funciones f obtenidas de las variedades de menores dimensiones con la aplicación $M^n \xrightarrow{\psi} M^{n-q}$, como las funciones de tipo $f(x) = g(\psi(x))$ para las funciones de Morse $g(x)$ en la variedad M^{n-q}, si el rango $\varphi = n - q$.

DEFINICIÓN 1. Se llama *índice de la variedad crítica conexa* W_k un número λ de los cuadrados negativos de la forma d^2f (que no depende de un punto de W_k en virtud de la no degeneración de la forma d^2f en un plano normal).

Lo mismo como en el § 16 de este capítulo, los invariantes principales de una variedad crítica (suponiendo, que en el mismo nivel se encuentra sólo una variedad crítica conexa) son números de Betti locales: rangos de homologías relativas

$$b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j) = \text{rango } H_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j),$$

donde M_a es un dominio de menores valores $f(x) \leqslant a$; W_j es una variedad crítica en el nivel $f(x) = a_j$. Como en el § 16 tenemos

$$b_k(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) = b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j).$$

si en un intervalo de valores $[a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$ no hay otros puntos críticos salvo W_j. Las desigualdades de tipo de Morse ya fueron deducidas en el § 16:

$$\sum_j b_k(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) \geqslant b_k(M^n).$$

En caso de las variedades críticas no degeneradas estas desigualdades se hacen efectivas, si es conocida la topología de las mismas variedades críticas W_j y sus índices λ_j.

TEOREMA 1 a) Tiene lugar la igualdad

$$b_k(W_j) = b_{k+\lambda_j}(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) \tag{1}$$

(se toman los números de Betti por módulo 2).

b) *Si la variedad M^n es orientable y la variedad crítica W_j es simplemente conexa, entonces la igualdad* (1) *es justa para los números de Betti con coeficientes reales* $\mathbb{R}$.

Para demostrar el teorema, hay que imaginarse más exactamente el cuadro topológico correspondiente a una variedad crítica $W_j \subset M^n$. Un ε-entorno bastante pequeño de la variedad W_j designada por $U(W_j)$, es difeomorfo a un espacio fibrado normal (véase [1], p. II, § 7) sobre

$$U(W_j) \xrightarrow{p} W_j$$

con una fibra, el disco $D^{n-\alpha_j}$ (de radio ε). En cada fibra, del plano normal $R_x^{n-\alpha_j}$ respecto a cualquier punto $x \in W_j$, la forma cuadrática d^2f tiene un subespacio positivo R_x^+ de dimensión a y negativo R_x^- de dimensión b, donde $b = \lambda_j$ y $a + b = n - \alpha_j$. Tenemos descomposiciones de un espacio fibrado normal respecto a W_j en la suma directa

$$R_x^{n-\alpha_j} = R_x^+ \oplus R_x^-, \qquad b = \lambda_j - \dim R_x^-.$$

A la unión de los dominios de radio ε alrededor del cero, en cada fibra de un espacio fibrado con fibra R_x^-, la designemos por $U^-(W_j)$, y en un espacio fibrado con fibra R_x^+, por $U^+(W_j)$. Tenemos una inmersión (encaje) natural

$$U^-(W_j) \subset U^+(W_j) \subset M^n.$$

La restricción de la función f en $U^-(W_j)$ tiene el máximo en misma $W_j \subset U^-(W_j)$ sumergida como una sección nula (0 en cada fibra R_x^-). En forma completamente análoga al teorema del § 15 de este capítulo se demuestra el siguiente lema.

LEMA 1. *Para un pequeño $\delta > 0$, una variedad $M_{a_j+\delta}$ se contrae a un complejo $M_{a_j-\delta} \cup_\varphi U^-(W_j)$, suponiendo que en los niveles*

$[a_j - \delta, a_j + \delta]$ *no haya otros puntos críticos salvo* W_j. *La pegadura se realiza por la aplicación* $\varphi : \partial U^- (W_j) \to M_{a_j - \delta}$.

La demostración del lema repite el razonamiento del § 15. En vez de pegar una célula σ^{λ_j} en un punto crítico no degenerado aislado x_j de índice λ_j, aquí se pega toda una variedad $U^- (W_j)$ que representa, por definición, una familia α_j — paramétrica (el parámetro es un punto de W_j) de las células σ^{λ_j}, donde λ_j es un índice de la variedad crítica W_j. El lema 1 del § 15 sobre la posibilidad de la reducción exacta (localmente) de la función f a una forma cuadrática no es importante para los resultados del § 15. Es más importante el hecho que, en virtud de la regularidad de la forma $d^2 f$, la topología de las superficies de nivel de la función f cerca del punto crítico se define por la forma $d^2 f$, lo que es evidente. En el caso dado la no degeneración de la forma $d^2 f$ en todos los planos normales respecto a W_j asegura todas las propiedades topológicas de los niveles de la función en el dominio $U (W_j)$ de una manera completamente análoga.

La frontera $\partial U^- (W_j)$ se representa como un espacio fibrado con fibra-esfera $S^{\lambda_j - 1}$. Esto es una familia de fronteras de células σ^{λ_j}, que depende de un parámetro que pasa por todos los puntos de W_j. Los espacios fibrados U^- y ∂U^- con las fibras D^{λ_j} y $S^{\lambda_j - 1}$ pueden ser no triviales. Si la base de W_j es simplemente conexa, estos espacios fibrados son orientables (y la misma W_j es orientable, por ser simplemente conexa). Precisamente esto será utilizado en la demostración del punto b).

OBSERVACIÓN. De hecho es posible en la formulación del teorema cambiar la condición del punto b) por la condición de orientabilidad de W_j y $U^- (W_j)$.

Demostremos la siguiente afirmación.

LEMA 2. *Sea* $U^- (W_j)$ *un espacio fibrado con fibra* D^{λ_j} *y base* W_j. *Para las homologías relativas* $(U^-, \partial U^-)$ *tienen lugar las igualdades*

$$H^{\lambda_j + q} (U^-, \partial U^-) = H^q (W_j),$$
$$H_{\lambda_j + q} (U^-, \partial U^-) = H_q (W_j). \qquad (2)$$

Si U^- y W_j *son orientables, la igualdad* (2) *se cumple también para* $G = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos los siguientes homomorfismos de la dualidad de Poincaré (véase el § 18):

1) $D_U : H^q (U^-) \cong H_{\alpha_j + \lambda_j - q} (U^-, \partial U^-)$ (véase el problema 4).

2) $D_W : H_q (W_j) \cong H^{\alpha_j - q} (W_j)$ (véase el teorema 18.1) (la dimensión de W_j es α_j, la dimensión de U^- es $\alpha_j + \lambda_j$). Consideremos la superposición $D_U D_W$. Obtenemos el isomorfismo:

$$D_U D_W : H_q (W_j) \cong H_{\lambda_j + q} (U^-, \partial U^-)$$

El lema queda demostrado, teniendo en cuenta el isomorfismo $H_*(U^-) \cong H_*(W_j)$.

Del teorema 4 del § 5 obtenemos («teorema de factorización» o de «corte»):

$$H_*(M_{a_j-\delta} \bigcup_{\varphi} U^-,\ M_{a_j-\delta}) = H_*(U^-,\ \partial U^-).$$

Puesto que $H_*(M_{a_j+\delta},\ M_{a_j-\delta}) = H_*(U^-,\ \partial U^-)$, obtenemos de los lemas también la demostración del teorema.

EJEMPLO 1. Sea dada una superficie de la torsión M^2 en $\mathbb{R}^3$ alrededor del eje z, y sea f una función de altura (coordenada z en M^2). Las variedades críticas W_j son circunferencias S^1, donde $\alpha_j = 1$. El número λ_j es ora 0 (mínimo local), ora 1 (máximo local). Pueden ser tales puntos críticos aislados (mínimos o máximos locales), si se encuentran en el mismo eje z.

EJEMPLO 2. Consideremos espacios fibrados cuya base es la esfera S^n de forma (véase [1], p. II, § 24):

1) $SO(n+1) \xrightarrow{p} S^n$ (fibra $SO(n)$);

2) $U(n) \xrightarrow{p} S^{2n-1}$ (fibra $U(n-1)$);

3) $Sp(n) \xrightarrow{p} S^{4n-1}$ (fibra $Sp(n-1)$).

Tomemos la función $g(x)$ con un mínimo x_0 y un máximo x_1 en las esferas S^n, S^{2n-1}, S^{4n-1}. En los espacios fibrados 1), 2), 3) surge la función

$$f(x) = g(p(x)).$$

Tendremos dos variedades críticas para f de forma $W_0 = p^{-1}(x_0)$ y $W_1 = p^{-1}(x_1)$, de índices $\lambda_1 = n$ (ó $2n-1$, $4n-1$, respectivamente) y $\lambda_0 = 0$ (máximo). Del teorema 1 obtenemos:

$$\begin{aligned} b_j(SO(n+1)) &\leqslant b_{j-n}(SO(n)) + b_j(SO(n)); \\ b_j(U(n)) &\leqslant b_{j-(2n-1)}(U(n-1)) + b_j(U(n-1)); \\ b_j(Sp(n)) &\leqslant b_{j-(4n-1)}(Sp(n-1)) + b_j(Sp(n-1)). \end{aligned} \tag{3}$$

Verificar que aquí todo es orientable (véanse las observaciones para la demostración del teorema, más arriba), y que las desigualdades (3) son utilizables no sólo para $G = \mathbb{Z}_2$, sino que también para $G = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 1. Demostrar, que las desigualdades (3) son igualdades para $j < n$ para $SO(n+1)$, $j < 2n-1$ para $U(n)$ y $j < 4n-1$ para $Sp(n)$.

De los resultados más exactos del § 7 se deduce que para U y Sp las desigualdades (3) son igualdades para todos los j. Un problema más difícil: las desigualdades (3) son igualdades para SO con $G = \mathbb{Z}_2$ (siempre) y con $G = \mathbb{R}$ (para n impares).

EJEMPLO 3. Consideremos un espacio homogéneo de Riemann M^n con un grupo de movimiento D, donde $M^n = D/H$, y H es un subgrupo estacionario del punto $x_0 \in M^n$, $Hx_0 = x_0$.

Examinemos la función $f(x) = \rho^2(x, x_0)$, donde $\rho(x, x_0)$ es la distancia de Riemann del punto x al punto x_0. Es evidente que la función $f(x)$ es invariante respecto al grupo H: $f(Hx) = f(x)$.

PROBLEMA 2. Estudiar las variedades críticas de la función $f(x) = \rho^2(x, 1)$ para $M^n = SO(n)$ o $U(n)$, $Sp(n)$. Aquí el grupo $D = SO(n) \cdot SO(n)$ para una métrica invariante bilateral ρ.

$$D\colon\ x \to g_1 x g_2^{-1}, \quad (g_1, g_2) \in D.$$

La función $f(x)$ es invariante respecto a las transformaciones del subgrupo $H = SO(n) = (g, g) \subset D$, ya que con $x_0 = 1$ tenemos $gx_0 g^{-1} = x_0$. De manera que la función $\rho^2(x, 1) = f(x)$ es invariante respecto a los automorfismos interiores $f(gxg^{-1}) = f(x)$.

EJEMPLO 4. Sean Q un grupo de Lie y $T: Q \to GL(n, \mathbb{R})$ su representación matricial. El carácter tiene la forma $f(x) = \chi_T(x) = Sp(Tx)$, $x \in Q$.

El carácter $\chi_T(x) = f(x)$ da otro ejemplo de función invariante respecto a los automorfismos interiores $f(gxg^{-1}) = f(x)$.

PROBLEMA 3. Estudiar las variedades críticas de la función $f(x)$ para $Q = SO(n)$ o $U(n)$, $Sp(n)$ y sus representaciones irreducibles. Considerar los casos $Q = SO(3)$, $SO(4)$, $SU(3)$. Para el grupo $SO(2)$ todas las representaciones irreducibles reales no triviales son bidimensionales y tienen la forma

$$T_n(\varphi) = \left\| \begin{matrix} \cos(n\varphi), & \operatorname{sen}(n\varphi) \\ -\operatorname{sen}(n\varphi), & \cos(n\varphi) \end{matrix} \right\|,$$

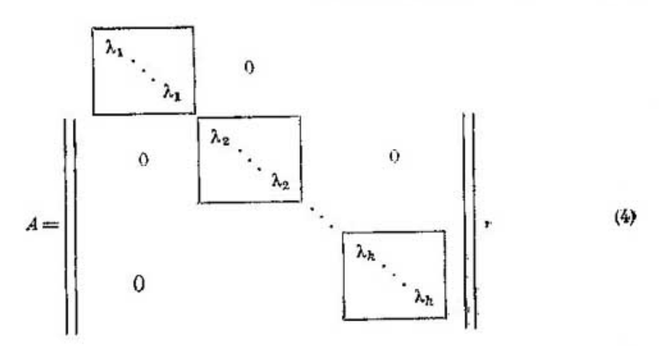
$$f_n(\varphi) = \chi_T(\varphi) = 2\cos(n\varphi).$$

Considerando los problemas de los ejemplos 3 y 4, es útil, comprender en principio, qué órbitas tiene el grupo de automorfismos interiores para $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$. Para los grupos $SU(2) = Sp(1)$ y el grupo $SO(3)$, el asunto es simple.

PROBLEMA 4. Demostrar que todas las órbitas del grupo de automorfismos interiores son S^2, salvo el centro (el centro es igual a 1 para $SO(3)$ e igual a $(1, -1)$ para $SU(2) = Sp(1)$). La órbita del punto central es de un punto.

Para el grupo $U(n)$ puede ser diagonalizada cada matriz $A \in U(n)$ mediante un automorfismo interior $A \to gAg^{-1}$ para $g \in U(n)$. Para las matrices diagonales todo depende, evidentemente, del número de distintos valores propios coincidentes.

Sea descompuesta la matriz en bloques de forma donde $\lambda_j = \exp(2\pi i \varphi_j)$ y λ_j se encuentra l_j veces, $l_2 + \ldots + l_k = n$.



PROBLEMA 5. Demostrar que la órbita gAg^{-1} de la matriz A de forma (4) es así: $U(n)/U(l_1)\times\ldots\times U(l_h)$.

Obtenemos la órbita de la posición general, cuando todos los números propios son distintos $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\ldots\neq\lambda_h$. En este caso $U(l_j)=U(1)=S^1$, y la órbita es de forma

$$U(n)/U(1)\times\ldots\times(U(1)=U(n)/T^n.$$

De manera que en estos ejemplos tenemos funciones con la simetría continua, el grupo Q de transformaciones $M^n\to M^n$, que deja la función f invariable: $f(gx)=f(x)$. Distintas órbitas del grupo son no difeomorfas entre sí, por eso el espacio cociente $M\xrightarrow{p}M/Q$ no es una variedad. Aunque la función $f(x)$ se obtenga como $f(x)=\varphi(px)$ de alguna función φ en M/Q, no es posible utilizar las desigualdades de tipo de Morse en M/Q, ya que este espacio no es una variedad.

EJEMPLO 5. Una clase interesante de los ejemplos de este género con el grupo discreto Q, la obtenemos de los llamados grupos cristalográficos (véase [1], p. I, § 20). Sea K cierto subgrupo discreto de una parte conexa del grupo de movimientos G_n de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ (grupo cristalográfico para $n=3$). Según el teorema conocido (véase [1], p. I, § 20), en el grupo K hay un divisor normal N de índice finito, compuesto de translaciones. El grupo G_n es un producto semidirecto de $SO(n)$ por $\mathbb{R}^n$, además, las translaciones $\mathbb{R}^n\subset G_n$ son un divisor normal, y $SO(n)=G_n/\mathbb{R}^n$ (véase [1], p. I, § 4). Un subgrupo discreto $K\subset G_n$ y su divisor normal $N\subset\mathbb{R}^n$, donde $N=K\cap\mathbb{R}^n$, definen un grupo cociente finito $D_h=K/N$, que representa todas las torsiones en torno a distintos puntos de $\mathbb{R}^n$, existentes en K. Tenemos una variedad compacta, el toro $T^n=\mathbb{R}^n/N$ (N es un grupo abeliano libre, de rango n), y la acción de un grupo finito D_k en el toro T^n: $g(x)=gxg^{-1}$ (mod N) para $g\in K$.

A cualquier función f en $\mathbb{R}^n$, invariante respecto al grupo cristalográfico $K \subset G_n$, le corresponde (la misma) función, considerada en el toro $T^n = \mathbb{R}^n / N$, designada por $f(y)$, $y \in T^n$. Con esto, la función $f(y)$ en el toro T^n es invariante respecto a las transformaciones del grupo finito D_k. Llegamos al siguiente problema: se tienen un espacio de Riemann compacto M^n, un grupo finito de movimientos $D: M^n \to M^n$ y una función de Morse $f(x)$ en M^n, invariante respecto al grupo D. ¿Cómo es posible precisar las desigualdades de Morse para la situación dada?

LEMA 3. *Sea $W_d \subset M^n$ una subvariedad en M^n compuesta de un componente conexo entero de conjunto de todos los puntos inmóviles del elemento $d \in D$, $d \neq 1$. Restringimos la función f en W_d. Si el punto $x_0 \in W_d$ es crítico para f en W_d, entonces el mismo punto es crítico también para f en todo M^n.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $\xi(x) = \operatorname{grad} f(x)$ como un vector en M^n, utilizando la métrica. De la invariación de la métrica respecto a los movimientos del grupo D, se deduce que la transformación $d \in D$ pasa el vector $\xi(x) = \operatorname{grad} f(x)$ al vector $\operatorname{grad} f(dx)$: $\xi(x) \to \xi(dx)$. Si $x \in W_d$, entonces $x = dx$. Descomponemos el vector $\xi(x)$ en la suma $\xi_1 + \xi_2 = \xi$, donde ξ_1 es tangente a W_d y ξ_2 es normal a W_d. Es evidente que d: $\xi_1 \to \xi_1$. Por el contrario, $d(\xi_2) \neq \xi_2$, si $\xi_2 \neq 0$. De otro modo, la variedad W_d no agotaría todo el componente del conjunto de puntos inmóviles del elemento $d \in D$, ella se dilataría en dirección del vector ξ_2. Por eso el vector $\xi(x) = \xi_1(x) = \operatorname{grad} f(x)$ es tangente a W_d. El lema queda demostrado.

La precisión de las desigualdades de Morse al examinar la variedad concreta (M^n, D) y la función f, exige conocimientos de las variedades inmóviles de los elementos $d \in D$, de las interrelaciones de estas variedades para distintos d y de un homomorfismo de inmersión de sus homologías en M^n. En particular, si x_0 es un punto inmóvil aislado del elemento $d \in D$, entonces el punto x_0 es un punto crítico de la función $f(x)$ en M^n.

Examinando un elemento $d \in D$, $d \neq 1$, tenemos una variedad inmóvil W_d. En virtud de las desigualdades de Morse para W_d, tenemos para $f_{W_d} = f/W_d$:

$$\sum \mu_k (f_{Wd}) \geqslant \sum b_k(W_d)$$

Notemos que los índices del punto crítico en W_d y en M^n pueden no coincidir. Hasta un grupo cíclico D de orden m con una generatriz d, las desigualdades de Morse pueden ser mejoradas, si se conocen las inmersiones (encajes)

$$W_d \subset W_{d^2} \subset \ldots \subset M^n = W_{d^m}, \quad d^m = 1.$$

Un ejemplo singular obtendremos en el caso en que $D = \mathbb{Z}_2$, y la variedad inmóvil W_d del elemento $d \neq 1$ tiene dimensión $n - 1$

y divide la variedad M^n en dos partes difeomorfas, $M^n = M_1 \cup M_2$ donde $\partial M_1 = \partial M_2 = W_d$. La acción del elemento d es la siguiente:

$$d\colon M_1 \to M_2,$$
$$d\colon M_2 \to M_1, \quad d/\partial M_1 = d/\partial M_2 = 1.$$

Consideremos la sucesión exacta del par (M, W):

$$\xrightarrow{j_*} H_{q+1}(M, W) \xrightarrow{\partial} H_q(W) \xrightarrow{i_*} H_q(M_1) \xrightarrow{j_*} H_q(M_1, W) \xrightarrow{\partial}.$$

Definimos los números

$$\bar{b}_k(M_1, W) = b_k(M_2) + \text{rango } (H_k(M_1, W)/\text{Im } j_*).$$

PROBLEMA 6. Demostrar que el número de los puntos críticos de la función f de índice k en M_1 (incluyendo W) no es menor que $\bar{b}_k(M_1, W)$.

§ 21. Puntos críticos de las funcionales y topología del espacio de las curvas ΩM

Una teoría natural análoga a la teoría de Morse y de Lusternik — Shnirelman surge en las variedades suaves de dimensión infinita M^∞. Por ejemplo, una de tales «variedades» es el espacio de las curvas suaves a trozos $\Omega(M, p, q)$, que van del punto p al punto q en una variedad M de dimensión finita. Es posible examinar en la variedad M^∞ una función $F(\gamma)$, donde $\gamma \in M^\infty$. A tales funciones se las llaman habitualmente funcionales. La noción de «punto crítico» γ_0 para $F(\gamma)$ es natural, pero el «índice del punto crítico» necesita de argumentación.

Aquí no vamos a estudiar la teoría de variedades de dimensión infinita y nos limitamos a un espacio de curvas $\Omega(p, q, M)$ del punto p al punto q.

Sean: $p, q \in M$, dos puntos dados: $\gamma\colon [0, 1] \to M$, una curva (camino) suave a trozos, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, o sea, hay una subpartición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ del segmento $[0, 1]$ tal, que $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ es una aplicación suave, pero en total γ es continuo. Al conjunto de tales curvas (caminos) lo designemos por $\Omega(M, p, q)$. La suavidad a trozos (pero no la suavidad) de las trayectorias consideradas $\gamma(t)$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ resulta útil desde el punto de vista técnico para la demostración del teorema sobre la descomposición del espacio Ω en suma de «células», por analogía con lo que sucede en un caso de dimensión finita. Con cada punto $\gamma \in \Omega(M, p, q)$ relacionamos cierto espacio lineal de dimensión infinita $T_\gamma\Omega$, al cual es posible naturalmente imaginarse como un «espacio tangente» respecto a Ω en el «punto $\gamma \in \Omega$.»

DEFINICION 1. Denominaremos espacio tangente $T_\gamma\Omega$ respecto a Ω en el punto γ, al espacio lineal de todos los campos vectoriales suaves a trozos v a lo largo de la curva γ, para los cuales $v(0) = 0$, $v(1) = 0$.

Llamamos variación por parámetro u, $-\varepsilon \leqslant u \leqslant \varepsilon$, de la curva (camino) γ, que deja los puntos p y q inmóviles, a una aplicación de un segmento $\tilde{\alpha}: (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \Omega$ ($\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño) tal, que $\tilde{\alpha}(0) = \gamma$; hay una subpartición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, para la cual $\alpha(u, t)$ definido por la fórmula $\alpha(u, t) = \tilde{\alpha}(u)(t)$, en cada franja $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ es una aplicación suave en M (véase la fig. 96).

Puesto que con cada u ($-\varepsilon \leqslant u \leqslant \varepsilon$) fijado obtenemos una curva suave a trozos $\tilde{\alpha}(u)(t)$, entonces $\tilde{\alpha}$ se puede considerar como una

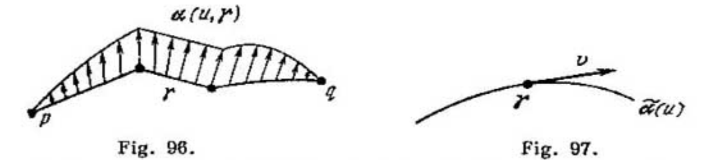


Fig. 96. Fig. 97.

trayectoria en el espacio Ω (véase la fig. 97). Por eso es posible examinar un vector de velocidad de la trayectoria $\tilde{\alpha}(u)$ en el punto $\gamma = \tilde{\alpha}(0)$. Por definición, tomamos $v = \frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial u}(0, t)$. El campo $v = v(t)$ es un campo vectorial suave a trozos a lo largo de $\gamma(t)$ y, por consiguiente (por definición del espacio tangente $T_\gamma\Omega$), pertenece a $T_\gamma\Omega$. Es fácil de verificar lo contrario: si es dado un campo arbitrario $v \in T_\gamma\Omega$ (o sea un campo $v(t)$ a lo largo de $\gamma(t)$), entonces siempre hay una trayectoria $\tilde{\alpha}(u) \in \Omega$ tal, que $\frac{\partial}{\partial u}\tilde{\alpha}(0, t) = v(t)$. En el cálculo de variaciones, el campo $v(t)$ se designa habitualmente por δ_γ.

Sea $F(\gamma)$ una función con valores reales en Ω. Examinemos la curva $\gamma \in \Omega$ y el campo $v = \delta_\gamma \in T_\gamma\Omega$. Consideremos la derivada $\frac{\partial}{\partial u} F(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0}$, suponiendo que exista tal derivada. En los ejemplos concretos de las funcionales $F(\gamma)$, con los cuales vamos a tratar, será evidente la existencia de la derivada. Notemos, que la definición de la derivada $\frac{\partial}{\partial u} F(\tilde{\alpha}(u))$ dada más arriba es copiada exactamente de la definición de «dimensión finita» de la derivada en dirección de una función suave en una variedad de dimensión finita. Siguiendo, esta analogía en adelante, definimos de la curva crítica (el camino crítico) para $F(\gamma)$. Diremos que la curva $\gamma_0 \in \Omega$ es crítica

para $F(\gamma)$, si $\frac{\partial}{\partial u} F(\tilde{\alpha}(u)) \mid_{u=0} \equiv 0$ para cualquier variación $\tilde{\alpha}(u)$ de la curva γ_0 (o la derivada variacional $\frac{\delta F}{\delta \gamma}$ es igual a cero).

Ahora nos interesarán las funcionales completamente concretas en Ω. Esto es la acción de la curva (del camino): $E(\gamma) = \int_0^1 \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 dt$ y la longitud de la curva (del camino): $L(\gamma) = \int_0^1 \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt$, ya estudiadas en el libro [1] (véase [1] p. I, cap. 5). Con esto, consideramos, que M es una variedad de Riemann. Entre las funcionales L y E existe la siguiente relación: $L^2 \leqslant E$, al mismo tiempo, la igualdad se obtiene si, y sólo si, $|\dot{\gamma}| \equiv \text{const}$, o sea si el parámetro t (en $\gamma(t)$) es proporcional a la longitud de arco (al parámetro natural).

Ahora recordemos algunos datos sobre las derivadas variacionales de las funcionales $L(\gamma)$ y $E(\gamma)$. Sean $\tilde{\alpha}(u)$ una variación de la curva γ; $v = v(t) = \frac{d\alpha}{du}(0, t)$ un campo vectorial δ_γ de la variación $\tilde{\alpha}(u)$ (a lo largo de $\dot{\gamma}(t)$); $\dot{\gamma}(t)$ es el vector de velocidad de la trayectoria $\gamma(t)$; $a(t) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\gamma)$ es el vector de aceleración de la trayectoria, $\Delta\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t^+) - \dot{\gamma}(t^-)$, es decir, el salto del vector de velocidad en el punto t. Es justo el siguiente teorema (fórmula de la primera variación) — véase [1], p. I, § 31.

TEOREMA 1. *Tiene lugar igualdad:*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} = -\sum_{(t)} \langle v(t), \Delta\dot{\gamma}(t)\rangle - \int_0^1 \langle v(t), a(t)\rangle\, dt,$$

donde $a(t)$ es la derivada variacional de la funcional; E es una función suave

En virtud de la suavidad a trozos de la curva $\gamma(t)$ tenemos: $\Delta\dot{\gamma}(t) = 0$ para todo t salvo un número finito de valores de t (puntos de discontinuidad de la derivada).

Como lo hemos notado anteriormente, de la fórmula de la primera variacion se deduce la siguiente afirmación.

TEOREMA 2. *$\gamma_0 \in \Omega$ es un punto crítico para la funcional $E(\gamma)$ si, y sólo si, γ_0 es una geodésica.*

En realidad, si $\gamma_0(t)$ es una geodésica, entonces $\Delta\dot{\gamma}(t) \equiv 0$, $a(t) \equiv 0$ o sea, $\frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$. Al contrario: sea $\frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$

para cualquier variación $\widetilde{\alpha}(u)$ de la curva (del camino) $\gamma_0(t)$. Consideremos un campo vectorial $v(t) = g(t)\cdot a(t)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$, donde la función $g(t) \geqslant 0$, además $g(t) = 0$ sólo en tales puntos $t_i \in [0, 1]$, donde $\Delta\dot{\gamma}(t_i) \neq 0$. Así:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{du}E(\widetilde{\alpha}(u))|_{u=0} = -\int_0 \langle a(t),\ a(t)\rangle g(t)\,dt,$$

o sea, $a(t) \equiv 0$ a lo largo de $\gamma_0(t)$. Puesto que $a(t) = \nabla_{\dot{\gamma}_0}(\dot{\gamma}_0)$, esto significa que cada segmento suave de la trayectoria $\gamma_0(t)$ es una geodésica. Ahora escogemos $\widetilde{\alpha}(u)$ de tal manera, que $v(t_i) = \Delta_{\dot{\gamma}}(t_i)$; entonces

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{du}E(\widetilde{\alpha}(u))|_{u=0} = -\sum_{(t_i)} \langle \Delta_{\dot{\gamma}}(t_i),\ \Delta_{\dot{\gamma}}(t_i)\rangle,$$

es decir, $\Delta_{\dot{\gamma}}(t_i) = 0$ para todo i, y por eso $\gamma_0(t)$ es una trayectoria suave (no tiene puntos de fractura). El teorema queda demostrado.

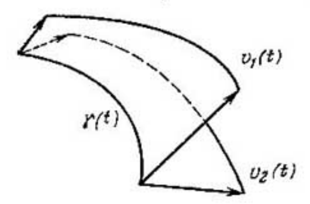


Fig. 98.

Ahora recordemos la fórmula de la segunda variación (véase [1], p. I, § 36) para la funcional E. Sean $v_1, v_2 \in T_\gamma\Omega$ dos campos vectoriales.

Consideremos una variación biparamétrica $\alpha\colon U \times [0, 1] \to M$, donde $U(u_1\ u_2)$ es un entorno abierto del punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2\ (u_1, u_2)$; $t \in [0, 1]$; $\alpha(0, 0, t) = \gamma(t)$; $\frac{\partial\alpha}{\partial u_1}(0, 0, t) = v_1(t)$; $\frac{\partial\alpha}{\partial u_2}(0, 0, t) = v_2(t)$. Es fácil verificar, que para cualquier par de campos v_1, $v_2 \in T_\gamma\Omega$ existe tal variación (véase la fig. 98).

Llamamos hessiano de la funcional E en un punto crítico $\gamma_0(t) \in \Omega$ a la expresión de forma:

$$d^2E(v_1, v_2) = \frac{\partial^2 E(\widetilde{\alpha}(u_1, u_2))}{\partial u_1\,\partial u_2}\Big|_{u_1=u_2=0}.$$

Aquí $\widetilde{\alpha}(u_1, u_2)(t) = \alpha(u_1, u_2, t)$. Es justa la siguiente fórmula de la segunda variación de la funcional E (véase [1], p. I, § 36).

TEOREMA 3. Sean: $\gamma_0 \in \Omega$, *una geodésica* (es decir, un punto *crítico para* $E(\gamma)$), y $\widetilde{\alpha}(u_1, u_2)$, *una variación biparamétrica de la curva (de camino)* γ_0; $v_i = \frac{\partial \widetilde{\alpha}}{\partial u_i}(0, 0)$, $i = 1, 2$. Entonces

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(\widetilde{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = -\sum_{(i)} \langle v_2(t_i), \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t_i))\rangle - \\ - \int_0^1 \langle v_2(t), \nabla_{\dot{\gamma}_0}\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t) + R(\dot{\gamma}_0, v_1)\dot{\gamma}_0\rangle\, dt,$$

donde $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t^+) - \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_2(t^-)$ *es un salto de la derivada* $\nabla_{\dot{\gamma}_0}(v_1(t)$ *en uno de sus puntos de discontinuidad; R es tensor de curvatura.*

Fue mostrado más arriba que las geodésicas $\gamma_0(t)$ no tienen puntos de fractura, y por eso es posible limitarse a las variaciones $\widetilde{\alpha}$, para las cuales $v_1(t)$ y $v_2(t)$ no tienen puntos de fractura. Entonces:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(\widetilde{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = -\int_0^1 \langle v_2, \nabla_{\dot{\gamma}_0}\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1 + R(\dot{\gamma}_0, v_1)\dot{\gamma}_0\rangle\, dt.$$

Recordemos que el campo vectorial $v(t)$ a lo largo de la geodésica γ_0 se llama de Jacobi, si satisface la ecuación diferencial de Jacobi: $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0$ (véase [1], p. I, § 36). Es conveniente escribir esta ecuación en coordenadas en la siguiente base: escojamos a lo largo de $\gamma_0(t)$ n campos vectoriales que son ortonormales (para cada t) y paralelos a lo largo de γ_0: $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ (o sea, $\nabla_{\dot{\gamma}_0 \alpha} e(t) \equiv 0$). Entonces, $v(t) = v^i e_i(t)$, y obtendremos:

$$\frac{d^2 v^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n} R^i_j(t) v^j(t) = 0, \text{ donde } R^i_j(t) = \langle R(\dot{\gamma}_0, e_j)\dot{\gamma}_0, e_i\rangle.$$

De manera que el campo de Jacobi (como solución de este sistema se determina unívocamente por los siguientes datos iniciales: $v(0)$, $\nabla_{\dot{\gamma}_0}(v(0) \in T_{\gamma_0}(0)(M^n)$. Ahora recordemos la definición de los puntos conjugados a lo largo de la geodésica $\gamma_0(t)$. Sea que para un par de puntos $A, B \in \gamma_0(t)$ exista un campo de Jacobi no nulo $v(t)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$ tal, que $v|_A = v|_B = 0$ (es decir, el campo $v(t)$ se anula en los puntos A y B). Entonces los puntos A y B se llaman

conjugados a lo largo de la geodésica γ_0. A la dimensión del espacio lineal de todos estos campos de Jacobi (a lo largo de γ_0) se la denomina multiplicidad de un par de puntos conjugados A y $B \in \gamma_0$ (a lo largo de γ_0).

Consideremos $d^2E(v_1, v_2)$; sea $W_{\gamma_0} \subset T_{\gamma_0}\Omega$ un subespacio lineal en $T_{\gamma_0}\Omega$, compuesto de todos aquellos campos vectoriales v_1 tales, que $d^2E(v_1, v_2) \equiv 0$ para cualquier $v_2 \in T_{\gamma_0}\Omega$. A veces al subespacio W_{γ_0} se lo denomina subespacio nulo del hessiano d^2E en el punto $\gamma_0 \in \Omega$, o núcleo del hessiano d^2E. Se llama grado de degeneración del hessiano d^2E, el dim W_{γ_0} (en el punto crítico $\gamma_0 \in \Omega$).

TEOREMA 4. *Sea γ_0 una geodésica en M del punto p al punto q; entonces, $v \in W_{\gamma_0}$ (es decir, pertenece al núcleo del hessiano d^2E) si, y sólo si, v es un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 (en particular, $v|_p = v|_q = 0$).*

De manera que el núcleo W_{γ_0} del hessiano d^2E es distinto de cero si, y sólo si, los extremos p y q de la geodésica γ_0 son conjugados a lo largo de γ_0. La dimensión del núcleo $W\gamma_0$ (o sea, el grado de degeneración del hessiano d^2E) es igual a la multiplicidad de los puntos p y q a lo largo de γ_0.

DEMOSTRACIÓN. Sea v un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 tal, que $v|_p = v|_q = 0$. Entonces, $v \in T_{\gamma_0}\Omega$. Puesto que γ_0 es una trayectoria suave, entonces $\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0} v(t)) = 0$ (no hay fracturas). Como $v(t)$ es un campo de Jacobi, entonces $(\nabla_{\dot\gamma_0})^2 v(t) + R(\dot\gamma_0, v)\dot\gamma_0 \equiv 0$ y, por consiguiente, de la fórmula de la segunda variación de la funcional E, obtenemos:

$$d^2E(v, \tilde{v}) = \sum_{(i)} \langle \tilde{v}(t), 0\rangle + \int_0^1 \langle \tilde{v}(t), 0\rangle\, dt \equiv 0.$$

Así, $v \in W_{\gamma_0}$ (al núcleo de d^2E). Por el contrario: sea $v \in W_{\gamma_0}$. Es necesario demostrar, que $v(t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma_0(t)$. Ya que el campo $v(t)$ es suave a trozos, entonces es posible partir el segmento $[0, 1]$ mediante un número finito de puntos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ en los intervalos (t_{i-1}, t_i), en los cuales el campo $v(t)$ es suave. Como antes construimos una función suave $f(t)$ en $[0, 1]$ igual a cero en los puntos $\{t_i, 0 \leqslant i \leqslant k\}$ y positiva en los restantes puntos. Consideremos el campo $q = f((\nabla_{\dot\gamma})^2 v + R(\dot\gamma_0, v)\dot\gamma_0)$. Sustituyéndolo en d^2E, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = d^2E(v, q) =$$

$$= -\sum_{(i)} \langle q, \Delta(\nabla_{\dot\gamma_0}, v)\rangle + \int_0^1 f \cdot |(\nabla_{\dot\gamma_0})^2 v + R(\dot\gamma_0, v)\dot\gamma_0|^2\, dt = 0.$$

Como $q(t_i)=0$, $0\leqslant i\leqslant k$, entonces el primer sumando es igual a cero, y en vista de que $f(t)>0$ para $t\neq t_i$, $0\leqslant i\leqslant k$, entonces $(\nabla_{\dot\gamma_0})^2 v + R(\dot\gamma_0, v)\dot\gamma_0 \equiv 0$ en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. De manera que v es un campo de Jacobi a lo largo de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Demostremos que v es un campo de Jacobi a lo largo de toda la trayectoria γ_0. Para eso es suficiente demostrar, que $\nabla_{\dot\gamma_0}(v)$ no tiene puntos de discontinuidad en el segmento $[0, 1]$. Realmente, supongamos lo contrario: sean $\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0} v)_{ti} = \nabla_{\dot\gamma_0} v(t_i^+) - \nabla_{\dot\gamma_0} v(t_i^-)$, saltos en los puntos t_i; entonces, es posible considerar un campo vectorial $g(t)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$ tal, que $g(t_i)=\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0} v)_{ti}$. Entonces obtenemos:

$$\frac{1}{2}\, d^2E(v, q) = \sum_{i=1}^{k-1} |\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0} v)_{t_i}|^2 + \int_0^1 \langle g, (\nabla_{\dot\gamma_0})^2 v + R(\dot\gamma_0, v)\dot\gamma_0\rangle\, dt = 0$$

en virtud de que $v\in \operatorname{Ker}(d^2E)$. El segundo sumando en esta suma es igual a cero (véase más arriba) y por eso $\Sigma\,|\Delta(\nabla_{\dot\lambda_0} v)_{ti}|^2 = 0$, o sea, $\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0} v)_{ti}=0$ para todo i. Así, $\nabla_{\dot\gamma_0} v$ no tiene puntos de discontinuidad y, por consiguiente, v es un campo de Jacobi a lo largo de toda la trayectoria γ_0.

OBSERVACIÓN. Siempre es finita la dimensión del núcleo del hessiano d^2E, puesto que ella es igual a un número de los campos de Jacobi linealmente independientes a lo largo de γ_0 (que se anulan en los puntos p y q).

Entre varias variaciones de las trayectorias γ_0 se destaca una clase de las llamadas variaciones geodésicas, o sea, de tales aplicaciones suaves $\alpha\colon(-\varepsilon, +\varepsilon)\times[0, 1]\to M$, con las cuales $\alpha(0, t) = \gamma_0(t)$ y cada trayectoria $\tilde\alpha(u)$ (recordemos, que $\tilde\alpha(u)(t) = \alpha(u, t)$) es una geodésica (o sea, en el proceso de perturbación de la geodésica γ las trayectorias perturbadas quedan geodésicas, como antes). Examinemos el «vector de velocidad» de tales trayectorias $\tilde\alpha$ en el espacio Ω, es decir, un campo vectorial $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$ a lo largo de γ_0. Afirmamos que esto es un campo de Jacobi a lo largo de γ_0.

Realmente, ya que todas las trayectorias $\tilde\alpha(u)$ son geodésicas, entonces $\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)=0$; por consiguiente, es igual a cero la siguiente expresión:

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}\left(\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\right) = \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\left(\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\right) + R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

Como $\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)=\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)$, entonces

$$\left(\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\right)^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)+R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\ \frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}=0,$$

o sea, el campo $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$ es de Jacobi.

Es justa la afirmación contraria: se puede obtener cualquier campo de Jacobi a lo largo de la geodésica γ_0 con ayuda de cierta variación geodésica. En efecto, supongamos, en principio, que la geodésica γ_0 une dos puntos bastante cercanos p' y q' que se encuentran en un disco $D^n\subset M^n$ de radio suficientemente pequeño $\varepsilon>0$. Entonces es posible considerar, que cualquier par de puntos α, $\beta\in D^n$ se une con la única geodésica contenida en el dominio D^n. Al principio demostremos la existencia de un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 (de p' y q'), que tiene en los puntos p' y q' valores dados arbitrarios (véase la fig. 99). Examinemos en los puntos p' y q' los vectores tangentes arbitrarios $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ respecto a M y vamos a construir un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 con los datos iniciales: $\boldsymbol{a}$ en el punto p' y $\boldsymbol{b}$ en el punto q'. Por el punto p' trazamos una curva suave $a(u)$ tal, que $\frac{da(0)}{du}=\boldsymbol{a}$; análogamente, por el punto q' trazamos una trayectoria $b(u)$ tal, que $\frac{db(0)}{du}=\boldsymbol{b}$. La familia buscada de las geodésicas la obtendremos uniendo por geodésicas los puntos $a(u)$ y $b(u)$ (esta geodésica es única). Reemplazando u, obtenemos una perturba-

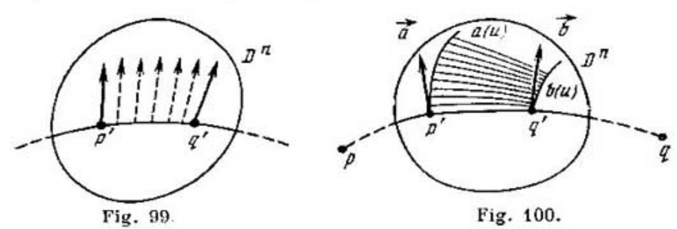


Fig. 99.

Fig. 100.

ción buscada de la geodésica γ_0 del punto p' al punto q' con valores iniciales dados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (véase la fig. 100). El campo de Jacobi buscado a lo largo de γ_0 desde p' hasta q' se obtiene mediante la diferenciación respecto al parámetro u de la variación geodésica arriba construida. Puesto que el campo de Jacobi se define unívocamente por sus valores en los puntos p' y q', entonces es posible obtener de manera indicada cualquier campo de Jacobi a lo largo de γ_0 desde el punto p' hasta el punto q'. Notemos que el espacio lineal de todos los campos de Jacobi a lo largo de γ_0, desde p' hasta q', es isomorfo a un espacio

lineal $(2n)$-dimensional: $T_{p'}(M^n) \times T_{q'}(M^n)$. En general evidentemente, es justa la afirmación más amplia: un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 desde el punto p hasta el punto q (donde p y q no son necesariamente cercanos) es definido unívocamente por dos valores suyos en dos puntos *no* conjugados (a lo largo de γ_0).

Ahora demostramos la existencia de una variación geodésica, que engendra un campo de Jacobi dado v ya en toda la geodésica γ_0 desde p hasta q. Consideremos para esto un par de puntos $p', q' \in \gamma_0$, que se encuentran dentro de una esfera bastante pequeña D^n, y demos en los puntos p' y q' los siguientes vectores: $\boldsymbol{a} = v \mid_{p'}$, $\boldsymbol{b} = v \mid_{q'}$. Luego, construyamos una variación geodésica que engendra un campo de Jacobi v a lo largo de γ_0 desde el punto p' hasta el punto q' (véase la construcción más arriba), y prolonguemos la familia construida de las geodésicas fuera de los límites del disco D^n, lo que da la variación geodésica buscada ya a lo largo de toda la geodésica γ_0.

Estudiamos la relación entre los puntos conjugados a lo largo de γ_0 y las propiedades del hessiano d^2E. Recordemos, que el índice λ del hessiano d^2E es una dimensión máxima de los subespacios en $T\gamma_0\Omega$, en los cuales la forma d^2E es definida negativamente. Tiene lugar la siguiente afirmación importante.

TEOREMA 5. *El índice de una forma cuadrática d^2E en un punto crítico $\gamma_0 \in \Omega$ es igual al número de los puntos en la geodésica $\gamma_0(t)$, $0 < t < 1$, conjugados a lo largo de $\gamma_0(t)$ a un punto inicial $p = \gamma_0(0)$ (cada punto $\gamma_0(t)$ conjugado con $\gamma_0(0) = p$, es tenido en cuenta tantas veces, como sea el número de su multiplicidad). El índice $\lambda = \lambda(\gamma_0)$ es finito siempre.*

OBSERVACIÓN. Si los puntos p y q no son conjugados a lo largo de γ_0, entonces es posible examinar toda la trayectoria $\gamma_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. En este caso $\operatorname{Ker}(d^2E) = 0$ y $\gamma_0 \in \Omega$ es un punto crítico no degenerado de índice λ.

En particular, se deduce del teorema que cada segmento de la geodésica γ_0 contiene sólo un número finito de puntos conjugados con el punto $p = \gamma_0(0)$.

Antes de pasar a la demostración formal del teorema, demos una explicación clara que muestra que los puntos conjugados definen tales variaciones $\tilde{\alpha}(u)$ en el espacio Ω, que a lo largo de ellas se disminuye una parte cuadrática de la funcional E. Consideremos que en la variedad M está dada una métrica de Riemann definida positivamente y que ∇ es una conexión de Riemann concordada con esta métrica.

Sea $x_0 \in \gamma_0$ un punto conjugado con $p = \gamma_0(0)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$. Entonces, a lo largo del segmento $[p, x_0]$ de la geodésica γ_0 existe $\lambda(x_0)$ campos de Jacobi ($\lambda(x_0) \geqslant 1$), que se anulan en los puntos p y x_0. (Estos campos, sin duda, pueden anularse también en

ciertos puntos interiores del segmento $[p, x_0]$.) Consideremos una variación geodésica $\tilde{\alpha}(u)$ del segmento $[p, x_0]$ en la dirección de algúm campo de Jacobi a lo largo de $[p, x_0]$ que se anula en p y x_0. Esto significa, que hay una «torsión» infinitamente pequeña de la geodésica $[p, x_0]$, que deja inmóviles los puntos p y x_0 (véase la fig. 101).

Examinemos las geodésicas $\tilde{\alpha}(u)(t)$, que definen esta variación geodésica, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, donde t_0 corresponde al punto $x_0 \in \gamma_0$. Entonces, es posible examinar la siguiente curva suave $\tilde{\varphi}(u)$ en el espacio

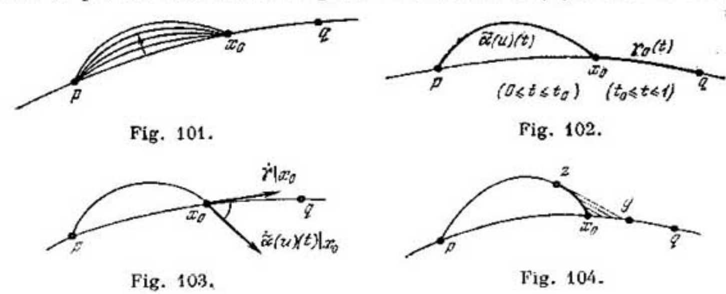


Fig. 101. Fig. 102.

Fig. 103. Fig. 104.

$\Omega : \tilde{\varphi}(u)(t) = \tilde{\alpha}(u)(t)$ con $0 \leqslant t \leqslant t_0$; $\tilde{\varphi}(u)(t) = \gamma_0(t)$ con $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant 1$ (véase la fig. 102).

En virtud de la elección de $\tilde{\varphi}(u)$ se puede considerar, en la primera aproximación, que la longitud de γ_0 desde p hasta q es igual a la longitud de $\tilde{\alpha}(u\ \ (t)$ desde p hasta x_0 más la longitud de γ_0 desde x_0 hasta q, o sea, se puede considerar, que la funcional E no cambia con un desplazamiento bastante pequeño a lo largo de la trayectoria $\tilde{\varphi}(u)$, $0 \leqslant u \leqslant \varepsilon$.

Puesto que el campo de Jacobi es definido completamente por sus datos iniciales, en el punto x_0 el ángulo entre los vectores de velocidades de la trayectoria γ_0 y la trayectoria $\tilde{\alpha}(u)(t)$ es distinto de cero (véase la fig. 103).

Ahora construimos la nueva trayectoria $\tilde{\psi}(u)$ en el espacio Ω, que sale del punto γ_0 a lo largo del cual una parte cuadrática de la funcional E decrecerá estrictamente, o sea, el vector de velocidad $\dot{\tilde{\psi}}(u)|_{u=0}$ pertenecerá a un subespacio, donde está definido negativamente el hessiano d^2E. La construcción de la variación $\tilde{\psi}(u)$ se muestra en la fig. 104.

Ya que en un triángulo suficientemente pequeño x_0 y z se cumple una desigualdad estricta: la longitud de (x_0, y) + la longitud de $(x_0, z) >$ longitud de (z, y), entonces, la longitud de la trayectoria $\widetilde{\psi}(u)(t)$ $(\widetilde{\psi} = (pz) + (zy) + (yq))$ estrictamente es menor de la longitud de $\varphi(u)(t)$, o sea, la longitud de γ_0 (desde p hasta q). Aquí utilizamos, claro está, la definidad positiva de la métrica de Riemann. Así, cada campo de Jacobi en el segmento px_0, que se anula en los puntos p y x_0, da un aporte unitario en el índice de hessiano d^2E en el punto γ_0.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Consideremos tal partición (bastante pequeña) del segmento $[0, 1]$ mediante los puntos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, para que cada segmento $[\gamma_0(t_{i-1}), \gamma_0(t_i)]$ de la geodésica γ_0 sea un segmento geodésico mínimo, que una los puntos $\gamma_0(t_{i-1})$ y $\gamma_0(t_i)$ en una esfera bastante pequeña que estos puntos los contiene.

Sea $T_{\gamma_0}\{t_i\} \subset T_{\gamma_0}$ un subespacio vectorial en T_{γ_0}, consistente en todos los campos vectoriales $v(t)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$ con las siguien-

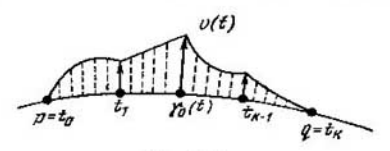


Fig. 105.

tes propiedades: a) el campo $v(t)$ es de Jacobi a lo largo de γ_0 en cada segmento $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leqslant i \leqslant k$; b) $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ (véase la fig. 105).

Con otras palabras, $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ es un espacio de todos los campos quebrados de Jacobi a lo largo de la trayectoria $\gamma_0(t)$ (los puntos de fractura son $\{t_i\}$). Junto con un subespacio $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ consideremos en $T_{\gamma_0}\Omega$ otro espacio más, Q_{γ_0} compuesto de todos los campos $v(t)$, para los cuales $v(t_i) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant k$.

LEMA. *Un espacio tangente $T_{\gamma_0}\Omega$ se descompone en la suma directa de sus dos subconjuntos: $T_{\gamma_0}\Omega = T_{\gamma_0}\{t_i\} \oplus Q_{\gamma_0}$.* al *mismo tiempo los subconjuntos $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ y Q_{γ_0} son ortogonales respecto a un producto escalar, que se da en $T_{\gamma_0}\Omega$* por el hessiano d^2E (o sea, $d^2E(v_1, v_2) = 0$, *si* $v_1 \in T_{\gamma_0}\{t_i\}$, $v_2 \in Q_{\gamma_0}$). Luego, está definida positivamente la restricción del hessiano *d^2E en el subespacio Q_{γ_0}*, es decir, el índice de d^2E en $T_{\gamma_0}\Omega$ es *igual al índice de d^2E en $T_{\gamma_0}\{t_i\}$*. Puesto que $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ *es un espacio lineal de dimensión finita, el índice del hessiano d^2E es siempre finito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in T_{\gamma_0}$; consideremos los vectores $v(t_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$; entonces hay, y es único, un campo de Jacobi quebrado v'

tal, que $v(t_i) = v'(t_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$; por consiguiente, $(v - v')(t_i) = 0$, o sea, $v'' = v - v' = Q_{\gamma_0}$. Así, para cualquier $v \in T_{\gamma_0}$ hay, y es única, una descomposición de forma $v = v' + v''$, donde $v' \in T_{\gamma_0}\{t_i\}$, y $v'' \in Q_{\gamma_0}$. Así T_{γ_0} se descompone en la suma directa de dos subespacios: $T_{\gamma_0}\ \{t_i\}$ y Q_{γ_0}. Demostremos la ortogonalidad de los mismos. Tenemos de la fórmula de la segunda variación:

$$\frac{1}{2}\, d^2E(v', v'') = -\sum_{(i)} \langle v'', \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v')\rangle - \int_0^1 \langle v'', 0\rangle\, dt = 0,$$

lo que se quería demostrar.

Ahora demostremos, que la restricción de d^2E en Q_{γ_0} es una forma definida positivamente, o sea, $d^2E(v, v) \geqslant 0$, si $v \in Q_{\gamma_0}$ con esto la igualdad a cero tiene lugar si, y sólo si, $v = 0$. Consideremos la variación $\tilde{\alpha}(u)$ de la curva γ_0, que engendra el campo $v \in Q_{\gamma_0}$. Como

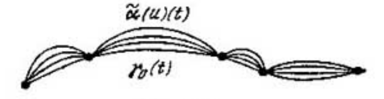


Fig. 106.

el campo $v(t)$ se anula en los puntos t_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, entonces, evidentemente se puede considerar, que $\tilde{\alpha}(u)(t_i) = 0$ para cualquier u, $1 \leqslant i \leqslant k$ (véase la fig. 106).

Puesto que cada segmento de la geodésica γ_0 desde el punto $\gamma_0(t_{i-1})$ hasta el punto $\gamma_0(t_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ es mínimo, entonces para el correspondiente segmento de la curva $\tilde{\alpha}(u)(t)$ desde el valor t_{i-1} hasta el valor t_i se cumple la desigualdad: $E_{t_{i-1}}^{t_i}(\tilde{\alpha}(u)(t)) \geqslant E_{t_{i-1}}^{t_i}(\gamma_0(t))$; por consiguiente: $E(\tilde{\alpha}(u)(t)) \geqslant E(\gamma_0(t)) = E(\tilde{\alpha}(0)(t))$. Ya que es posible interpretar el valor de $d^2E(v, v)$ como la segunda derivada de $E(\tilde{\alpha}(u)(t))$ en el punto $u = 0$, entonces, por lo tanto, la existencia de un mínimo local para $E(\tilde{\alpha})(u)(t))$, significa que $d^2E(v, v) \geqslant 0$.

Queda para demostrar que $d^2E(v, v) > 0$, si $v \neq 0$ y $v \in Q_{\gamma_0}$. Supongamos que $d^2E(v, v) = 0$. Demostremos que entonces $d^2E(\varphi, v) = 0$ para cualquier $\varphi \in T_{\gamma_0}$. Puesto que $\varphi = \varphi' + \varphi''$, donde $\varphi' \in T_{\gamma_0}\ \{t_i\}$, y $\varphi'' \in Q_{\gamma_0}$, entonces

$$d^2E(\varphi' + \varphi'', v) = d^2E(\varphi', v) + d^2E(\varphi'', v) = d^2E(\varphi'', v).$$

Puesto que $d^2E(\varphi', v) = 0$ (recordemos, que los subespacios $T_{\gamma_0}\ \{t_i\}$ y Q_{γ_0} son ortogonales respecto a la forma d^2E). Puesto que $(\alpha\varphi'' + v) \in Q_{\gamma_0}$ para cualquier α real, entonces tenemos: $d^2E(\alpha\varphi'' + v,$

$\alpha\varphi'' + v) \geqslant 0$, o sea, $\alpha^2 d^2E(\varphi'', \varphi'') + d^2E(v, v) + 2\alpha d^2E(\varphi'', v) = \alpha^2 d^2E(\varphi'', \varphi'') + 2\alpha d^2E(\varphi'', v) \geqslant 0$, o sea en virtud de la arbitrariedad de α obtenemos: $d^2E(\varphi'', v) = 0$. Así, $d^2E(\varphi, v) \equiv 0$ con cualquier $\varphi \in T_{\gamma_0}$, es decir, $v \in \operatorname{Ker}(d^2E)$. Al mismo tiempo $\operatorname{Ker}(d^2E)$ consta sólo de los campos de Jacobi, y como el subconjunto Q_{γ_0} contiene sólo un campo de Jacobi nulo, entonces obtenemos definitivamente $d^2E(v, v) > 0$ en Q_{γ_0}. El lema queda demostrado.

El lema demostrado permite limitarse, al calcular el índice de d^2E a lo largo de γ_0, sólo a los campos de Jacobi quebrados, correspondientes a una partición bastante pequeña $\{t_i\}$ del segmento $[0, 1]$.

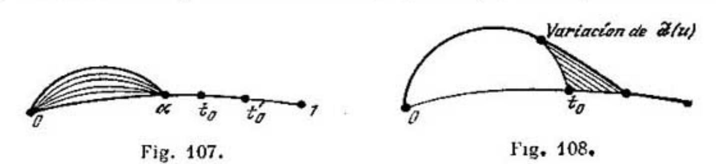


Fig. 107. Fig. 108.

Consideremos una geodésica $\gamma_0(t)$ en un intervalo desde 0 hasta t_0, donde $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$. Designemos por $\lambda(t_0)$ al índice del hessiano d^2E a lo largo del segmento de la geodésica $[0, t_0]$. Es claro que $\lambda(t_0)$ es una función monótona, o sea, $\lambda(t_0) \leqslant \lambda(t_0')$, si $t_0 < t_0'$. Esto se deduce del hecho que cualquier campo de Jacobi en $[0, t_0]$ se anula en el punto $t = 0$ y en el punto $t = \alpha$, donde $\alpha \leqslant t_0$, y por eso cada uno de estos campos se prolongan hasta un campo de Jacobi a lo largo del segmento $[0, t_0']$, si lo suponemos igual a cero en el segmento $[\alpha, t_0']$ (véase la fig. 107). Luego, puesto que la geodésica $\gamma_0(t)$ es mínima localmente, de aquí se deduce, que $\lambda(t_0) = 0$ para t_0 suficientemente pequeños. Si t_0 no es un punto conjugado en $\gamma_0(t)$, entonces la función $\lambda(t)$ es localmente constante en un entorno bastante pequeño de t_0, ya que el conjunto de los puntos no conjugados a lo largo de $\gamma_0(t)$ es un conjunto abierto. De manera que los saltos de la función $\lambda(t)$ pueden realizarse sólo en tales puntos t_0, conjugados con el punto $\gamma_0(0) = p$. El carácter de este salto lo hemos estudiado anteriormente. Este salto es igual al número de campos de Jacobi linealmente independientes que se anulan en los puntos $\gamma_0(0)$ y $\gamma_0(t_0)$ (o sea, a un índice de un punto conjugado $\gamma_0(t_0)$). En realidad, cada uno de estos campos de Jacobi define la variación $\tilde{\alpha}(u)$ de la trayectoria $\gamma_0(t)$ en el espacio Ω, a lo largo del cual el hessiano d^2E está definido negativamente. Hemos mostrado anteriormente este efecto: aquí solamente vamos a recordarlo (véase la fig. 108). De manera que pasando por cada punto conjugado t_0, añadimos a la función $\lambda(t)$ el índice de este punto conjugado, por consiguiente, al llegar al punto $q = \gamma_0(1)$ (que se supone no conjugado con $p = \gamma_0(0)$) obtenemos definitivamente que el valor de $\lambda(1)$ es exactament

igual a la suma de los índices (o sea, de la multiplicidad) de todos los puntos conjugados con el punto $p = \gamma_0(0)$ a lo largo de la geodésica $\gamma_0(t)$.

Queda así demostrado el teorema sobre el índice de la funcional E.

§ 22. Aplicaciones del teorema sobre el índice

Ahora vamos a utilizar el teorema demostrado en el § 21 (sobre el índice) para estudiar la estructura topológica de un espacio de bucles $\Omega(M)$, donde M^n es una variedad suave compacta. Actuamos por analogía con la teoría de la dimensión finita, que permite por una función dada en una variedad de dimensión finita construir la partición celular de esta variedad. Ahora, en vez de una variedad de dimensión finita, tomemos una «variedad de dimensión infinita» $\Omega(M) = \Omega(M, p, q)$ de las curvas (caminos) suaves a trozos del punto p al punto q.

Consideremos una funcional de acción $E(\gamma)$, donde $\gamma \in \Omega M$; esta funcional será una «función de Morse», si todos sus puntos críticos (o sea, las geodésicas del punto p al punto q) son no degenerados. Como ya hemos aclarado, esto sucederá si, y sólo si, los puntos p y q no son conjugados entre sí (a lo alrgo de cualquier geodésica que une p y q). Luego, en cada punto crítico de $\gamma_0 \in \Omega M$ de la funcional E surge un número entero, el índice de este punto crítico, o sea, el índice de la geodésica γ_0 (desde el punto p hasta el punto q). Por consiguiente, análogamente al caso de dimensión finita, es posible esperar que en cada punto crítico (es decir, en cada geodésica γ_0) «colgará» una célula de dimensión igual al índice de este punto crítico (o sea, al índice de la geodésica γ_0). De manera que surge la partición celular del espacio ΩM en células, cuyos número y dimensión son definidos por el número y los índices de las geodésicas, que unen los puntos p y q (si p y q no son conjugados).

Puesto que consideremos variedades de Riemann M^n, es posible determinar la distancia entre cualesquiera dos curvas $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega M^n$

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + \left(\int_0^1 \left(\frac{ds_1(t)}{dt} - \frac{ds_2(t)}{dt} \right)^2 dt \right)^{1/2},$$

donde $s_1(t)$, $s_2(t)$ son las longitudes de los arcos a lo largo de $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$; $\rho(x, y)$ es la distancia en M^n entre los puntos x e y (en una métrica de Riemann dada). Consideremos para cada $a > 0$ un dominio $\Omega^a \subset \Omega M$, o sea, el conjunto de todos los puntos $\gamma \in \Omega M$, para los cuales $E(\gamma) \leqslant a$. Resulta, que es posible aproximar el conjunto Ω^a mediante una variedad suave de dimensión finita (en cierto sentido exacto).

Fijemos una partición del segmento $[0, 1]$ mediante los puntos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ y designemos por $\Omega(t_0, \ldots, t_k)$ a un

subespacio en ΩM, consistente en todas las geodésicas suaves a trozos y que tienen puntos de fractura sólo para valores de los parámetros t iguales a $t_0, t_1, \ldots, t_k$. Connotamos con $\Omega^a(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ a la intersección $\Omega^a \cap \Omega(t_0, \ldots, t_k)$; es decir, todas las líneas geodésicas a trozos a lo largo de las cuales $E \leqslant a$, son puntos de $\Omega^a(t_0, \ldots, t_k)$.

LEMA 1. *Sea M^n una variedad compacta y $\Omega^a \neq \varnothing$. Entonces, para todas las particiones suficientemente pequeñas $(t_0, \ldots t_k)$ del segmento $[0, 1]$, es posible dar al conjunto $\Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E < a)$ una estructura de variedad suave de dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ un número pequeño tal, que para cualquier par de puntos con una distancia entre sí no superior a ε, hay una única geodésica que los une en una esfera de radio ε. Escojamos la partición $(t_0, \ldots, t_k)$ de tal manera, que para todo i: $t_i - t_{i-1} < \varepsilon^2/a$. Entonces cada geodésica $\gamma \in \Omega^a(t_0, \ldots, t_k)$ es definida unívocamente por un juego de $k - 1$ puntos: $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{k-1})$. La aplicación $\gamma \to (\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{k-1}))$ establece un homeomorfismo entre $\Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E < a)$ y un subconjunto abierto del producto directo $M \times \ldots \times M$ $(k - 1)$ veces. El lema queda demostrado.

Consideremos una función E', que es la restricción de la funcional E del espacio Ω^a en una variedad suave de dimensión finita $\Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E < a)$.

LEMA 2. *La función E' es una función suave de Morse en la variedad de dimensión finita $\Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E < a)$. Los puntos críticos de esta función son exactamente puntos críticos de la funcional E en $\Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E < a)$, o sea, las geodésicas (sin fracturas) que van de p a q y tienen una longitud menor que $\sqrt{a}$. El índice de un punto crítico de la función es exactamente igual a la geodésica correspondiente. Para cualquier $b < a$ la variedad $\Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E \leqslant b)$ es un retracto de deformación del conjunto $\Omega^b = (E \leqslant b)$.*

DEMOSTRACIÓN. Presentemos la deformación $r: (E \leqslant b) \to \Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E \leqslant b)$. Sean $\gamma \in (E \leqslant b)$ y $(t_0, \ldots, t_k)$ una partición fijada más arriba (bastante pequeña) de $[0, 1]$; consideremos los puntos $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_k)$, y sea $r(\gamma)$ la única geodésica suave a trozos perteneciente a $\Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E \leqslant b)$, definida por los puntos $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_k)$. La construcción de una retracción de deformación buscada está mostrada en la fig. 109. Luego, de la fórmula de la primera variación se deduce la afirmación de que los puntos críticos de E' en $\Omega(t_0, \ldots, t_k) \cap (E \leqslant b)$ son exactamente las geodésicas (sin fracturas) que van de p a q. La coincidencia de los índices para E' y E se deduce del carácter local de la definición del campo de Jacobi a lo largo de la geodésica: coinciden los espacios de los campos de Jacobi para la función E' y la funcional E. El lema queda demostrado.

De manera que obtenemos la siguiente afirmación.

COROLARIO. *Sea M^n una variedad compacta (además, en lugar de la compacidad se podría suponer sólo la completitud de la variedad M^n); $p, q \in M^n$ es un par de puntos no conjugados a lo largo de ninguna longitud geodésica que no sobrepasa $\sqrt{a}$. Entonces el conjunto $\Omega^a = (E \leqslant a)$ es homotópicamente equivalente a un complejo celular finito,*

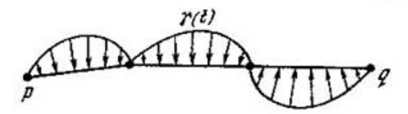


Fig. 109.

en el cual cada célula de dimensión λ corresponde biunívocamente a una geodésica (cuya longitud que no sobrepasa $\sqrt{a}$), de índice λ.

Tendiendo *a* A → ∞ (hacia infinito), obtenemos, que todo el espacio Ω es homotópicamente equivalente a un complejo celular, en el cual cada célula corresponde biunívocamente a una geodésica de p a q, y la dimensión de la célula es igual al índice de esta geodésica.

OBSERVACIÓN. Aquí no vamos a examinar más formalmente el paso al límite $a \to \infty$, porque este examen exigiría introducir una noción topológica tal, como límite directo de los espacios dilatantes.

Ahora examinamos el espacio $\Omega^*(M, p, q)$ de todas las curvas continuas en la variedad M^n, que van del punto p al punto q. Resulta que los espacios $\Omega^* M$ y ΩM son homotópicamente equivalentes, y por eso la partición celular de ΩM engendra también la partición celular del espacio $\Omega^* M$. Consideremos una inmersión (encaje) natural $i\colon \Omega \to \Omega^*$. Suponemos que la topología en el espacio Ω^* se introduce con ayuda de una métrica $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, donde $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega^*$, y ρ es una distancia en la variedad de Riemann M^n (A veces a esta topología se la llama topología compacto-abierta). De la comparación de las topologías en Ω y Ω^* (véase más arriba) se deduce fácilmente, que la aplicación de la inmersión i es continua.

LEMA 3. *Los espacios Ω y Ω* son homotópicamente equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Construyamos en Ω^* una función continua g $0 \leqslant g(\gamma) \leqslant 1$, tal, que de la desigualdad $|t - t'| < 2g(\gamma)$ se deduce que los puntos $\gamma(t)$ y $\gamma(t')$ están unidos por la única geodésica minimal. Sea $f\colon M^n \to [0, 1]$ una función continua arbitraria en la variedad compacta M^n, que toma valores de 0 a 1. Designemos por $\varepsilon_1(r)$ (donde $r \in [0, 1]$) a un número máximo real tal, que cualquier par de puntos de $f^{-1}[0, r]$, con una distancia entre sí no mayor de $\varepsilon_1(r)$, están unidos con una única geodésica minimal. Claro que con el crecimiento de r, $\varepsilon_1(r)$ es una función monótona no creciente.

Consideremos una función $\varepsilon_2(r)$ tal, que $0 \leqslant \varepsilon_2(r) < \varepsilon_1(r)$. Supongamos $\varepsilon(\gamma) = \varepsilon_2(\max\limits_{(t)} f\gamma(t))$; obtenemos una aplicación continua $\varepsilon: \Omega^* \to \mathbb{R}$. Por construcción de la función ε_2 tenemos, que cualquier par de puntos en una curva $\gamma \subset M^n$, con una distancia entre sí no mayor de $\varepsilon(\gamma)$, está unido con una geodésica minimal única. Consideremos una nueva función:

$$\tau(\gamma, \alpha) = (\alpha - 1)\varepsilon(\gamma) + \max_{|t-t'| \leqslant \alpha} \rho(\gamma(t), \gamma(t'));$$

aquí $\tau: \Omega^* \times [0, 1] \to \mathbb{R}$. La función τ crece en forma estrictamente monótona al cambiarse el argumento α desde 0 hasta 1 y $\tau(\gamma, 0) < 0 \leqslant \tau(\gamma, 1)$. Por consiguiente, para cada $\gamma \in \Omega^*$ hay un único $\alpha_0 \in (0, 1)$ tal, que $\tau(\gamma, \alpha_0) = 0$. Definitivamente, supongamos $\alpha_0 = 2g(\gamma)$. Si $\alpha = |t - t'| \leqslant \alpha_0 = 2g(\gamma)$, entonces $\tau(\gamma, \alpha) \leqslant \tau(\gamma, \alpha_0) = 0$, o sea, $\tau(\gamma, \alpha) = (\alpha - 1)\varepsilon(\gamma) + \max\limits_{|t-t'| \leqslant \alpha} \rho(\gamma(t), \gamma(t')) \leqslant 0$, es decir, $\rho(\gamma(t), \gamma(t')) \leqslant (1 - \alpha)\varepsilon(\gamma) \leqslant \varepsilon(\gamma)$, por lo tanto, $\gamma(t)$ y $\gamma(t')$ están unidos por una geodésica minimal

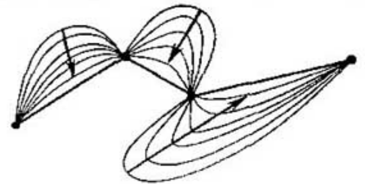


Fig. 110.

única (véase más arriba la definición de $\varepsilon(\gamma)$). La construcción de la función $g(\gamma)$ ha concluido. Definamos la aplicación continua $r: \Omega^* \to \Omega$, haciendo: $r(\gamma)$, una curva unívocamente definida tal, que $r(\gamma)$ coincide con γ para valores del parámetro $t = 0, g(\gamma), 2g(\gamma), \ldots, k \cdot g(\gamma)$ y para aquí $k = [1 = 1;\text{met}/g(\gamma)]$ (parte entera); la trayectoria $r(\gamma)$ es una geodésica en cada intervalo $[p \cdot g(\gamma), (p + 1)g(\gamma)]$, $0 \leqslant p \leqslant k - 1$. Al igual que más arriba, se verifica directamente que las aplicaciones ir y ri son homotópicas a las aplicaciones idénticas (véase la fig. 110). El lema quedo demostrado.

Así, ha sido demostrado definitivamente el siguiente teorema.

TEOREMA 1. *Sea M^n una variedad de Riemann compacta (o entera); sea p y q un par de puntos en M^n no conjugados a lo largo de ninguna geodésica. Entonces, el espacio de las curvas continuas $\Omega^*(M^n, p, q)$ (que es equivalente homotópicamente al espacio $\Omega(M^n, p, q)$), tiene un tipo homotópico de un complejo celular numerable, en el cual a cada*

geodésica del punto p al punto q con índice λ le corresponde exactamente una célula de dimensión λ.

OBSERVACIÓN. Si está fijada la geodésica γ_0, entonces surge una célula correspondiente σ^λ (λ es índice de γ_0) como un conjunto de trayectorias que se obtienen de γ_0 mediante perturbaciones de γ_0 en dirección hacia todos los campos de Jacobi a lo largo de γ_0 (véase la fig. 111).

Veamos algunas aplicaciones del teorema demostrado. Apliquemos este teorema al problema de cálculo de los grupos de las homologías (y cohomologías) con coeficientes enteros de un espacio de bucles ΩS^n, donde S^n es una esfera n-dimensional. Introduzcamos

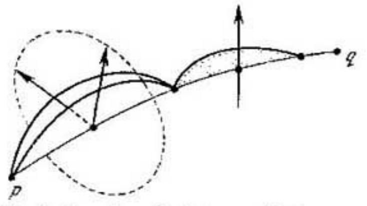


Fig. 111. Indice $\lambda = 3$. Esta geodésica γ_0 corresponde a la célula tridimensional σ_3.

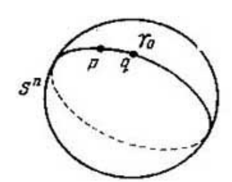


Fig. 112.

en la esfera S^n una métrica de Riemann estándar, y sean p y q dos puntos suficientemente cercanos en una esfera S. Entonces es posible considerar, que p y q no están conjugados a lo largo de ninguna geodésica en S^n (por ejemplo, con el punto p está conjugado sólo un punto en la esfera, el punto diametralmente opuesto $-p$). Entonces los puntos p y q están unidos con un número numerable de las geodésicas $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$, donde γ_0 es un arco más corto de un círculo máximo en el cual se hallan los puntos p y q (véase la fig. 112). Designemos a la circunferencia del círculo máximo por d; entonces $\gamma_1 = d + \gamma_0$; $\gamma_2 = d + d + \gamma_0$; $\gamma_3 = d + d + d + \gamma_0$, etc. Claro que el índice $\lambda(\gamma_h)$ de la geodésica γ_k es igual a $k(n-1)$. Aquí hemos utilizado el hecho de que los puntos p y $-p$ son conjugados con una multiplicidad $n-1$: existen $n-1$ variaciones geodésicas (giros) del arco del círculo máximo que une los puntos p y $-p$. Se deduce del teorema anteriormente demostrado, que el subconjunto de bucles ΩS^n tiene un tipo homotópico del complejo celular, que posee en cada de las dimensiones $0, n-1, 2(n-1), 3(n-1), \ldots$ exactamente una célula (no hay células en otras dimensiones). De aquí podemos obtener la información sobre las homologías $H_*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$.

Al principio supongamos que $n > 2$; entonces cada célula de las arriba indicadas $\{\sigma^{k(n-1)}\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ es un (co)ciclo (ya

que dos dimensiones vecinas no contienen células en absoluto), o sea,

$$H_p(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ si } p = k(n-1), & k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\ 0, \text{ para los restantes valores de } p. \end{cases}$$

En particular, $H_p(\Omega S^n; \mathbb{Z}) \cong H^p(\Omega S^n; \mathbb{Z})$. Se hacen un poco más complicados los razonamientos para $n = 2$. En este caso en cada dimensión: 0, 1, 2, 3, 4, . . . hay exactamente una célula, por eso la trivialidad de un operador de frontera ∂: $C_p \to C_{p-1}$ ya no se deduce de las consideraciones anteriormente dadas. Vamos a estudiar con más detalle la estructura del armazón tridimensional $(\Omega)^{(3)}$ de un espacio de bucles $\Omega(S^2)$. Obtenemos de lo demostrado más arriba: $(\Omega S^2)^{(3)} = \sigma^0 \cup \sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3$. Recordemos que de un espacio fibrado estándar $E \xrightarrow{\Omega} S^2$ (donde E es un espacio de curvas en S^2, salientes de un punto fijado en S^2), se deduce la relación: $\pi_i(S^2) = \pi_{i-1}(\Omega)$, $i \geqslant 1$. Como se señala en el § 21 de la parte II del libro [1], $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, o sea, $\pi_1(\Omega) = \mathbb{Z}$. Luego (véase [1], p. II, § 22), $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (o sea, $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$). Ya que $H_1(\Omega; \mathbb{Z}) = \{$grupo conmutado $\pi_1(\Omega)\}$, entonces $H_1(\Omega; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Consiguientemente, la frontera de la célula σ^2 se contrae por $S^1 = \sigma^0 \cup \sigma^1$ en un punto, es decir, el armazón bidimensional $(\Omega)^{(2)}$ es equivalente homotópicamente al ramo $S^1 \vee S^2$ (véase § 4). Puesto que $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$, entonces una célula tridimensional σ^3 al pegarse a $S^1 \vee S^2$ debe suprimir la acción del grupo fundamental $\pi_1(S^1)$ en $\pi_2(S^2 \vee S^1) = \mathbb{Z}$, por consiguiente, $(\Omega)^{(3)}$ es equivalente homotópicamente al producto $S^1 \times S^2$. Puesto que las (co)homologías bidimensionales de ΩS^2 son definidas completamente por un armazón tridimensional $(\Omega S^2)^{(3)}$, entonces obtenemos, que $H_2(\Omega S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $H^2(\Omega; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Designemos a las generatrices de los grupos de cohomologías $H^1(\Omega; \mathbb{Z})$ y $H^2(\Omega; \mathbb{Z})$ por a y b respectivamente ($\deg(a) = 1$; $\deg(b) = 2$). Claro que $a^2 = 0$ en el anillo $H^*(\Omega; \mathbb{Z})$.

Recordemos la definición del H-espacio. Un espacio topológico Y se denomina H-espacio, si está definida la operación de multiplicación $\mu: Y \times Y \to Y$, que tiene una unidad «homotópica» (véase el § 7). Examinemos las aplicaciones

$$Y \xrightarrow{j_1} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y,$$
$$Y \xrightarrow{j_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y.$$

Aquí $j_1(y) = (y, y_0)$, $j_2(y) = (y_0, y)$, $y_0 \in Y$ es una «unidad homotópica». Las aplicaciones μj_α son homotópicas a la aplicación idéntica $Y \to Y$.

Recordemos también, que el espacio de bucles ΩM es un H-espacio. La aplicación $\mu: \Omega M \times \Omega M \to \Omega M$ se da mediante el producto de las curvas (véase el § 7)

$$f \circ g = \mu(f, g),$$

es decir, a dos bucles se les pone en correspondencia un bucle, obtenido mediante un paso sucesivo de ambos bucles.

Según el teorema de Hopf (véase el § 7), el álgebra de cohomologías de cualquier H-espacio sobre el campo de los números racionales es isomorfa al producto tensorial $\wedge(x_1, \ldots, x_t) \otimes \mathbb{Q}[y_1, \ldots, y_s]$, donde $\wedge(x_1, \ldots, x_t)$ es un álgebra exterior de las generatrices de dimensiones impares $x_1, \ldots, x_t$; $\mathbb{Q}[y_1, \ldots, y_s]$ es un álgebra de polinomios de las generatrices de dimensiones pares $y_1, \ldots, y_s$. En particular, si el H-espacio es de dimensión finita, entonces su álgebra de cohomologías es isomorfa al álgebra $\wedge(x_1, \ldots, x_t)$.

Puesto que el espacio $\Omega(S^2)$ es un H-espacio, entonces $H^*(\Omega(S^2)) \cong \wedge(x_1, \ldots, x_t) \otimes \mathbb{Q}[y_1, \ldots, y_s]$. Ya hemos presentado dos generatrices: $x_1 = a$ ($\deg(a) = 1$), $y_1 = b$ ($\deg(b) = 2$); por consiguiente, todos los grados de b^k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, son distintos de cero en el álgebra $H^*(\Omega(S^2)$ y, de esta manera, $H^*(\Omega(S^2))$ contiene la siguiente subálgebra: $\wedge(a) \otimes \mathbb{Q}[b]$. Afirmamos, que esta subálgebra coincide completamente con el álgebra $H^*(\Omega(S^2))$. Realmente, la subálgebra $\wedge(a) \otimes \mathbb{Q}[b]$ contiene en cada dimensión una generatriz aditiva: b^q (en las dimensiones de tipo $2q$, $q = 1, 2, 3, \ldots$) o $a \cdot b^q$ (en las dimensiones de tipo $2q + 1$, $q = 0, 1, 2, 3 \ldots$). De otro lado, fue mostrado anteriormente que la partición celular del espacio $\Omega(S^2)$ contiene exactamente una célula en cada dimensión; por eso los cociclos más arriba presentados agotan completamente el álgebra $H^*(\Omega(S^2))$. De aquí en particular se deduce para las homologías con coeficientes enteros: $H_p(\Omega(S^2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ para cualquier $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$, porque todas las células σ^i son ciclos:

La respuesta definitiva es:

1) $H^p(\Omega(S^n); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{si } p = k(n-1), & k = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 0 \text{ para los } p \text{ restantes;} \end{cases}$

2) $H^*(\Omega(S^{2n+1}); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[b_{2n}]$;

$H^*(\Omega(S^{2n}); \mathbb{Q}) = \wedge(a_{2n-1}) \otimes \mathbb{Q}[b_{4n-2}]$.

También demostremos cómo la información sobre las homotopías y homologías de la variedad M permite formular opiniones completamente determinadas sobre la conducta (y existencia) de las geodésicas sobre una variedad de Riemann M^n. Por ejemplo, utilicemos la información arriba obtenida sobre las homologías del espacio de bucles $\Omega(S^n)$; $n \geqslant 2$.

PROPOSICION 1. *Sea M^n una variedad de Riemann homotópicamente equivalente a una esfera S^n, $n \geqslant 2$. Entonces, cualesquiera dos puntos p, $q \in M^n$ están unidos por un sinnúmero de geodésicas.*

Esta proposición se deduce inmediatamente del teorema arriba demostrado sobre la estructura del espacio de bucles ΩM^n y de la información sobre las homologías de este espacio.

OBSERVACIÓN. Las geodésicas, cuya existencia es establecida en el presente teorema, son distintos puntos del espacio funcional ΩM^n, pero geométricamente (después de su realización en forma de curvas suaves en M^n) algunas de ellas pueden coincidir (véase, por ejemplo, las geodésicas en la esfera S^n). Hablando en general, el problema sobre la obtención del número de geodésicas geométricamente distintas exige un examen complementario.

Sea M^n una variedad suave compacta y sea $i > 0$ el primer número de un grupo $\pi_i(M^n)$ tal, que $\pi_i(M^n) \neq 0$. Entonces para cualesquiera dos puntos no conjugados, $p, q \in M^n$ hay una geodésica de índice i que los une. En realidad, ya que $\pi_i(M^n) = \pi_{i-1}(\Omega M^n)$, entonces el grupo $H_{i-1}(\Omega(M^n))$ es distinto de cero; por consiguiente, según el teorema sobre la descomposición celular del espacio de bucles, obtenemos que la funcional E en ΩM^n debe tener, por lo menos, un punto crítico (es decir, geodésico) de índice i. La afirmación queda demostrada.

Si la variedad tiene una curvatura negativa (no positiva) por todas las direcciones bidimensionales, entonces (como será mostrado en el § 23) todos los puntos críticos de la funcional E en $\Omega(M^n, p, q)$ tienen el índice 0 (mínimos locales).

PROBLEMA 1. Deducir de aquí que las geodésicas que unen los puntos p y q, están en correspondencia biunívoca natural con los elementos del grupo $\pi_1(M^n)$.

§ 23. Problema periódico del cálculo de variaciones

Ya hemos examinado en detalle un problema unidimensional de variaciones en una variedad de Riemann M^n, relacionado con las funcionales de longitud $L(\gamma)$ y de la acción (operación) $E(\gamma)$, donde $\gamma \in \Omega(M^n, p, q)$, p, q, son dos puntos dados en M^n. Este problema de variaciones se llama «problema con los extremos sujetos», puesto que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\gamma \in \Omega(M^n; p, q)$. Un significado importante tienen los llamados «extremos cerrados», que ahora pasamos a estudiar. El estudio de este problema se diferencia un poco del «problema con los extremos fijados».

El problema periódico se plantea de la siguiente manera. Consideremos una variedad de Riemann suave compacta M^n; con $\Pi(M^n)$ designamos al espacio de todas las curvas suaves cerradas en M^n, es decir, un punto del espacio $\Pi(M^n)$ es una aplicación suave $\gamma: S^1 \to M^n$, donde $S^1 = S^1(t)$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ es una circunferencia perteneciente a una coordenada angular estándar t, con esto no se fija un punto inicial.

OBSERVACIÓN. El espacio $\Pi(M^n)$ (la topología se introduce en éste de la misma manera que en el espacio $\Omega(M^n, p, q)$, véase más arriba) se diferencia del espacio $\bigcup_p \Omega(M^n; p, p) = \widetilde{\Pi}(M)$, o sea, $p = q$;

hay una aplicación (¡no espacio fibrado!) $\Pi(M^n, p, p) \to \Pi(M^n)$, donde la preimagen del punto es una circunferencia. El conjunto de los componentes linealmente conexos del espacio $\Pi(M^n)$ es, por definición, el conjunto de las clases homotópicas «libres» de las aplicaciones $S^1 \to M^n$. Según el § 17 de la parte II del libro [1], las clases homotópicas se determinan por las clases de los elementos conjugados en el grupo $\pi_1(M^n)$.

CONCLUSION. Las funcionales tolerables en las curvas de la variedad M^n tienen necesariamente mínimos en cada componente linealmente conexo del espacio $\Pi(M^n)$. Por consiguiente, el número de mínimos es no menor que el número de clases de conjugación en el grupo $\pi_1(M^n)$.

En este parágrafo utilizaremos mucho los métodos desarrollados más arriba para estudiar extremales en el espacio $\Omega(M^n, p, q)$, y por eso no repetiremos las construcciones análogas.

El espacio $\Pi(M^n)$, al igual que el espacio $\Omega(M^n, p, q)$, puede ser convertido de una manera natural en una «variedad de dimensión infinita»; si $\gamma \in \Pi(M^n)$ es una trayectoria cerrada (recordemos, que bajo el término «trayectoria» comprendemos una trayectoria con parametrización; es decir, las trayectorias con distintas parametrizaciones son distintos puntos del espacio $\Pi(M)$), entonces, un «espacio tangente» $T_\gamma\Pi(M)$ respecto a una «variedad» $\Pi(M)$ en un punto $\gamma \in \Pi(M)$ se compone de todos los campos vectoriales suaves a lo largo de γ (o sea, de los campos vectoriales periódicos). En el espacio $\Pi(M)$ ambas funcionales: $L(\gamma)$ y $E(\gamma)$ (longitud y acción de la curva o camino) están definidas lo mismo que en el caso del espacio $\Omega(M, p, q)$. Vamos a estudiar las extremales de las funcionales E y L.

LEMA 1. *Si $\gamma_0 \in \Pi(M)$ es una extremal cerrada de la funcional E, entonces γ_0 es una geodésica cerrada perteneciente a un parámetro que es proporcional a un parámetro natural.*

La demostración se deduce inmediatamente de los teoremas correspondientes para las extremales del espacio $\Omega(M, p, q)$. Si $\gamma(t)$ es una extremal periódica para una funcional de longitud L, entonces todas las trayectorias $\gamma(t')$ obtenidas de $\gamma(t)$ con ayuda de los cambios suaves del parámetro $t \to t'$, también son extremales de la funcional L. Por consiguiente, los puntos críticos de la funcional L no están aislados en el espacio $\Pi(M)$; en particular, ellos no pueden ser en ningún sentido puntos críticos «aislados y no degenerados» para la funcional E.

Por eso (al igual que en el caso del espacio $\Omega(M, p, q)$) prestamos mucha atención al estudio de las extremales de la funcional E. Notemos que la geodésica cerrada $\gamma_0(t) \in \Pi(M)$ puede ser múltiple, en el sentido de que con el cambio de t desde 0 hasta 1 el conjunto $\{\gamma(t)\} \subset M^n$, que es una curva suave, está recorrido varias veces; véase la fig. 113. Las geodésicas $\gamma(t)$ representadas en M^n por una

curva suave que está recorrido una vez, se llaman geodésicas simples (de multiplicidad uno).

Por el contrario, si se da cierta geodésica cerrada simple, ella define una sucesión discreta infinita de las geodésicas cerradas obtenidas de una geodésica inicial mediante un recorrido repetido (con velocidades mayores que la velocidad de recorrido de la geodésica inicial). Todas estas trayectorias son distintos puntos del espacio $\Pi(M)$. Por ejemplo, si una trayectoria inicial $\gamma_0(t)$ definía un

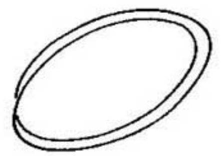


Fig. 113. Geodésica de multiplicidad 2.

elemento no nulo de un grupo fundamental $\pi_1(M)$ (más exactamente: su clase de conjugación es distinta de un elemento unidad), entonces las trayectorias de mayor multiplicidad a él, pertenecen ya a otras clases de la conjugación del grupo $\pi_1(M)$.

Al igual que en el caso de las geodésicas con extremos fijados, es posible confrontar a cada geodésica cerrada cierto número entero que, por analogía con el caso precedente, lo llamaremos grado de degeneración de la geodésica. Ahora daremos la definición; pero si el grado de degeneración es igual a cero, entonces la geodésica se llamará no degenerada.

Para definir correctamente el grado de degeneración de una geodésica cerrada, consideremos un hessiano d^2M (véase su definición y sus propiedades más arriba, en el parágrafo dedicado al estudio de las geodésicas con los extremos fijados). Anteriormente hemos demostrado la llamada «fórmula de la segunda variación» que tiene la siguiente forma

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(\widetilde{\alpha})}{\partial u_1\,\partial u_2}(0,\ 0)=-\int_0^1 \langle v_2,\ \nabla_{\dot{\gamma}_0}\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1+R(\dot{\gamma}_0,\ \dot{\gamma}_1)\,\gamma_0\rangle\,dt,$$

donde: R, es un tensor de curvatura de Riemann; $\dot{\gamma}_0$, es un vector de velocidad de la geodésica; γ_0, y los campos vectoriales v_1 y v_2, circunscriben una variación biparamétrica, es decir, un par de los «vectores tangentes» respecto a una variedad de dimensión infinita ΠM en el punto γ_0. Como fue señalado más arriba, los campos vectoriales v_1 y v_2 están definidos a lo largo de toda la trayectoria γ_0 y son

suaves y periódicos. Puesto que el hessiano d^2E define una forma simétrica bilineal en un espacio tangente $T_{\gamma_0}(\Pi M)$, entonces, por consiguiente, es posible dar esta forma unívocamente mediante un operador diferencial lineal correspondiente a ella, el cual evidentemente, es del tipo: $D = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 - R(\dot{\gamma}_0)\dot{\gamma}_0$. Aquí procedemos por analogía con el caso de dimensión finita, cuando el hecho de dar una forma bilineal significa dar un operador D con cuya auyda la forma buscada B se define por la fórmula $B(x, y) = \langle x, Dy\rangle$.

En nuestro caso la acción del operador D en los «vectores tangentes» $v \in T_{\dot{\gamma}_0}(\Pi M)$ (es decir, en los campos suaves periódicos definidos a lo largo de la geodésica cerrada γ_0), se realiza según la siguiente fórmula:

$$D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = -[(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 + R(\dot{\gamma}_0, \cdot)\dot{\gamma}_0](v).$$

Recordemos, que un «vector tangente» v (o sea, un campo vectorial periódico) se llama de Jacobi, si este campo es anulado por el operador D, es decir, si es solución de la siguiente ecuación diferencial: $D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0$. Claro que esta definición imita completamente la situación de las geodésicas con extremos fijados. De manera que los campos de Jacobi («vectores tangentes» de Jacobi) son elementos del núcleo del operador lineal D que actúa en el espacio tangente $T_{\dot{\gamma}_0}(\Pi M)$.

DEFINICIÓN 1. Al grado de degeneración de la geodésica cerrada γ_0 se le llamará dimensión del núcleo del operador D.

Al igual que en el caso, de las geodésicas con extremos sujetados, se demuestra que este número es finito (véase más arriba).

DEFINICIÓN 2. A una geodésica cerrada la llamaremos no degenerada, si su grado de degeneración es igual a cero.

Para simplificar, nos limitamos básicamente en adelante al examen de las geodésicas cerradas no degeneradas. Resulta que a cada geodésica de este tipo le corresponde naturalmente un número entero llamado «índice de la geodésica». Para su definición recurrimos de nuevo al operador D. El índice puede ser definido de una manera un poco distinta. En efecto, puesto que el índice era igual al número de los cuadrados negativos después de la reducción a la forma canónica del hessiano d^2E en un plano tangente $T_{\gamma_0}(\Pi M)$ entonces, por consiguiente, esta forma está definida negativamente a lo largo de cada «vector tangente» $v \in T_{\gamma_0}(\Pi M)$ correspondiente a uno de los cuadrados negativos de la forma d^2E, de esta manera este «vector tangente» es valor propio del operador D con número propio $\lambda < 0$. Así, el índice del hessiano d^2E se podría definir simplemente como un número de soluciones linealmente independientes de la siguiente ecuación

diferencial: $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$ (es un sistema de las ecuaciones diferenciales con el parámetro λ, que es un número propio). Por eso las soluciones de la ecuación $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$, son campos vectoriales periódicos suaves a lo largo de la geodésica γ_0 (si es que estas soluciones existen en general). Aquí la situación es distinta a la del caso de los «vectores tangentes» de Jacobi, pues allí siempre existe por lo menos una solución nula de un sistema homogénea; si $\lambda < 0$ puede no haber solución: en este caso diremos, que el índice de una geodésica cerrada es igual a cero.

DEFINICIÓN 3. Se denomina índice de una geodésica cerrada no degenerada, el número de las soluciones linealmente independientes del sistema de ecuaciones diferenciales

$$D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0.$$

Esta definición es también aplicable al caso de geodésicas con extremos sujetados.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. Por supuesto el índice de la geodésica cerrada que hemos definido está relacionado también con la distribución a lo largo de esta geodésica de los puntos conjugados a un punto inicial en la misma, pero esta relación es de un carácter más complicado que en el caso de las geodésicas con los extremos sujetados, y por eso no vamos a entrar en detalles.

PROBLEMA 1. Demostrar que el índice es no menor que el número de los puntos conjugados (pero puede ser no igual).

En cierto sentido, el estudio del «problema periódico del cálculo de las variaciones» es más complicado que el estudio de las geodésicas con extremos sujetados. El carácter de las dificultades surgidas es ilustrado en medida suficiente con la presencia de las geodésicas múltiples; por ejemplo, el problema sobre el cálculo de la cantidad de las geodésicas cerradas simples (o sea, no múltiples) no es trivial ni mucho menos.

Para simplificar el problema del estudio de las geodésicas cerradas, consideremos aquí sólo un ejemplo: el caso de las variedades de Riemann de curvatura negativa, es decir, de tales variedades en las cuales todas las curvaturas por todas las direcciones bidimensionales son negativas. Conocemos ejemplos de tales variedades: el plano de Lobachevski con una métrica estándar de curvatura negativa constante; las variedades cerradas suaves bidimensionales obtenidas por la factorización del plano de Lobachevski según la acción de grupos discretos que actúan con las isometrías en el plano de Lobachevski y son isomorfos a los grupos fundamentales de las superficies (véase [1], p. II, § 20 sobre los grupos cristalográficos en el plano de Lobachevski). Para simplificar, supongamos a veces la compacidad de la variedad estudiada.

TEOREMA 1. *Sea M una variedad compacta suave de Riemann de curvatura negativa. Entonces, en cada clase unidimensional homotópica libre hay una geodésica única cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos alguna clase de los bucles cerrados libres recíprocamente homotópicos entre sí. Supongamos que estudiamos sólo trayectorias cerradas suaves; a cada trayectoria le confrontemos el valor de la funcional en la misma; tomemos un número c igual a la cota inferior de todos estos valores; hablando en general, existe una sucesión infinita de bucles cerrados cuyas longitudes convergen al número c. En virtud de la compacidad de variedad, es posible escoger de esta sucesión una sucesión de curvas, las cuales convergen punto a punto a cierta curva suave γ_0, la cual, como es fácil verificarlo, será una geodésica cerrada, y el valor de la funcional E en esta geodésica, igual al número c. Queda por demostrar la unicidad de esta geodésica. Para esto necesitamos de un lema importante, cuyo significado no se agota sólo por la demostración de nuestro teorema.

LEMA 2. *Sea γ_0 una geodésica cerrada en una variedad M de curvatura negativa (aquí es posible no suponer compacta la variedad M). Entonces, esta geodésica es no generada y su índice es igual a cero, o sea, en otras palabras, las ecuaciones diferenciales $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$, no tienen ni una sola solución y la ecuación $D(v) = 0$ tiene sólo una solución nula.*

DEMOSTRACIÓN. Al principio consideremos un caso de la ecuación $D(v) = 0$. Es necesario demostrar que ella no tiene soluciones no nulas. Sea v una solución no nula. Entonces, tenemos: $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0$, de aquí $\langle(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v\rangle = -\langle R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0, v\rangle > 0$, ya que la magnitud $\langle R(\dot{\gamma}_0, v) \times \dot{\gamma}_0, v\rangle$ es precisamente curvatura por la dirección bidimensional dada en cada punto de la trayectoria γ_0 por dos vectores: $\dot{\gamma}_0$ y v. De aquí

$$\frac{d}{dt}\langle\nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v\rangle = \nabla_{\dot{\gamma}_0}\langle\nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v\rangle =$$
$$= \langle(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v\rangle + \langle\nabla_{\dot{\gamma}_0} v, \nabla_{\dot{\gamma}_0} v\rangle = \langle(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v\rangle + |\nabla_{\dot{\gamma}_0} v|^2 \rangle 0,$$

es decir, la función $\langle\nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v$ crece monótona y estrictamente con el crecimiento de t a lo largo de $\gamma_0(t)$.

Consideremos en la trayectoria $\gamma_0(t)$ un punto fijado arbitrario, por ejemplo, punto $\gamma_0(0)$. La solución $v(t)$ es una función del parámetro t; estudiemos la conducta de esta solución con el cambio de t. Primer caso: en el punto $\gamma_0(0)$ se cumple la desigualdad $\langle\nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v\rangle|_{t=0} \geqslant 0$. Entonces tenemos:

$$\frac{d}{dt}\langle v, v\rangle = \nabla_{\dot{\gamma}_0}\langle v, v\rangle = 2\langle\nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v\rangle > 0 \text{ para todo } t > 0,$$

puesto que $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle$ es una función monótona y estrictamente creciente. Segundo caso: en el punto $\gamma_0(0)$ se cumple la desigualdad $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle \mid_{t=0} < 0$. Entonces consideremos en lugar de la trayectoria $\gamma_0(t)$ una trayectoria $\gamma_0(-t)$, cambiando el parámetro t; con esto en cada punto el vector de velocidad $\dot{\gamma}_0$ se cambiará por el opuesto $-\dot{\gamma}_0$; por consiguiente

$$\frac{d}{dt}\langle v, v \rangle|_{t\to -t} = 2\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0(-t)} v; v \rangle - 2\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v; v \rangle > 0$$

para todo $t > 0$. De manera que es posible considerar, que bien a lo largo de la trayectoria $\gamma_0(t)$ (o sea con dirección positiva del parámetro), o bien a lo largo de la trayectoria $\gamma_0(-t)$ (o sea con dirección negativa del parámetro) el módulo del vector v crece monótona y estrictamente pero, puesto que la trayectoria es cerrada, dentro de algún tiempo volveremos al punto inicial, pero con un mayor módulo del vector v; puesto que se supuso suave la función v a lo largo de γ_0, entonces obtenemos una contradicción. El lema está demostrado para la ecuación $D(v) = 0$. Ahora consideremos la ecuación: $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$. Como $D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0; v)\dot{\gamma}_0 = \lambda v$, entonces

$$(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = -\lambda v;$$

$$\langle (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v \rangle = -\langle R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0, v \rangle - \lambda \langle v, v \rangle > 0,$$

puesto que $\lambda < 0$. Precisamente aquí hemos utilizado el hecho que $\lambda < 0$. Los razonamientos sucesivos repiten exactamente los precedentes; de aquí se deduce, que la ecuación $Dv = \lambda v$ no tiene soluciones. El lema queda completamente demostrado.

Volvamos a la demostración del teorema. Consideremos una geodésica cerrada γ_0 en la clase libre dada homotópica (véase la demostración más arriba). Del lema demostrado se deduce que esta geodésica es no degenerada; en particular, es aislada. Puesto que, en virtud del lema, su índice es igual a cero, por consiguiente, la funcional E que se considera como una función en un espacio de curvas cerradas, tiene en el punto γ_0 un mínimo local. Supongamos que en la clase homotópica dada hay varios mínimos locales (o sea, varias geodésicas cerradas). Escojamos cualesquiera dos geodésicas cerradas: γ_0 y γ_0'. Puesto que ambas son no degeneradas, entonces son aisladas, y la funcional E tiene en ellas su mínimo local estricto (véase la fig. 114). Puesto que γ_0 y γ_0' pertenecen a una clase homotópica libre, entonces hay una trayectoria τ, que une estos dos puntos en el espacio ΠM, o sea, hay una homotopía que transforma γ_0 en γ_0'.

Examinemos la conducta de la funcional E acotada en la trayectoria τ. Procediendo por analogía con el caso de dimensión finita, obtenemos, que hay tal trayectoria τ, a lo largo de la cual la funcional E tiene entre los puntos γ_0 y γ_0' otro punto de ensilladura, $-\alpha$; véase la fig. 115. Pero este punto ya no puede ser un mínimo local, lo que contradice el lema demostrado más arriba. Por consiguiente,

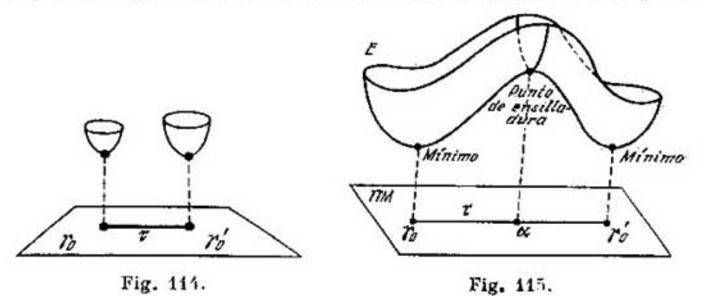


Fig. 114. Fig. 115.

los puntos γ_0 y γ_0' coinciden. Por lo tanto, en la clase homotópica libre hay sólo un mínimo local; él es también mínimo absoluto, con esto no hay otras geodésicas (salvo las múltiples). El teorema queda demostrado. Del lema demostrado más arriba se deducen resultados útiles también para las variedades no compactas de curvatura negativa.

TEOREMA 2. *Sea M una variedad suave que tiene curvatura negativa por todas las direcciones bidimensionales. Entonces ningunos dos puntos de la variedad M están conjugados a lo largo de ninguna geodésica.*

DEMOSTRACIÓN. Cabe demostrar que la ecuación $D(v) = 0$ no tiene ninguna solución salvo la nula. Esto se deduce inmediatamente del lema, lo que concluye la demostración.

TEOREMA 3. *Supongamos que M sea una variedad suave simplemente conexa de curvatura negativa (por todas las direcciones bidimensionales), cuyos cualesquiera dos puntos pueden ser unidos con una geodésica. Entonces cualquier par de puntos de la variedad M está unido con la única geodésica minimal. La variedad M es difeomorfa a un espacio euclídeo.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que M es simplemente conexa, entonces es conexo el espacio $\Omega(M; p, q)$. En vista de falta de puntos conjugados (véase más arriba), cada geodésica tiene un índice igual a cero. Del teorema de Morse se deduce, que el espacio $\Omega(M; p, q)$ es de tipo homotópico de un complejo celular cuya dimensión es igual a cero, y a cada geodésica le corresponde una célula de dimensión nula (punto). En virtud de la conexión de $\Omega(M; p, q)$ hay sólo un

vértice, y por eso los puntos p y q están unidos por la única geodésica. Quiere decir, que la aplicación exponencial de un espaco tangente en la variedad es biunívoca, lo que demuestra el teorema.

Resulta que el hecho de que cierto grupo es un grupo fundamental de la variedad de curvatura negativa, pone restricciones bastante fuertes en este grupo (recordemos que cualquier grupo con un número finito de generatrices puede ser realizado como un grupo fundamental de una variedad compacta cuadridimensional; al mismo tiempo, no cada grupo ni mucho menos puede ser un grupo fundamental de una variedad compacta tridimensional, por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Tiene lugar la siguiente afirmación.

TEOREMA 4. *Sea M una variedad de curvatura negativa. Si dos elementos del grupo fundamental $\pi_1(M)$ se conmutan, entonces ambos pertenecen a un subgrupo cíclico en el grupo $\pi_1(M)$.*

DEMOSTRACION. Sean a y b dos elementos conmutadores. Si pertenecen a un subgrupo cíclico, la afirmación queda demostrada.

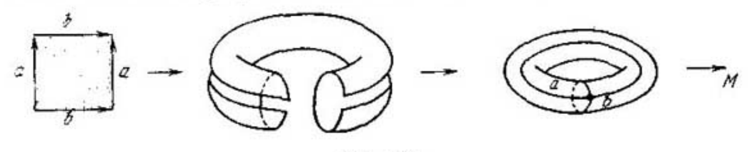


Fig. 116.

Que no pertenezcan a un subgrupo cíclico. Entonces es posible construir una aplicación suave en la variedad M de un toro bidimensional T^2, que realice la condición de conmutación de dos elementos indicados a y b. Efectivamente, la condición de conmutatividad escrita en forma $aba^{-1}b^{-1} = 1$, define la aplicación del toro T^2 en M (véase la fig. 116). Con esto los elementos conmutadores a y b resultan ser el meridiano y el paralelo de este toro (sumergidos ordinariamente en el mismo). Resulta que la condición de curvatura negativa permite realizar una deformación suave de este toro en tal toro, que estará sumergido en M como una subvariedad completamente geodésica. Hay que examinar para esto tal posición del toro en M, con el cual éste tiene un área mínima. Este teorema sobre la existencia de un toro minimal (o mínimo) lo aceptamos sin demostrar, puesto que el hecho de existir una solución minimal es lo suficiente no trivial y forma el contenido del conocido problema de Plateau. La posición minimal más arriba mencionada la dará el toro como una subvariedad minimal bidimensional en M; puesto que el toro es bidimensional, es posible escoger en éste coordenadas conformes, respecto a las cuales la aplicación de la inmersión (encaje) del toro en M será una aplicación armónica (es una particularidad de las variedades

bidimensionales para las cuales tiene lugar el teorema de uniformización). De aquí es bastante fácil comprender que el toro será sumergido en M como una subvariedad completamente geodésica, o sea, como tal subvariedad, en la cual cada geodésica (en una métrica de Riemann inducida) es, al mismo tiempo, una geodésica también en una variedad de Riemann abrazadora. Como la variedad abrazadora tenía curvatura negativa, y puesto que el toro es por completo geodésico, por consiguiente, hemos obtenido en el toro bidimensional una métrica de Riemann inducida de curvatura negativa gaussiana (recordemos, que la curvatura gaussiana de una superficie bidimensional es un invariante interior y coincide con su curvatura escalar, o sea, en el caso dado, con la curvatura por dirección bidimensional coincidente con la dirección tangente hacia este toro). Pero no es posible introducir tal métrica en el toro bidimensional, porque entonces la integral de la curvatura gaussiana por el toro sería distinto de cero, lo que contradice la fórmula de Gauss — Bonnet, según la cual esta integral coincide con la característica de Euler del toro (después de la división de la integral por 2π), la cual es igual a cero. La contradicción obtenida demuestra el teorema.

§ 24. Funciones de Morse sobre las variedades tridimensionales y diagramas de Heegard

Consideremos una variedad cerrada conexa compacta suave tridimensional M^3 (para simplificar supongamos la orientabilidad de la variedad M^3); sea $f(x)$ una función suave de Morse sobre esta variedad que tenga exactamente un mínimo (él es absoluto), un máximo (él es absoluto) y cierto número de puntos de índices 1 y 2. Como fue demostrado más arriba, entre todas estas funciones es posible escoger una función tal, que sus puntos críticos sean ordenados en el sentido de que los valores de la función f en M recorren un segmento $[0, 1]$; $f(p) = 0$, $f(p') = 1$, donde p y p' son puntos del mínimo y del máximo respectivamente; luego, todos los puntos críticos de índice 1 se hallan en una superficie de nivel $f = 1/3$; todos los puntos críticos de índice 2 se hallan en una superficie de nivel $f = 2/3$. Designemos a los puntos críticos de índice 1 por $x_1, \ldots, x_{q_1}$, y a los puntos de índice 2 por $y_1, \ldots, y_{q_2}$. De la dualidad de Poincaré (para los coeficientes en el caso de una variedad orientable) se deduce inmediatamente que $q_1 = q_2$, es decir, el número de puntos críticos de índice 1 es igual al número de puntos de índice 2.

Consideremos una superficie de nivel $M^2 = \left\{f = \frac{1}{2}\right\}$; puesto que en ésta no hay puntos críticos y su dimensión es igual a 2, entonces M^2 es difeomorfa a una variedad cerrada conexa compacta suave bidimensional. Como M^2 es una superficie de nivel y un

borde de una variedad tridimensional que se da con una desigualdad $\frac{1}{2} \leqslant f \leqslant 1$, entonces M^2 es una superficie orientable, o sea, es homeomorfa a una esfera con cierta cantidad de asas. Sea r un género (es decir, el número de asas) de la superficie M_r^2. Por construcción, M_r^2 es una variedad que simultáneamente representa un borde de dos variedades tridimensionales: $\{1/2 \leqslant f \leqslant 1\}$ y $\{0 \leqslant f \leqslant 1/2\}$, a las cuales las designemos con Π_1 y Π_2, respectivamente. Para mayor evidencia, se puede considerar cada variedad de Π_i (a propósito, ellas son homeomorfas) como un relleno tridimensional de la superficie bidimensional M_r^2 (de género r), que es sumergida (encajada) regularmente en un espacio euclídeo tridimensional. Así hemos demostrado la siguiente afirmación.

TEOREMA 1. *Cualquier variedad cerrada conexa compacta suave tridimensional puede ser (no unívocamente) representada en forma de «pegadura» de dos variedades tridimensionales Π_i, $i = 1, 2$, con borde, cada una de las cuales es homeomorfa a una variedad tridimensional estándar Π, que es un dominio acotado en un espacio euclídeo tridimensional con una superficie de género r (para cierto r) sumergida en él regularmente. Al mismo tiempo, la pegadura de las variedades Π_1 y Π_2 se realiza por cierto difeomorfismo α de frontera (la frontera es una superficie de género r).*

Esta representación de la variedad M^3 en forma de pegadura de Π_1 y Π_2, $M^3 = \Pi_1 \underset{\alpha}{\cup} \Pi_2$, donde $\alpha: M_r^2 \to M_r^2$, es no unívoca y, además, el número r depende también de la elección de la función de Morse en M^3. Esta representación de M^3 en forma de pegadura de dos superficies llenadas de género r a menudo se llama «diagrama de Heegard» de la variedad M^3; puesto que la pegadura descrita más arriba es dada por el difeomorfismo $\alpha: M_r^2 \to M_r^2$, a veces se dice que está dado un diagrama de Heegard, si es dado el difeomorfismo α. Claro que si dos difeomorfismos α_1 y α_2 son homotópicas en una clase de difeomorfismos, entonces son difeomorfas sus correspondientes variedades tridimensionales $M^3(\alpha_1)$ y $M^3(\alpha_2)$ (obtenidas mediante la pegadura por α_1 y α_2).

Y viceversa, sean dados un diagrama de Heegard, y $M^3(\alpha)$, su correspondiente variedad tridimensional. Entonces es posible construir en esta variedad $M^3(\alpha)$ una función de Morse f, la cual definirá (véase más arriba) la partición de $M^3(\alpha)$ en la unión de dos variedades Π_1 y Π_2 coincidente con el diagrama de Heegard inicial. En realidad, puesto que $M^3(\alpha) = \Pi_1 \underset{\alpha}{\cup} \Pi_2$, entonces es suficiente construir en Π_1 y Π_2 las funciones estándares de Morse f_1 y f_2 con puntos críticos de índices 1 y 2 respectivamente y un punto crítico de índice 0 para la función f_1, y un punto crítico de índice 3 para la función f_2; con esto es necesario escoger las funciones f_1 y f_2 de tal modo, que sean constantes en los bordes de Π_1 y Π_2. Al pegar Π_2

y Π_2 por un difeomorfismo dado, obtenemos en M^3 una función suave de Morse con todas las propiedades necesarias.

Al número r (género de la superficie M_r^2) se le llama género del diagrama de Heegard.

El teorema más arriba demostrado puede ser reformulado de la siguiente manera:

AFIRMACION. *Cualquier variedad compacta suave conexa tridimensional puede ser representada en forma de una unión de dos esferas tridimensionales con asas, cuyas superficies están identificadas mediante cierto homeomorfismo (difeomorfismo).*

La relación con la formulación precedente se realiza así: cada una de las variedades Π_1 y Π_2 es homeomorfa a una esfera con r asas.

En el caso, cuando $r = 0$, la variedad $M^3(\alpha)$ se obtiene mediante pegadura de dos esferas tridimensionales por el difeomorfismo α de sus fronteras, o sea, por el difeomorfismo de una esfera bidimensional en sí misma. Claro, que entonces $M^3(\alpha)$ es difeomorfa a una esfera tridimensional estándar. Consideremos otro caso aun más no trivial y describamos todos los diagramas de Heegard de género 1, es decir, describamos todas aquellas variedades tridimensionales, que se obtienen por medio de la pegadura de dos toros enteros: $\Pi_1 = S^1 \times D^2$, $\Pi_2 = S^1 \times D^2$ por cierto difeomorfismo de sus fronteras, o sea, por el difeomorfismo $\alpha: T^2 \to T^2$, donde T^2 es un toro bidimensional.

TEOREMA 2. *Cualquier variedad cerrada conexa compacta suave tridimensional que tolera el diagrama de Heegard de género* 1, *es homeomorfa (y, por consiguiente, difeomorfa) a una de las siguientes variedades tridimensionales*: 1) *a la esfera estándar* S^3; 2) *a* $S^1 \times S^2$; 3) *a los espacios del lente* $L^3(1, k)$, *donde la variedad* $L^3(1, k)$ *se obtiene de la esfera tridimensional* S^3 *mediante su factorización por una acción suave del grupo* $\mathbb{Z}_p$, *dada por la siguiente fórmula*:

$$(z, w) \to (e^{\frac{2\pi i}{p}} \cdot z; e^{\frac{2\pi i k}{p}} \cdot w);$$

aquí (z, w) *son coordenadas complejas en* $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$; $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$. *El lente* $L^3(1, 1) = S^3/\mathbb{Z}_2$ *es difeomorfo a un espacio proyectivo* $\mathbb{R}P^3$ (para $p = 2$).

DEMOSTRACION. En virtud del teorema precedente basta dar la clasificación de todas las clases de isotopías de difeomorfismos de un toro bidimensional en sí mismo. Puesto que el toro es un espacio de tipo $K(\pi, 1)$, entonces la clasificación homotópica de las aplicaciones continuas del toro en sí mismo se da mediante un conjunto de homomorfismos del grupo fundamental $\pi(S^1 \times S^1)$ en sí mismo; como queremos limitarnos sólo a los difeomorfismos, basta con describir todos los isomorfismos del grupo $\pi_1(S^1 \times S^1)$ en sí mismo. Puesto que el grupo $\pi_1(T^2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, entonces, por consiguiente, el conjunto de todos los difeomorfismos α del toro en sí

mismo (que conservan su orientación) es dado por las matrices unimodulares con coeficientes enteros $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, $ad - bc = 1$; pero si el difeomorfismo cambia la orientación, $ad - bc = -1$. Supongamos que en el toro se han fijado paralelo y meridiano estándares que forman una base en un grupo fundamental (la misma es también un grupo de homologías) respecto a la cual se escribe la matriz $\alpha_* = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$. Hallemos un grupo fundamental de las variedades $M^3(\alpha)$, donde $\alpha_* = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, $ad - bc = 1$. Puesto que M^3 está representada en forma de pegadura de dos toros enteros, cada uno de los cuales es equivalente homotópicamente a una circunferencia, entonces el grupo fundamental M^3 se obtiene así: hay que examinar las generatrices γ_1 y γ_2 y dar la relación entre γ_1 y γ_2 que en este caso concreto tiene la forma $\gamma_1^c = \gamma_2^c = 1$ (la escritura del grupo es multiplicativa). De aquí se deduce, que $\pi_1(M^3(\alpha)) = \mathbb{Z}_c$. Así, por ejemplo, si la matriz $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ es de forma $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, entonces la variedad correspondiente M^3 es homeomorfa al producto directo $S^1 \times S^2$, pero si $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, entonces M^3 es homeomorfa a la esfera S^3. En el primer caso $\pi_1(M^3) = \mathbb{Z}$; en el segundo, $\pi_1(M^3) = 0$. Los dos homeomorfismos ahora representados son evidentes geométricamente: en el primer caso la circunferencia S^1 corresponde a un eje de uno de los toros enteros, y surge una esfera bidimensional como resultado de la identificación de dos discos bidimensionales por una aplicación idéntica de sus fronteras (véase la matriz de pegadura), en el segundo caso dos toros enteros se pegan de tal manera, que cambian de lugares (conservando la orientación del toro); la partición correspondiente de una esfera tridimensional en la suma de dos toros enteros puede ser dada así:

$$\Pi_1 = S^3 \cap \{ |z| \geqslant |w| \}; \quad \Pi_2 = S^3 \cap \{ |z| \leqslant |w| \};$$

hay una transformación ortogonal de la esfera que pasa Π_1 a Π_2 (y viceversa) y que es dada por la fórmula $(z, w) \to (w, z)$. Así hemos hallado el grupo fundamental de variedades $M^3(\alpha)$, donde α da el diagrama de Heegard de género 1. Si el grupo $\pi_1(M^3(\alpha))$ es trivial, entonces $M^3(\alpha)$ es una esfera homotópica (lo que se deduce inmediatamente de la dualidad de Poincaré) y, siendo representada en forma de pegadura de dos toros enteros, es homeomorfa a una esfera estándar.

Si $\pi_1(M^3(\alpha)) = \mathbb{Z}$, entonces $c = 0$, o sea, $ad = 1$; de aquí, o bien $a = d = 1$, o bien $a = d = -1$ (el valor de b es poco importante). Claro que la variedad $M^3(\alpha)$ dada por una matriz con coeficientes enteros $\begin{Vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ es homeomorfa a $S^1 \times S^2$.

Pero si $\pi_1 (M^3 (\alpha)$ es no trivial e isomorfo a $\mathbb{Z}_c$, donde $c \neq 0, 1$, entonces, pasando a un cubrimiento $\widetilde{M}^3 (\alpha)$ obtenemos, que este cubrimiento admite también el diagrama de Heegard de género 1, porque el cubrimiento sobre el toro es regular y de nuevo se presenta como un toro; puesto que, además, $\widetilde{M}^3 (\alpha)$ tiene un grupo fundamental trivial, entonces, en virtud del razonamiento precedente, $\widetilde{M}^3 (\alpha)$ es homeomorfo a una esfera estándar. De aquí se deduce, que la variedad inicial $M^3 (\alpha)$ se obtiene de una esfera tridimensional estándar mediante su factorización por la acción del grupo $\mathbb{Z}_c$ (la acción fue escrita más arriba). El teorema queda demostrado.

Una respuesta tan simple puede ser obtenida sólo para los diagramas de Heegard de género 1; pero si la variedad M^3 no admite ni un solo diagrama de Heegard de género 1, entonces, se complica bruscamente la descripción de M^3.

Completemos la información sobre las variedades del lente $L^3 (1, k)$. Como es evidente de la definición de la acción suave de $\mathbb{Z}_c$ en S^3, un espacio cociente es una variedad, y una proyección $S^3 \to L^3 (1, k)$ es un cubrimiento (la acción del grupo $\mathbb{Z}_c$ en S^3 es libre y efectiva). Es evidente que todas las variedades de lente admiten el diagrama de Heegard de género 1. En realidad, la ecuación $|z| = |w|$ da la partición de S^3 en la suma de dos toros enteros estándares (véase la descripción más arriba): $S^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Con la acción (operación) $(z, w) \to \left(e^{\frac{2\pi i}{c}} \cdot z, e^{\frac{2\pi ik}{c}} \cdot w\right)$ del grupo $\mathbb{Z}_c$, el toro $|z| = |w|$ pasa a sí mismo, y por eso, con la factorización de S^3 por la acción de $\mathbb{Z}_c$, el toro $|z| = |w|$ se proyecta en un toro, que es toro del diagrama de Heegard de la variedad $L^3 (1, k)$. Está claro que la aplicación surgida del toro en sí mismo (cubrimiento) puede ser escrita en los términos de la matriz $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$.

Es fácil mostrar, que las variedades de lente $L^{2n-1} (p_1, \ldots, p_n)$ $L^{2n-1} (p'_1, \ldots, p'_n)$ (dadas por la acción del grupo $\mathbb{Z}_c$ en S^{2n-1} por fórmula:

$$(z_1, \ldots, z_n) \to \left(e^{\frac{2\pi i p_1}{c}} \cdot z_1, e^{\frac{2\pi i p_2}{c}} \cdot z_2, \ldots, e^{\frac{2\pi i p_n}{c}} \cdot z_n\right)$$

son homeomorfas, si para cada i la suma $p_i + p'_i$ o la diferencia $p_i - p'_i$ es múltiplo de c.

El problema de la clasificación de todas las variedades tridimensionales no sólo no ha sido resuelto, sino que incluso se ignora, si en cierto exacto sentido es algorítmicamente resoluble (a semejanza de como es resoluble algorítmicamente el problema de la clasificación de las variedades bidimensionales).

Como fue mostrado más arriba, para hacer una lista que contenga notoriamente todas las variedades tridimensionales (este problema no coincide con el de la clasificación siendo una cuestión más simple), basta con hacer una lista de las clases de los difeomorfismos de la superficie de género r en sí misma. Resulta que es posible hacer tal lista. En la fig. 117 se representa una superficie bidimensional de

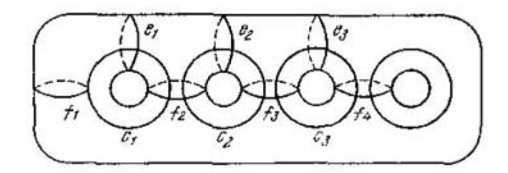


Fig. 117.

género r con tres familias orientadas de las circunferencias c_i, e_i, f_i. A la operación T_s^{ε} ($\varepsilon = \pm 1$), correspondiente a una circunferencia s en la superficie M_r^2 la llamaremos el siguiente difeomorfismo T_s^{ε}: $M_r^2 \to M_r^2$. Designamos por U_s a un λ-entorno cerrado de la circunferencia s, o sea, U_s es difeomorfo a $S^1 \times [0, 1]$. Definimos T_ε con una aplicación idéntica en $M_r^2 \setminus U_s$, y al difeomorfismo T_s^{ε}: $U_s \to \to U_s$ lo construimos girando una circunferencia $S^1 \times t$ en el ángulo $2\pi t$, al mismo tiempo, el signo de ε depende de la dirección de giro. Tiene lugar el siguiente hecho, muy importante y no trivial (cuya demostración omitimos): cualquier clase de difeomorfismos isotópicos de la superficie bidimensional M_r^2 en sí misma tiene un representante que se descompone en el producto (composición) de las operaciones de forma T_s^{ε}, donde s son cualesquiera de las circunferencias de los tres sistemas: c_i, e_i, f_i. De aquí se deduce un corolario: es posible hacer la lista de las clases de difeomorfismos isotópicos de la superficie bidimensional M_r^2, considerando cualesquiera productos finitos de forma $\prod_{j} T_{s_j}^{\varepsilon_j}$, donde $s_j \in (\{c_i\}, \{e_i\}, \{f_i\})$.

§ 25. Periodicidad unitaria de Bott y problemas de variación multidimensionales

En este parágrafo demostraremos un hecho topológico importante llamado habitualmente «periodicidad de Bott»; para simplificar, nos detengamos sólo en el teorema de la periodicidad para un grupo unitario (la así llamada periodicidad ortogonal de Bott se

demuestra con el mismo esquema que la periodicidad unitaria, pero con mayores dificultades técnicas).

I. Teorema de la periodicidad unitaria

El teorema de la periodicidad lo demostraremos en su variante clásica en forma de periodicidad de los grupos homotópicos de un grupo unitario estable, sin examinar detenidamente el papel del teorema de la periodicidad en la teoría de los espacios fibrados vectoriales.

TEOREMA DE LA PERIODICIDAD UNITARIA. *Tiene lugar un isomorfismo:* $\pi_{i-1}SU_{2m} \cong \pi_{i+1}SU_{2m}$ *para* $1 \leqslant i \leqslant 2m$. *Si* $U = \lim\limits_{(m)} U_m$ *(donde* $U_m \subset U_{m+1}$ *es una inmersión estándar), entonces*

$$\pi_{i-1}U = \pi_{i+1}U \text{ para } i \geqslant 1 \text{ y } \pi_{2n}U = 0; \quad \pi_{2n+1}U = \mathbb{Z}.$$

Consideremos el grupo unitario especial SU_{2m} y por $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}; -E_{2m})$ (donde $E_{2m} \in SU_{2m}$ es una transformación idéntica) designamos un espacio funcional de las curvas suaves a trozos, que van en el grupo SU_{2m} del punto E_{2m} al punto $-E_{2m}$. Por $\Omega^*(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ (designamos al espacio completo de todas las curvas (caminos) continuas de E_{2m} a $-E_{2m}$; entonces la inmersión $\Omega \to \Omega^*$ es una equivalencia homotópica (véase más arriba los elementos de la teoría general de Morse para un espacio de bucles en una variedad suave).

Consideremos en un espacio $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ un subespacio $\widetilde{\Omega}$, formado por todas las geodésicas minimales γ (o sea, con las geodésicas de menor longitud), que van del punto E_{2m} al punto $-E_{2m}$.

LEMA 1. *Un espacio* Ω *es homeomorfo a una variedad compleja de Grassmann* $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$, *o sea, a una variedad de las superficies complejas* m*-dimensionales en un espacio lineal* $\mathbb{C}^{2m}$.

DEMOSTRACIÓN. Como fue demostrado en la parte I del libro [1], las geodésicas en el grupo de Lie (respecto a una conexión de Riemann concordada con una métrica invariante en el grupo) son todos los subgrupos uniparamétricos y sus desplazamientos con ayuda de algún elemento arbitrario del grupo. Por eso para describir todas las geodésicas, que unen en el grupo SU_{2m} los puntos E_{2m} y $-E_{2m}$, basta con describir todos los subgrupos uniparamétricos, que salen del punto E_{2m} y terminan en el punto $-E_{2m}$. Puesto que cualquier subgrupo unidimensional $\gamma(t)$ en SU_{2m} es de forma $\exp tX$, donde la matriz X es antihermitiana (es decir, pertenece a un álgebra de Lie su_{2m} del grupo SU_{2m}), entonces, considerando que el parámetro t varía desde 0 hasta 1, obtenemos la condición: $\gamma(0) = E_{2m}$, $\gamma(1) = \exp X = -E_{2m}$. Consideremos la acción adjunta Ad del grupo SU_{2m} en su álgebra de Lie; entonces es bien conocido (por ejemplo, del proceso clásico de ortogonalización en el caso unitario), que hay

tal transformación unitaria $g_0 \in SU_{2m}$, que $g_0 X g_0^{-1} = X_0$, donde

$$X_0 = \begin{Vmatrix} i\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_{2m} \end{Vmatrix}; \quad \varphi_1 + \ldots + \varphi_{2m} = 0.$$

Con otras palabras, la matriz X_0 pertenece a la llamada subálgebra de Cartan del álgebra su_{2m} (es decir, a una subálgebra máxima conmutativa en su_{2m}). Aplicando la transformación Ad_{g_0} a la geodésica $\gamma(t)$, obtenemos:

$$g_0 (\exp X)\, g_0^{-1} = \exp (g_0 X g_0^{-1}) =$$

$$= \begin{Vmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_{2m}} \end{Vmatrix} = g_0 (-E_{2m})\, g_0^{-1} = -E_{2m}.$$

De aquí $\varphi_i = \pi k_i$, $k_i = 2l_i + 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2m$, $l_i \in \mathbb{Z}$; $k_1 + \ldots + k_{2m} = 0$. De manera que hemos descrito todas las geodésicas que unen los puntos E_{2m} y $-E_{2m}$ en SU_{2m}. Queda por escoger de ellas geodésicas de mínima longitud. Puesto que la aplicación exp realiza la isometría con aplicación de una recta tX en la geodésica $\exp(tX)$, entonces basta hallar la longitud de un segmento correspondiente en el álgebra de Lie para calcular la distancia desde E_{2m} hasta $-E_{2m}$ a lo largo de la geodésica $\exp(tX)$. La forma de Killing en el álgebra de Lie su_{2m} es del tipo $Sp\; X\overline{Y}^T = \langle X, Y \rangle$; por consiguiente, la longitud de la geodésica $\exp(tX)$ desde E_{2m} hasta $-E_{2m}$ es igual a

$$\sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{Sp\, X\overline{X}^{T}} = \pi \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} (k_i)^2}.$$

De aquí está claro, que la longitud mínima de la geodésica es igual a $\pi\sqrt{2m}$, o sea, cuando $k_i = \pm 1$. Además, puesto que $Sp\, X = \pi \sum_{i=1}^{2m} k_i = 0$, entonces, la matriz X tiene en la diagonal un número igual de $+1$ y de -1. De manera que hemos mostrado que todas las matrices X son de tal forma, que el $\exp X = -E_{2m}$ y el $\exp tX$

es una geodésica mínima, que se obtienen de la matriz dada

$$X_0 = \left\| \begin{matrix} i & & & & & & 0 \\ & i & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & i & & & \\ & & & & -i & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & -i \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} iE_m & 0 \\ 0 & -iE_m \end{matrix} \right\|$$

mediante el empleo en ella de automorfismos interiores de forma: $X_0 \to gX_0g^{-1}$, donde el elemento g recorre todo el grupo SU_{2m}. Por consiguiente, hemos establecido un homeomorfismo entre un conjunto de todas las geodésicas mínimas y un conjunto de matrices de forma gX_0g^{-1}, donde $g \in SU_{2m}$. Por otro lado, este conjunto de matrices, evidentemente, es homeomorfo a un espacio homogéneo SU_{2m}/CX_0, donde con CX_0 se designa un subgrupo estacionario de la matriz X_0 (o sea, un subgrupo, que forma la matrix X_0 en su sitio con la acción adjunta del grupo SU_{2m}). Puesto que, evidentemente, hay un isomorfismo: $CX_0 = S(U_m \times U_m)$, entonces el espacio SU_{2m}/CX_0 es homeomorfo a una variedad compleja de Grassmann $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$. El lema queda demostrado.

LEMA 2. *Cada geodésica mínima $\gamma(t)$, que une el punto E_{2m} con el punto $-E_{2m}$, es dado unívocamente por su punto medio, es decir, por el punto $\gamma(1/2)$. De tal manera, el conjunto de las geodésicas mínimas, o sea el conjunto de sus puntos medios, es homeomorfo a la variedad de Grassmann y, por otro lado, coincide con la intersección del grupo SU_{2m} con su álgebra de Lie su_{2m}. Con esto, consideramos, que el grupo SU_{2m}, lo mismo que el álgebra de Lie su_{2m} están realizados como subconjuntos en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2m^2}$ de las matrices complejas de dimensión $m \times m$.*

DEMOSTRACION. La primera parte de la afirmación, precisamente, de que cada geodésica mínima es dada unívocamente por su punto medio, se deduce de la fórmula: $\exp(tX) = (\cos \pi t) E_{2m} + (\operatorname{sen} \pi t)X$ Para $t = 0$ obtenemos E_{2m}, para $t = 1$, obtenemos el punto $-E_{2m}$, y para $t = 1/2$ obtenemos la matriz X. De manera que el punto medio de la geodésica $\gamma(t)$ coincide con la matriz X. Claro que el conjunto de las matrices X de tipo gX_0g^{-1} coincide con el conjunto de tales matrices antihermitianas, que además son unitarias, o sea, son soluciones de la ecuación matricial $X^2 = -E_{2m}$. En particular, de aquí es evidente que la variedad de Grassmann $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$ puede considerarse como un conjunto de todas las estructuras complejas unitarias en el espacio $\mathbb{C}^{2m}$. También resulta claro que la intersección del grupo unitario SU_{2m} con un subespacio lineal su_{2m} coincide con el conjunto de matrices X tales, que $X^2 = -E_{2m}$. El lema queda demostrado.

LEMA 3 *Cada geodésica no mínima* γ, *que une el punto* E_{2m} *con el punto* $-E_{2m}$ *en el grupo* SU_{2m} *tiene índice no menor que* $2m+2$.

DEMOSTRACIÓN Por definición de índice de la geodésica, debemos calcular el número de los puntos conjugados con el punto E_{2m} a lo largo de la geodésica γ (en su segmento desde E_{2m} hasta $-E_{2m}$). Partiendo de la fórmula explícita para la ecuación de Jacobi (cuyas soluciones son campos de Jacobi a lo largo de la geodésica), obtenemos que los puntos conjugados son determinados por los números propios positivos de la transformación lineal K_X: $su_{2m}\to su_{2m}$, donde el operador $K_X(Y)=R(X, Y)X=\frac{1}{4}[[X, Y], X]$ está engendrado por el operador de la curvatura de Riemann (que se reduce a conmutador triple para un caso de grupo (véase [1], p. I, §§ 30, 36). Como fue mostrado más arriba, se puede considerar que la matriz X es diagonal y tiene la forma

$$X=\begin{Vmatrix} i\pi k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\pi k_{2m}\end{Vmatrix}, \quad \text{donde } k_i\geqslant k_{i+1}.$$

De la fórmula explícita para el conmutador obtenemos: $[X, Y]=\|i\pi(k_j-k_i)y_{ji}\|$, o sea $K_x(Y)=\left\|\frac{\pi^2}{4}(k_j-k_i)^2y_{ji}\right\|$. El cálculo directo muestra que los valores del parámetro t, con los cuales el punto $\gamma(t)$ está conjugado con el punto E_{2m} (a lo largo de γ), son dados por las fórmulas siguientes: $t=\frac{2}{k_j-k_i}, \frac{4}{k_j-k_i}, \frac{6}{k_j-k_i}, \ldots$ (para cada par i, j). En el intervalo $(0, 1)$ el número de estos puntos conjugados (con i, j fijados) es igual a $\frac{k_j-k_i}{2}-1$. Considerando que $k_j>k_i$, obtenemos que el índice de la geodésica γ es dado por la fórmula

$$\mu=\sum_{k_j>k_i}(k_j-k_i-2).$$

De esta fórmula está claro, que para una geodésica mínima el índice es igual a 0. Sea la geodésica no mínima; examinemos, por separado, dos casos: a) entre los números k_i por lo menos $m+1$ números tienen un signo; b) entre los números k_i se tiene exactamente m números positivos y m negativos, pero no todos ellos son iguales a ±1. Obtenemos, que $\mu\geqslant 2m+2$. El lema queda demostrado.

Pasemos a la demostración del teorema de la periodicidad unitaria, a saber: los grupos homotópicos estables π_iU son periódicos

con período 2. Los grupos $\pi_0 U = \pi_2 U = \pi_4 U = \ldots$ son triviales, y los grupos $\pi_1 U = \pi_3 U = \pi_5 U = \ldots$ son isomorfos al grupo $\mathbb{Z}$.

LEMA 4. *Consideremos la inmersión de un conjunto de las geodésicas mínimas (homeomorfo a una variedad de Grassmann compleja $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$) en el espacio de las curvas* (caminos) $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$. *Entonces esta inmersión (encaje) induce un isomorfismo de los grupos homotópicos en todas las dimensiones que no sobrepasan $2m$. Como tiene lugar la igualdad $\pi_i \Omega X = \pi_{i+1} X$*, obtenemos definitivamente que $\pi_i G_{2m,m}^{\mathbb{C}} = \pi_{i+1} SU_{2m}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos en un espacio de curvas (caminos) $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ una funcional de acción u operación; sus puntos críticos (en los cuales la funcional alcanza el valor mínimo) son geodésicas mínimas, que unen los puntos E_{2m} y $-E_{2m}$ en SU_{2m}; por consiguiente, este conjunto de los mínimos de la funcional es homeomorfo a la variedad $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$. Al mismo tiempo, como fue demostrado más arriba, el índice de los restantes puntos de la funcional (distintos de las geodésicas mínimas) no es menor que $2m+2$. Aplicando a esta funcional la teoría de Morse (para el caso de puntos críticos degenerados que llenan las subvariedades críticas no degeneradas), obtenemos que el espacio de curvas $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ (considerado como un complejo celular infinito) se obtiene de una variedad de los mínimos absolutos de la funcional de acción, pegando a esta variedad (homeomorfa a $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$) las células de las dimensiones no menores que $2m+2$. De aquí se deduce que los grupos homotópicos del espacio $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}; -E_{2m})$ de dimensiones $i \leqslant 2m$, coinciden con los grupos homotópicos de la variedad de los mínimos absolutos de la funcional de acción. El lema queda demostrado.

LEMA 5. *Tiene lugar un isomorfismo:* $\pi_{i-1} U_m = \pi_i G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$ para $i \leqslant 2m$.

DEMOSTRACIÓN (véase [1], p. II, § 24). Consideremos un espacio fibrado estándar $U_{m+1} \xrightarrow{U_m} S^{2m+1}$; de su sucesión homotópica exacta obtenemos inmediatamente que $\pi_{i-1}(U_m) = \pi_{i-1}(U_{m+1})$ para $i \leqslant 2m$. Por otro lado, de la sucesión homotópica exacta del espacio fibrado $U_{2m} \xrightarrow{U_m} U_{2m}/U_m$ obtenemos ahora que $\pi_i(U_{2m}/U_m) = 0$ para $i \leqslant 2m$, lo que equivale a la afirmación del lema. La demostración ha concluido.

Ahora reuniendo todas estas afirmaciones obtenemos, en resumen, el teorema de la periodicidad unitaria:

$$\pi_{i-1} U_m \underset{\cong}{\xrightarrow{\partial}} \pi_i C_{2m,m}^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\simeq}$$
$$\xrightarrow{\simeq} \pi_i \Omega^* (SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m}) \simeq \pi_{i+1} SU_{2m} = \pi_{i+1} U_{2m}.$$

Escribamos explícitamente esta cadena de isomorfismos. Sea f_{i-1}: $S^{i-1} \to U_m$ una aplicación continua que representa una clase homotópica $[f] \in \pi_{i-1} U_m$. Construimos por esta aplicación la aplicación f_{i+1}: $S^{i+1} \to SU_{2m}$. Para ello presentemos el grupo SU_2 como un grupo de matrices $\{p\}$, donde $p = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta_t \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{Vmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, y destaquemos en el grupo SU_2 un subconjunto que es un disco bidimensional $'D^2$, dado por la siguiente condición: $p \in {}'D^2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$. Después sumergimos (encajamos) este disco bidimensional $'D^2$ en el grupo SU_{2m} mediante la fórmula

$$j: p \to p \otimes E_m = \begin{Vmatrix} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \bar{\alpha} E_m \end{Vmatrix}.$$

Luego consideremos en el disco $'D^2$ una curva suave $'\gamma(\beta) = \{p(\alpha, \beta)\ \alpha = i\tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ \tau \geqslant 0\}$; tomamos $\gamma(\beta) = j('\gamma(\beta))$. Vamos a representar los puntos de la variedad de Grassmann $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$ como planos invarientes que responden al valor propio $\lambda = i$ de los operadores g: $\mathbb{C}^{2m} \to \mathbb{C}^{2m}$, $g \in SU_{2m}$, $g^2 = -E_{2m}$. Entonces, para el punto $\gamma \in \tilde{\gamma}(\beta)$ tenemos $\gamma^2 = -E_{2m}$, es decir, $\gamma(\beta) \in G^{\mathbb{C}}_{2m,m} \subset SU_{2m}$ cuando $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Consideremos en $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$ un conjunto de elementos g de la siguiente forma:

$$g = g(\sigma,\ i\tau,\ \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)]\cdot[p(i\tau,\ \beta) \otimes E_m]\cdot[E_m \oplus \oplus f_{i-1}(\sigma)],$$

donde $\sigma \in S^{i-1}, f_{i-1}(\sigma) \in U_m$. Cuando $\beta = 1$, obtenemos una aplicación de la esfera S^{i-1}

$$h: \sigma \to \begin{Vmatrix} 0 & f_{i-1}(\sigma) \\ -f_{i-1}^{-1}(\sigma) & 0 \end{Vmatrix},$$

y para $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, el conjunto $\{g(\sigma,\ i\tau,\ \beta)\}$ se representa en forma de la imagen de una esfera S^i, además, $\{g(\sigma,\ i\tau,\ \beta)\} \in G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$, $\partial[S^i] = [h]$ (donde ∂: $\pi_i G^{\mathbb{C}}_{2m,m} \to \pi_{i-1} U_m$).

TEOREMA 1. (Fomenko). *Sea que f_{i-1}: $S^{i-1} \to U^m$ represente algún elemento de un grupo homotópico $\pi_{i-1} U_m$. En virtud del teorema de la periodicidad, los grupos $\pi_{i-1} U_m$ y $\pi_{i+1} U_m$ son isomorfos. La fórmula explícita de este isomorfismo tiene la forma: $f_{i-1} \to f_{i+1}$, donde*

$$f_{i+1}: S^{i+1} \to U_{2m};\quad f_{i+1}: S^{i+1} \to \{g(\sigma,\ \alpha,\ \beta)\} \subset SU_{2m};$$

$$g(\sigma,\ \alpha,\ \beta) = \begin{Vmatrix} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\varepsilon) & \bar{\alpha} E_m \end{Vmatrix},$$

o sea la relación $f_{i-1} \to f_{i+1}$, que confronta a un elemento del grupo homotópico $\pi_{i-1} U_m$ cierto elemento del grupo homotópico $\pi_{i+1} U_{2m}$, y da un isomorfismo de la periodicidad.

DEMOSTRACION. Consideremos el conjunto $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$, donde

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)] \cdot [p(\alpha, \beta) \oplus E_m] [E_m \oplus f_{i-1}(\sigma)];$$

entonces $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$, evidentemente, se puede representar como la imagen de la esfera S^{i+1} con la aplicación continua $f_{i+1}: S^{i+1} \to \{g(\sigma, \alpha, \beta)\} \subset SU_{2m}$. De manera que si $f_{i-1}(\sigma) \in U_m$ representa en sí cierto elemento del grupo homotópico $\pi_{i-1}U_m$, y así $f_{i+1}S^{i+1} \subset SU_{2m}$, y de la construcción más arriba descrita (teniendo en cuenta los isomorfismos de periodicidad clásicos), se deduce inmediatamente que la correspondencia $f_{i-1} \to f_{i+1}$ engendra el isomorfismo de periodicidad unitaria. La fórmula explícita:

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = f_{i+1}(S^{i+1}) = \begin{Vmatrix} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\sigma) & \bar{\alpha} E_m \end{Vmatrix}$$

se obtiene mediante la combinación del operador de frontera (véase su escritura explícita más arriba) con la aplicación que confronta a cada «esferoide» (o sea aplicación de esfera) formado por un haz de las geodésicas mínimas que van del punto E_{2m} al punto $-E_{2m}$, un esferoide compuesto de todos los puntos medios de las geodésicas de este haz; este esferoide se encuentra en la variedad de Grassmann. El teorema queda demostrado.

De este modo, desde un punto de vista geométrico evidente, el isomorfismo de periodicidad se compone de modo bastante fácil.

PASO 1. Es necesario tomar el esferoide f_{i-1} del grupo U_m y mediante la consideración del operador de frontera ∂: $\pi_i G_{2m,m}^{\mathbb{C}} \to \pi_{i-1} U_m$ pasar este esferoide a un esferoide sumergido en la variedad de Grassmann (véase más arriba la fórmula explícita).

PASO 2. Es necesario tomar el esferoide de Grassmann obtenido en la variedad de Grassmann, presentar esta variedad como intersección del grupo SU_{2m} con su álgebra de Lie SU_{2m} (con su inmersión en un espacio lineal de todas las matrices complejas de tamaño $2m \times 2m$), aprovecharse de que esta intersección coincide exactamente con el conjunto de los puntos medios de todas las geodésicas mínimas que van en el grupo SU_{2m} del punto E_{2m} al punto $-E_{2m}$ y, al examinar todas las geodésicas cuyos puntos medios llenan el esferoide en la variedad de Grassmann, obtener un esferoide (de dimensión mayor en la unidad) ya en el grupo SU_{2m}. Este esferoide es imagen del esferoide inicial f_{i-1} con un isomorfismo de periodicidad. El teorema más arriba demostrado da este isomorfismo con una fórmula explícita.

Si $m = 2$, es posible tomar como aplicación inicial $f_3: S^3 \to SU_2$ la aplicación idéntica $f_3(\sigma) = \begin{Vmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{Vmatrix}$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$; entonces $[f_3] = 1 \in \pi_3 SU_2$. Ahora pasando a $m = 2^2, 2^3, 2^4$, obtenemos

una aplicación $f_{2k+1}: S^{2k+1} \to SU_2^k$, donde $[f_{2k+1}] = 1 \in \pi_{2k+1} SU_2^k$, $k \geqslant 1$. Por último, notemos, que la aplicación f_{2k+1} coincide con la aplicación de la «dualidad» α_{2k+1} conocida en la teoría de álgebras de Clifford y de las representaciones de espinores del grupo ortogonal, sólo si en la definición de esta aplicación se sustituye el campo de coeficientes $\mathbb{C}$ por el campo de los números reales $\mathbb{R}$.

Mostramos esta confrontación, debido a que esto da otra fórmula explícita más para un isomorfismo de periodicidad unitaria haciendo más simple el cuadro geométrico. Vamos a construir la aplicación α_{2k+1} de la siguiente manera. Sean $f: S^{n-1} \to GL(N; \mathbb{C})$, $g: S^{m-1} \to GL(M; \mathbb{C})$, dos aplicaciones continuas. Puesto que $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$, entonces las aplicaciones f y g se pueden prolongar (por homogeneidad) en los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Definamos una aplicación $\omega: \mathbb{R}^{n+m} \setminus 0 \to GL(2MN; \mathbb{C})$, haciendo

$$f * g = \omega(x, y) = \left\| \begin{matrix} f(x) \otimes E_M - E_N \otimes g^*(y) \\ E_N \otimes g(y) f^*(x) \otimes E_N \end{matrix} \right\|,$$

donde $f^* = \overline{f}^T$, $g^* = \overline{g}^T$; $(x, y) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Ya que $\omega = f * g$ está definida en $\mathbb{R}^{n+m} \setminus 0$, entonces surge una aplicación $S^{n+m-1} \to GL(2MN; \mathbb{C})$. Si $\alpha: S^1 \to GL(1; \mathbb{C})$, $\alpha(z) = z$, $|z| = 1$, entonces $'\alpha_{2k+1} = \alpha * \alpha * \ldots * \alpha$ ($2k+1$ veces). Si en calidad de α_{2k+1} se toma la aplicación $S^{2k+1} \to SU_2^k$ correspondiente a la aplicación $'\alpha_{2k+1}$, entonces, evidentemente, obtendremos la identidad $\alpha_{2k+1} \equiv f_{2k+1}$.

II. La periodicidad unitaria desde el punto de vista de los problemas variacionales multidimensionales.

El teorema de periodicidad descrito más arriba se basa en la teoría de funcionales unidimensionales (precisamente, de funcional de acción definida en las trayectorias en un grupo unitario). Resulta que el isomorfismo de periodicidad surge de manera más natural al considerar un problema multidimensional variacional (en el caso dado, bidimensional).

Para un enfoque clásico, el isomorfismo de periodicidad unitaria se descompone en una composición de dos isomorfismos cada uno, de los cuales aumenta la dimensión de un grupo homotópico en la unidad. El hecho de que el aumento exigido de la dimensión en dos unidades se obtenga como resultado de efectuar esos dos pasos (véase su descripción en el parágrafo anterior), corresponde completamente al método de demostración clásica, que utiliza funcionales unidimensionales de acción y longitud definidas en los espacios de aplicaciones de un disco unidimensional D^1 (segmento). Consideremos este proceso con más detalles. Sea fijado un disco unidimensional D^1; $\partial D^1 = S^0$ (esfera de dimensión nula); entonces $\Pi_1 = \Omega(SU_{2m};$

$E_{2m}, -E_{2m})$ es el espacio de las aplicaciones continuas f del disco D^2 en el grupo SU_{2m}, con las cuales $f \mid_{S^0} = i_0 \mid_{S^0}$, donde $i_0 S^0 = (E_{2m}, -E_{2m})$, es decir, la frontera del disco siempre pasa al mismo par de puntos fijados. La funcional de acción E en el espacio $\Pi_1' = \Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ se define así:

$$E_0^1(\omega) = \int_0^1 \left| \frac{d\omega}{dt} \right|^2 dt,$$

donde $\omega(0) = E_{2m}$; $\omega(1) = -E_{2m}$. Con esta funcional está relacionada naturalmente la funcional de longitud $L_0^1(\omega) = \int_0^1 \left| \frac{d\omega}{dt} \right| dt$. Como fue mostrado en la parte I del libro [1], el estudio de los puntos críticos (extremales) de la funcional L se reduce al estudio de las propiedades y extremales de la funcional E. Un conjunto de puntos (trayectorias), en los cuales la funcional de acción E (y, por consiguiente, también la funcional de longitud L) alcanza el mínimo absoluto, es cierto subespacio homeomorfo a la variedad de Grassmann $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$ en el espacio Π_1', y por eso (como se deduce de la teoría unidimensional de Morse), un armazón $(2m)$-dimensional del espacio Π_1 será equivalente homotópicamente a un armazón $(2m)$-dimensional del espacio $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$. En otras palabras, se puede decir que la parte analítica del isomorfismo de periodicidad unitaria está en el isomorfismo

$$\pi_i(C_{2m,\,m}^{\mathbb{C}}) = \pi_i(\Pi_1') = \pi_i(\Pi_1) = \pi_{i+1}(SU_{2m}),$$

por cuanto el siguiente paso: $\pi_i(G_{2m,m}^{\mathbb{C}}) = \pi_{i-1}(U_m)$ es corolario de un hecho ya puramente homotópico que no tiene ninguna relación con la funcional E.

El mecanismo geométrico del isomorfismo de periodicidad arriba descrito sugiere la idea de poder obtener este isomorfismo no en dos pasos, sino en uno, si en lugar del problema variacional unidimensional se utiliza el problema bidimensional, es decir, se escoge una funcional bidimensional conveniente. Resulta que en efecto hay tal posibilidad; en particular, esto hará más simple el cuadro geométrico del isomorfismo de periodicidad. Pasemos a estudiar el problema variacional multidimensional.

Considerando las funcionales bidimensionales en un espacio de aplicaciones escogido especialmente, obtendremos un isomorfismo de periodicidad. Examinemos en el grupo SU_{2m} una circunferencia sumergida (encajada)

$$S_0^1 = \begin{Vmatrix} \alpha E_m & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} E_m \end{Vmatrix}, \quad |\alpha| = 1,$$

que es un subgrupo uniparamétrico, y la fijemos. Aquí actuamos por analogía con el caso unidimensional, cuando en el grupo SU_{2m} se fijaba una esfera de dimensión nula $S^0 = \{E_{2m}, -E_{2m}\}$. Sea D^2 un disco bidimensional con frontera S^1 en su métrica euclídea estándar; fijemos la aplicación f_0: $S^1 \to SU_{2m}$, que pasa isométricamente la circunferencia S^1 a la circunferencia S^1_0.

Con Π_2 designemos al espacio topológico de todas las aplicaciones continuas f: $D^2 \to SU_{2m}$ tales, que $f \mid_{S^1} = f_0$. El espacio Π_2 es de tipo homotópico de un complejo celular. Consideremos un subespacio $\Pi'_2 \subset \Pi_2$ formado con todas las aplicaciones f de un espacio funcional $H^2_1(D^2)$, donde el espacio $H^2_1(D_2)$ fue definido más abajo para un planteamiento cuidadoso y exacto del problema.

Sea G un dominio en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^\nu(x^1, \ldots, x^\nu)$. Diremos que la función u: $G \to \mathbb{R}$ pertenece a una clase de funciones $H^p_m(G)$ si, y sólo si: 1) $u \in L_p(G)$, es decir, si es sumable en el grado p: 2) existen «derivadas generalizadas» $D^\alpha u$, o sea, tales funciones $r_\alpha \in L_p(G)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, que para cualquier función infinitamente suave finita g es justa la identidad:

$$\int_G g(x)\, r_\alpha(x)\, dx = \int_G D^\alpha g(x) | u(x)\, dx.$$

Aquí $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$; $D^\alpha g = \partial^\alpha(g)/(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^\nu)^{\alpha_\nu}$. Si $m = 1$, entonces $|\alpha| = 1$.

Si f: $D^2 \to SU_{2m}$, entonces $f \in H^2_1(D^2)$ si, y sólo si, las funciones de coordenadas engendradas por esta aplicación pertenecen a $H^2_1(D^2)$. Cambiamos la exigencia de suavidad a trozos de la aplicación f en el caso unidimensional (que es necesario para construir la teoría unidimensional de Morse) por la exigencia de pertenencia de la aplicación f a la clase $H^2_1(D^2)$.

Definamos en el espacio Π'_2 la funcional de Dirichlet D: $\Pi'_2 \to \mathbb{R}$, que confronta a cada aplicación $f \in \Pi'_2$ el valor de la integral de Dirichlet $D[f]$ en la aplicación f (véase la definición más abajo). Esta funcional de Dirichlet es un análogo bidimensional de una funcional unidimensional de acción, mientras que la funcional de área bidimensional es análogo de una funcional unidimensional de longitud (véase [1], p. II, § 32). Recordemos la definición de la funcional de Dirichlet. Las funciones $r_\alpha(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ se llaman derivadas de la función u y se designan por $D^\alpha(u)$ o $u,_\alpha$; si $\alpha = 0$, entonces $u,_\alpha = u$. Sean M y V variedades de Riemann con tensores métricos $g_{ij}(x)$, $x \in M$; $\hat{g}_{\alpha\beta}(v)$, $v \in V$. Con cada aplicación f: $V \to M$, donde $f \in H^2_1[V, M]$, se vinculan los tensores de un tipo mixto; así, por ejemplo, $x^i_\alpha = x^i,_\alpha$, donde x^i son coordenadas locales del puntos $x = f(v) \in M$, y la diferenciación se comprende en el sentido

arriba indicado. Designemos por ∇_α a una derivada covariante total del tensor mixto. Definimos un producto escalar de dos tensores x^i_α e y^j_β, suponiendo $(x^i_\alpha, y^j_\beta) = \hat{g}_{\alpha\beta} g_{ij} x^i_\alpha y^j_\beta$. Ahora sea $f \in H^n_1 [V, M]$; hacemos

$$D[f] = \int_V \left[\frac{1}{n} (x^i_\alpha, x^j_\beta) \right]^{\frac{n}{2}} dv,$$

donde dv es un elemento de volumen de Riemann en una variedad de Riemann V, y $n = \dim V$. La aplicación $f \in H^n_1 [V, M]$ se llama armónica, si $\delta D [f; \eta] = 0$ para cualquier campo vectorial $\eta (f)$ de clase H^n_1 definida en $f(V)$. La correspondiente ecuación de Euler para la funcional $D[f]$ tiene la siguiente forma: $\nabla^\alpha \nabla_\alpha x^i = 0$. Esto se verifica por el cálculo directo.

En nuestro caso en calidad de variedad V tomamos el disco bidimensional D^2; entonces $\hat{g}^{\alpha\beta}(v) = \delta^{\alpha\beta}$, y la funcional de Dirichlet (análogo bidimensional de la funcional de acción) $D[f]$ toma la forma

$$D[f] = \frac{1}{2} \int_V [(x^i_1, x^j_1) + (x^i_2, x^j_2)]\, dv = \frac{1}{2} \int_V g_{ij} (x^i_1 x^j_1 + x^i_2 x^j_2)\, dv,$$

donde g_{ij} es una métrica del grupo SU_{2m}.

Con esto, el grupo está realizado en el espacio S^{N-1} y la métrica g_{ij} es la restricción de una métrica euclídea. La primera variación δD de la funcional D tiene la forma $\delta D [f; \eta] = \int_V (x^i_\alpha, \nabla_\beta \eta^j)\, dv$.

Si el disco bidimensional D^2 se da paramétricamente con ayuda de las coordenadas euclídeas u y v, obtendremos:

$$D[f] = \frac{1}{2} \int_V [(x_u, x_u) + (x_v, x_v)]\, du\, dv, \qquad x = (x^1, \ldots, x^p),$$

$P = \dim M$; $\delta D [f; \eta] =$

$$= \int_V \left[\left(\frac{D\eta}{du} ; x_u \right) + \left(\frac{D\eta}{dv}, x_v \right) \right] du\, dv; \qquad \eta \in H^2_1 (D^2).$$

Consideremos en el espacio de las aplicaciones Π'_2 una funcional más $A[f]$, que confronta a cada aplicación $f \in \Pi'_2$ el valor de la siguiente integral: $\int_V \sqrt{\det \Omega}\, du\, dv$, donde

$$\Omega = \begin{Vmatrix} (x_u, x_u) & (x_u, x_v) \\ (x_u, x_v) & (x_v, x_v) \end{Vmatrix}.$$

o sea, la funcional $A[f]$ es una funcional del área bidimensional. Es bien conocido (véase [1], pág. 363), que tiene lugar una desigualdad $A[f] \leqslant D[f]$, al mismo tiempo, la igualdad se consigue si, y sólo si, la aplicación f es generalizado-conforme. Por ejemplo, para el caso de las superficies mínimas bidimensionales en un espacio euclídeo tridimensional, esto significa que un radio vector mínimo de superficie siempre es armónico en las coordenadas conformes (es decir, en tales coordenadas, donde la métrica de Riemann inducida tiene forma diagonal). Notemos que aquí se observa también la analogía con el caso unidimensional (véase más arriba el espacio de curvas con extremos fijados), a saber: Las funcionales de acción E y de longitud L están relacionadas con una correlación analógica: $L^2(\omega) \leqslant E(\omega)$, al mismo tiempo, la igualdad se consigue si y sólo si la aplicación ω da una geodésica mínima (perteneciente al parámetro natural), que va del punto $\omega(0)$ al punto $\omega(1)$.

Lo mismo que la funcional de acción E, la funcional de Dirichlet bidimensional D permite excluir todas aquellas aplicaciones f, que se distinguen de una aplicación armónica f_0 sólo por el cambio continuo de los parámetros en el disco D^2, lo que no cambia el valor de la funcional del área pero, hablando en general, cambia el valor de la funcional de Dirichlet.

Notemos para lo sucesivo, que tiene lugar el isomorfismo β_2: $\pi_s(\Pi_2) \cong \pi_{s+2}(SU_{2m})$ y que el espacio Π_2 es equivalente homotópicamente al espacio $\widetilde{\Pi}_2$ de todas las aplicaciones continuas $S^2 \to SU_{2m}$ con un punto fijado. La primera afirmación es un corolario evidente de la sucesión exacta de un espacio fibrado de bucles dobles.

TEOREMA 2. (Fomenko). *Consideremos el grupo SU_{2m} y los espacios funcionales Π_2 y Π_2'. En el espacio Π_2' examinemos un subconjunto W consistente en todos los puntos (o sea, aplicaciones continuas) f, sobre los cuales la funcional de Dirichlet $D[f]$ tiene un mínimo absoluto. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) *el conjunto W es homeomorfo (como un espacio topológico) a un grupo U_m;*

b) *la inmersión (encaje) i: $W \to \Pi_2' \to \Pi_2$ induce un isomorfismo de grupos homotópicos i_*: $\pi_s U_m \to \pi_s \Pi_2$ para $s \leqslant 2m$; por eso el armazón $(2m)$-dimensional del espacio Π_2 es equivalente homotópicamente al armazón $(2m)$-dimensional del grupo U_m, y la composición $\beta_2 \circ i_*$: $\pi_s U_m \to \pi_{s+2} SU_{2m}$ es un isomorfismo de periodicidad unitaria con $s \leqslant 2m$. De manera que la utilización de la funcional de Dirichlet bidimensional y la consideración del conjunto de sus mínimos absolutos permite obtener el isomorfismo de periodicidad unitaria en un paso (de una vez, con aumentar la dimensión de los grupos homotópicos en dos unidades), a diferencia de «dos pasos» con empleo de las funcionales unidimensionales de acción y de longitud.*

La demostración del teorema la hacemos en forma de una cadena

de los siguientes lemas. Al principio, consideremos en el grupo SU_{2m} una esfera bidimensional definida por la fórmula:

$$S_0^2 = \begin{Vmatrix} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \bar{\alpha} E_m \end{Vmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Una de las semiesferas, precisamente, la esfera dada por la desigualdad $\beta \geqslant 0$ coincide con un disco bidimensional D_0^2, cuya inmersión en el grupo SU_{2m} ha sido realizado más arriba. El ecuador $\{\beta = 0\}$ de la esfera S_0^2 es la circunferencia S_0^1. Puesto que la inmersión de la esfera $S_0^2 \to SU_{2m}$ se prolonga hasta la inmersión $SU_2 \to SU_{2m}$, entonces la esfera S_0^2 es una subvariedad completamente geodésica en el grupo SU_{2m}, y más aún subvariedad mínima. Recordemos que la subvariedad se llama completamente geodésica, si cualquier geodésica tangente a esta subvariedad en algún punto se encuentra enteramente en ésta. El hecho de que cualquier subvariedad completamente geodésica es localmente mínima, se deduce de la forma explícita del tensor de curvatura de Riemann, restringido en una subvariedad completamente geodésica. En un grupo de Lie, el tensor de curvatura de Riemann en una subvariedad completamente geodésica es una parte del tensor de Riemann en un grupo abrazado, este tensor se descompone en suma directa.

De manera que también el disco D_0^2 es una subvariedad completamente geodésica en el grupo SU_{2m}. Consideremos un conjunto W' de los discos completamente geodésicos $D^2(x) \subset SU_{2m}$, que son de forma $D^2(x) = xD_0^2x^{-1}$, donde $x \in SU_{2m}$ y $xsx^{-1} \equiv s$ para cualquier $s \in S_0^1$.

LEMA 6. *El conjunto W' es homeomorfo al espacio U_m.*

DEMOSTRACION. Sea $D^2(x) \in W'$; entonces $xs = sx$ para cualquier $s \in S_0^1$. Puesto que $S_0^1 = \{\alpha E_m + \bar{\alpha} E_m, \ |\alpha| = 1\}$, entonces de aquí se deduce que $x = A \oplus D$, donde $A, D \in U_m$, es decir, $x = (E_m \oplus DA^{-1})(A \oplus A) = x_1(A \oplus A)$, $x_1 = E_m \oplus DA^{-1}$. Puesto que $(A \oplus A)\,d = d\cdot(A \oplus A)$ para cualquier $d \in D_0^2$ y cualquier $A \in U_m$, entonces

$$D^2(x) = D^2(x_1) = \begin{Vmatrix} \alpha E_m & \beta C \\ -\beta C^{-1} & \bar{\alpha} E_m \end{Vmatrix}, \quad C = DA^{-1}.$$

Como $\beta \geqslant 0$, la matriz C se define por esta condición unívocamente. Así, a cada disco $D^2(x)$ le confrontamos un elemento $C \in U_m$, donde $C = C[D^2(x)]$. Sea $C[D^2(x)] = C[D^2(x')]$; entonces es evidente que $x' \cdot x^{-1} \in \{A \oplus A\}$, y por eso los discos $D^2(x)$ y $D^2(x')$ coinciden. Por el contrario, si $C \in U_m$, entonces $C = C[D^2(x)]$, donde $x = E_m \oplus C$, o sea, la correspondencia construida $D^2(x) \to C[D^2(x)]$ es el homeomorfismo necesario entre W' y U_m. El lema queda demostrado.

Ahora vamos a construir la inmersión (el encaje) $i\colon U_m \to \Pi_2'$. Sea $g \in U_m$; entonces se construye por este elemento unívocamente $\in U_m$; entonces se construye por este elemento unívocamente un disco bidimensional

$$D^2(E_m \oplus g) = \left\| \begin{matrix} \alpha E_m & \beta g \\ -\beta g^{-1} & \bar{\alpha} E_m \end{matrix} \right\|,$$

al mismo tiempo, si $g_1 \neq g_2$, entonces $D^2(E_m \oplus g_1) \cap D^2(E_m \oplus \oplus g_2) = S_0^1$. Sea $i_0\colon D^2 \to D_0^2$ nuestra aplicación fijada. Hacemos $i(g)\xi = (E_m \oplus g)\cdot i_0(\xi)\cdot(E_m \oplus g^{-1})$, donde $\xi \in D^2$. Claro que $i\colon g \to i(g)$ es la inmersión buscada $U_m \to \Pi_2'$. Del lema arriba demostrado, se deduce que el conjunto de aplicaciones $i(U_m) \subset \Pi_2'$ coincide con un conjunto de aplicaciones del tipo $\mathrm{Ad}_x \circ i_0$, donde el elemento x recorre todo el grupo $G = \{A \oplus A\} \subset U_{2m}$; $G \cong U_m$, es decir, el conjunto $i(U_m)$ es la órbita del punto $i_0 \in \Pi_2'$ con la acción adjunta del grupo G en el conjunto de aplicaciones Π_2.

LEMA 7. *El homomorfismo $\beta_2 \circ i_*\colon \pi_s(U_m) \to \pi_{s+2}(SU_{2m})$ coincide con un isomorfismo de periodicidad unitaria.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f\colon S^s \to U_m$, $f \in \{f\} \in \pi_s(U_m)$, $\sigma \in S^s$. Entonces

$$[(\beta_2) \circ i_*](f)(\sigma) = D^2[E_m \oplus f(\sigma)] = \left\| \begin{matrix} \alpha E_m & \beta f(\sigma) \\ -\beta f^{-1}(\sigma) & \bar{\alpha} E_m \end{matrix} \right\|.$$

Se deduce inmediatamente del parágrafo precedente y de la teoría unidimensional de Morse, que el homomorfismo $\beta_2 \circ i_*$ coincide con el isomorfismo de periodicidad unitaria, si $s \leqslant 2m$. Puesto que β_2 es un isomorfismo en cualquier dimensión, de aquí se deduce que el homomorfismo $i_*\colon \pi_s(U_m) \to \pi_s(\Pi_2)$ es también isomorfismo para $s \leqslant 2m$, y por eso un armazón $(2m)$-dimensional Π_2 es equivalente homotópicamente a un armazón $(2m)$-dimensional $i(U_m)$. El lema queda demostrado.

Así la inmersión $i\colon U_m \to \Pi_2$ satisface todas las condiciones necesarias. Queda por mostrar que está cumplida la igualdad: $i(U_m) = W$.

Consideremos un espacio euclídeo $\mathbb{R}^{8m^2}$ identificable con un espacio complejo $\mathbb{C}^{4m^2}$ de todas las matrices complejas de dimensión $2m \times 2m$, con una forma bilineal $\varphi(A, B) = \mathrm{Re}(Sp\, AB^*)$, $B^* = \bar{B}^T$. Entonces el grupo SU_{2m} se sumerge isométricamente en la esfera S^{8m^2-1} de radio $\sqrt{2m}$ como una subvariedad suave, en la cual se induce una métrica de Riemann especial, invariante respecto a los desplazamientos derechos e izquierdos en el grupo SU_{2m}. Esta métrica, evidentemente, coincide con la métrica de Killing. Por eso a muchas relaciones métricas en el grupo SU_{2m} es útil considerarlas desde el punto de vista de la esfera abrazante S^{8m^2-1}. Obtengamos el

primer corolario de la existencia de esta inmersión isométrica del grupo en la esfera. Por ejemplo, en el grupo SU_{2m} no existen tales variaciones infinitamente pequeñas (perturbaciones) del disco bidimensional D_0^2 que dejan inmóvil la frontera de este disco $S_0^1 = \partial D_0^2$ que el disco perturbado $\widetilde{D}_0^2$ sea un disco mínimo en el grupo SU_{2m}, pero no completamente geodésico. En efecto, sea que existe tal variación. Notemos que la circunferencia $S_0^1 \subset SU_{2m} \subset S^{8m^2-1}$ es una circunferencia de un círculo máximo en la esfera S^{8m^2-1}, y el disco D_0^2 es una sección plana central de la esfera S^{8m^2-1} por un plano tridimensional pasante por el origen de las coordenadas en $\mathbb{R}^{8m^2}$. Puesto que el disco $\widetilde{D}_0^2$ (por suposición) no es completamente geodésico en el grupo SU_{2m}, entonces él no es tampoco completamente geodésico en la esfera S^{8m^2-1}, o sea él no se obtiene del disco D_0^2 mediante un giro en torno a la circunferencia S_0^1. De aquí se deduce que su área es estrictamente mayor que el área del disco D_0^2 en aproximación lineal, o sea, $\delta A > 0$. Por eso el disco $\widetilde{D}_0^2$ no es un disco mínimo, lo que contradice la suposición. Así, cualquier variación de cualquier disco $D^2(x) \in W'$ o bien deja completamente geodésico el disco $D^2(x)$ (y entonces esta variación se reduce al giro del disco en torno a su circunferencia de frontera S_0^1 con ayuda de algún automorfismo interior del grupo abrazante SU_{2m}), o bien destruye su mínimo local (por lo menos, en un punto interior).

LEMA 8. *Tiene una implicación: $i(U_m) \subset W$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que cada aplicación $f \in i(U_m)$ tiene forma $f = Ad_x i_0$, $x \in G$, entonces basta con verificar que el punto i_0 es un punto de mínimo absoluto para la funcional de Dirichlet D. Puesto que $SU_{2m} \subset S^{8m^2-1}$, y el disco D_0^2 es una sección plana central de la esfera S^{8m^2-1}, entonces la aplicación i_0 es un punto de mínimo absoluto para la funcional de área A. Ya que cualquier vector mínimo es también armónico (en las coordenadas locales correspondientes), entonces esta aplicación i_0 es un punto crítico también para la funcional de Dirichlet D (notemos además que la armonía generalizada de la aplicación i_0 se deduce asimismo de la construcción explícita de la aplicación i_0; véase más arriba). Como siempre se cumple la desigualdad $A[f] \leqslant D[f]$, está claro que la aplicación i_0 es un punto de mínimo absoluto para la funcional de Dirichlet D. El lema queda demostrado.

LEMA 9. *Tiene lugar la igualdad $i(U_m) = W$, donde W es el conjunto de los puntos de mínimo absoluto de la funcional de Dirichlet D.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f: D^2 \to SU_{2m}$, $f \mid_{S^1} = i_0$ es un punto de mínimo absoluto de la funcional de Dirichlet D. En el lema precedente se demostró que el valor de la funcional D en los puntos de mínimo absoluto es igual a $D[i_0]$, y que este valor es igual a $A[i_0]$. Puesto que $A[f] \leqslant D[f] = D[i_0] = A[i_0]$, entonces $A[f] \leqslant A[i_0]$, pero

ya que esta relación es posible considerarla en una métrica estándar de la esfera S^{8m^2-1}, es evidente que $A[f] = A[i_0]$, y entonces $fD^2 \subset S^{8m^2-1}$ es una sección plana central; además, la aplicación f es armónica. Prolonguemos un disco completamente geodésico fD^2 hasta la esfera S^2, que es completamente geodésica, en la esfera S^{8m^2-1} (y, por lo tanto, completamente geodésica en el grupo SU_{2m}). Hemos obtenido en el grupo SU_{2m} dos esferas completamente geodésicas: S_0^2 y $\widetilde{S}^2$, con esto, $S_0^2 \cap \widetilde{S}^2 \supset S_0^1 \ni E_{2m}$. Los subgrupos mínimos que contienen estas esferas S_0^2 y $\widetilde{S}^2$, son los subgrupos G_1 y G_2 isomorfos al grupo SU_2. Las dos inmersiones (encajes) α_1: $G_1 \to SU_{2m}$; α_2: $G_2 \to SU_{2m}$ definen dos representaciones exactas del grupo SU_2 en el grupo SU_{2m}. Ya que el rango $(SU_2) = 1$, se puede considerar que la circunferencia S_0^1 es una imagen de un toro máximo $T^1 = S^1 \subset SU_2$ además, $S_0^1 \subset T^{2m-1}$, donde T^{2m-1} es un toro máximo en el grupo SU_{2m}. Puesto que dos representaciones j_1 y j_2 coinciden en el toro T^1 (T^1 es un subgrupo máximo conmutativo en el grupo SU_2; en el caso dado este toro es unidimensional y homeomorfo a la circunferencia), entonces ellas son equivalentes, es decir, hay un elemento $x \in SU_{2m}$ tal, que se cumple la igualdad: $j_1 = \mathrm{Ad}_x \cdot j_2$. Dos esferas S_0^2 y xS^2x^{-1} inmersas (encajadas) en el grupo G_1 se pueden hacer coincidir mediante un automorfismo interior más Ad_{x_1}; entonces en la esfera S_0^2 obtenemos dos geodésicas: S_0^1 y $x_1xS_0^1x^{-1}x_1^{-1}$. Por consiguiente, hay un elemento $x_2 \in G_1$ tal, que $S_0^1 \equiv x_2x_1xS_0^1x^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$. Por eso el automorfismo Ad_y, donde $y = x_2x_1x$, pasa la aplicación f a la aplicación i_0, dejando en su lugar la circunferencia S_0^1, o sea, $f \in i\,(U_m)$. El lema queda demostrado.

De manera que está concluida completamente la demostración del teorema.

Notemos que todos los puntos del conjunto W son no simplemente puntos minimales para ambas funcionales A y D, sino que incluso puntos «completamente geodésicos» (es decir, aplicaciones completamente geodésicas). Esta circunstancia ha tenido lugar también en el caso unidimensional, pero allí el mínimo de alguna trayectoria lleva tras sí automáticamente el hecho de que esta trayectoria es geodésica; empero en el caso bidimensional del hecho de que el disco bidimensional D^2 sea mínimo, no se deduce en absoluto que éste sea completamente geodésico en un grupo abrazante. Es más, los únicos discos completamente geodésicos D^2 con frontera S_0^1 son discos del conjunto W'; en otras palabras, si la aplicación $f \in \Pi_2'$ es un punto crítico para la funcional D y si, además, el disco fD^2 es completamente geodésico, tenemos $f \in W$.

III. Periodicidad ortogonal desde el punto de vista de los problemas de variación multidimensionales.

Un teorema análogo al teorema más arriba demostrado de la

periodicidad unitaria, tiene lugar también para un grupo ortogonal (y se llama, respectivamente, teorema de periodicidad ortogonal) de Bott.

TEOREMA 8. *Se tiene un isomorfismo* $\pi_i(O) \cong \pi_{i+8}(O)$, *donde* O *es un grupo ortogonal estable:* $O = \varinjlim O_n$; $O_n \subset O_{n+1}$, *son inmersiones estándares. Además, los grupos homotópicos estables de un grupo ortogonal son de la forma:*

$$\pi_0 = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_1 = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_2 = 0, \quad \pi_3 = \mathbb{Z}, \quad \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = 0,$$
$$\pi_7 = \mathbb{Z}, \quad \pi_i = \pi_{i+8}.$$

Demostraremos sólo la primera parte de este resultado, además, utilizaremos de inmediato el aparato de los problemas de variación multidimensionales. Es que la demostración estándar del teorema de periodicidad ortogonal que utiliza la teoría unidimensional de Morse, consta de ocho pasos (por analogía con la demostración estándar de la periodicidad unitaria de dos pasos), mientras la utilización de la funcional de Dirichlet definida en un espacio de aplicaciones de los discos octadimensionales (en vez de los bidimensionales de periodicidad unitaria), nos permitirá a la vez, o sea, en un paso, obtener el isomorfismo: $\pi_i(O) = \pi_{i+8}(O)$ (aunque un poco no estrictamente).

Consideremos un espacio euclídeo $\mathbb{R}^{p^2}$ de matrices reales de dimensión $p \times p$; el producto euclídeo escalar puede ser escrito de la forma: $\varphi(A, B) = \mathrm{Sp}(AB^T)$. Entonces el grupo SO_p se sumerge isométricamente en una esfera estándar S^{p^2-1} de radio $\sqrt{p}$ (con centro en el punto 0) como una subvariedad suave, en la cual una métrica euclídea $\varphi(A, B)$ induce a una métrica bilateral invariante de Riemann coincidente con la forma de Killing. El álgebra de Lie so_p del grupo SO_p está sumergida en el espacio $\mathbb{R}^{p^2}$ como un subespacio de las matrices X, $X^T = -X$, y la intersección $so_p \cap SO_p$ es un espacio compacto simétrico $SO_p/U_{(p/2)}$, si p es par. Designamos a la intersección $so_p \cap SO_p$ por $\Omega_1(p)$; entonces, es evidente que la variedad $\Omega_1(p)$ se compone exactamente de tales elementos $g \in SO_p$, para los cuales se cumple la igualdad $g^2 = -E$, o sea, $\Omega_1(p)$ coincide con un conjunto de las estructuras complejas en $\mathbb{R}^p$. Ahora tomemos $p = 16r$; entonces en el grupo SO_{16r} hay ocho «estructuras complejas» anticonmutadoras, o sea operadores a los cuales vamos a designarlos por $J_1, J_2, \ldots, J_8$; $J_s^2 = -E$, $J_sJ_k + J_kJ_s = 0$, $k \neq 8$. Todos los vectores J_s $(1 \leqslant s \leqslant 8)$ se encuentran en el plano so_{16r} y, en virtud de la condición de anticonmutatividad, todos ellos son ortogonales de par en par. Además, cada vector J_r es ortogonal al vector $E \in SO_{16r}$, por eso la esfera $S_0^8 = \{x \in SO_{16r} \mid x = a^0E + a^1J_1 + \ldots + a^8J_8;\ (a^0)^2 + \ldots + (a^8)^2 = 1\}$ es una sección plana de la esfera S^q (donde $q = 256r^2 - 1$), pasante por el origen de las coordenadas y, por consiguiente, completamente geodésica en la esfera S^q y en el grupo $SO_{16r} \subset S^q$. Claro que se cumple la igualdad $S_0^8 \cap so_{16r} = S_0^8 \cap$

$\cap \Omega(16r) = \overline{S}_0^7$, donde $\overline{S}_0^7$ es un ecuador completamente geodésico, dado por la ecuación $a^0 = 0$. Fijemos en el grupo SO_{16r} una esfera completamente geodésica $S_0^7 = \{x = a^0E + a^1J_1 + \ldots + a^7J_7; (a^0)^2 + \ldots + (a^7)^2 = 1\}$; la esfera S_0^7 es una frontera de un disco octadimensional completamente geodésico $D_0^8 \subset S_0^8$, $D_0^8 = \{x \in S_0^8; a^8 \geqslant 0\}$. Sea D^8 un disco octadimensional estándar en una métrica euclídea, $S^7 = \partial D^8$, i'' es una aplicación estándar de D^8 en una semiesfera, idéntica en la frontera ∂D^8, i' es la única inmersión isométrica de la semiesfera $i''D^8$ en el grupo SO_{16r}, coincidente en la esfera $i''S^7$ con una inmersión isométrica fijada j_0: $S^7 \to S_0^7$. Hagamos $i_0 = i' \circ i''$, i_0: $D^8 \to SO_{16r}$. Consideremos el espacio Π_8 de todas las aplicaciones continuas $f: D^8 \to SO_{16r}$ tales, que $f \mid_{S^7} = j_0$. Sea $\Pi_8' \subset \Pi_8$ un subespacio consistente en todas las aplicaciones f de la clase $H_1^8(D^8)$ del disco D^8 en el grupo SO_{16r}. Consideremos en el espacio Π_8' dos funcionales: $A[f]$ que es una funcional del área $A[f] = \int_{D^8} \sqrt{\det \Omega}\, dv$ y una funcional de Dirichlet

$$D[f] = \int_{D^8} \left[\frac{1}{8}(x_\alpha^i, x_\beta^j)\right]^4 dv = \int_{D^8} \left[\frac{1}{8}\sum_{\alpha=1}^{8} g_{ij}(x_\alpha^i, x_\alpha^j)\right]^4 dv.$$

Entonces $A[f] \leqslant D[f]$ con cualquier $f \in \Pi_8'$.

Designemos por β_8 a un isomorfismo estándar de los grupos homotópicos $\pi_s(\Pi_8) \cong \pi_{s+8}(SO_{16r})$.

TEOREMA 4 (Fomenko). *Consideremos el grupo SO_{16r} y los espacios funcionales Π_8 y Π_8' de las aplicaciones de los discos octadimensionales en un grupo ortogonal. En el espacio Π_8' consideramos un subconjunto W consistente en todos aquellos puntos (aplicaciones) f, en los cuales la funcional de Dirichlet $D[f]$ tiene un mínimo absoluto. Entonces tenemos que:*

a) *el conjunto W es homeomorfo a un grupo ortogonal O_r;*

b) *la inmersión i: $W \to \Pi_8' \to \Pi_8$ induce un isomorfismo de los grupos homotópicos i_*: $\pi_s(O_r) \to \pi_s(\Pi_8)$ para $s \leqslant r-2$; por eso un armazón $(r-2)$-dimensional del espacio Π_8 es homotópicamente equivalente a un armazón $(r-2)$-dimensional del grupo O_r y la composición $\beta_8 \circ i_*$: $\pi_s(O_r) \xrightarrow{\approx} \pi_{s+8}(SO_{16r})$ es un isomorfismo de periodicidad ortogonal con $s \leqslant r-2$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Puesto que el grupo $\pi_2(U_{2m})$ es trivial, entonces el espacio Π_2 es conexo. Puesto que $\pi_8(SO_{16r}) = \mathbb{Z}_2$, el espacio Π_8 es inconexo y se compone de dos componentes conexos; como será evidente más abajo de la demostración, el conjunto W también se compone de dos componentes conexos, al mismo tiempo cada componente del espacio Π_8 contiene exactamente un componente del conjunto W y se contrae (cuando $r \to \infty$) exactamente en este componente de conexión.

Ahora consideremos en el grupo SO_{16r} un subconjunto Ω_8 consistente en todas las estructuras complejas J, las cuales anticonmutan con las estructuras $J_1, J_2, \ldots, J_7$ (véase más arriba su descripción), es decir que anticonmutan, de este modo, con cada punto de una esfera hexadimensional estándar $S_0^6 \subset S_0^7$, dada por la igualdad $a^0 = 0$. Así, por ejemplo, está claro que $J_8 \in \Omega_8$. El cálculo algebraico directo muestra que el espacio Ω_8 se compone de dos componentes de conexión y, además, es homeomorfo al grupo O_r. Luego, el espacio Ω_8 se contiene por completo en un plano ortogonal a todos los vectores $E, J_1, \ldots, J_8$. Claro, que $S_0^8 \cap \Omega_8 = \{J_8; -J_8\}$, y por eso la intersección $D_0^8 \cap \Omega_8 = J_8$ es un punto.

Asignemos a cada punto $x \in \Omega_8$ una esfera completamente geodésica $S^8(x)$, que tiene como ecuador la esfera estándar S_0^7. Si $x \in \Omega_8$, entonces el vector x es ortogonal a los vectores $E, J_1, \ldots, J_7$ ($xJ_s = -J_s x$, $1 \leqslant s \leqslant 7$, y el vector E es ortogonal a todas las estructuras complejas). Por eso la esfera, tendida en los vectores básicos $E, J_1, \ldots, J_7, x$, es una sección plana central en la esfera S^q y es completamente geodésica en el grupo SO_{16r}. Consideremos en la esfera $S^8(x)$ el disco

$$D^8(x) = \{y \in S^8(x);\quad y = y^0E + \ldots + y^7J_7 + y^8x;\\ y^8 \geqslant 0\}.$$

Entonces a cada vector $x \in \Omega_8$ le corresponde unívocamente un disco completamente geodésico $D^8(x)$ tal, que $\partial D^8(x) = S_0^7$, y si $x_1 \neq x_2$, entonces $D^8(x_1) \cap D^8(x_2) = S_0^7$. Lo mismo que en el caso de la periodicidad unitaria, es posible definir la inmersión (el encaje) $i\colon O_r \xrightarrow{\approx} \Omega_0 \to \Pi_8' \to \Pi_8$, ya que para cualquier disco $D^8(x)$, $x \in \Omega_8$, existe la única isometría $\omega(x)\colon i''\colon D^8 \to D^8(x)$, $\omega(x) \circ i'' \mid_{S^7} = i_0$; entonces $i(x) = \omega(x) \circ i''$.

LEMA 10. *La inmersión $i\colon O_r \to \Pi_8$ induce un isomorfismo de los grupos homotópicos hasta la dimensión $r-2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea que la aplicación $f\colon S^s \to O_r$ represente un elemento de un grupo homotópico: $[f] \in \pi_s(O_r)$; entonces en el grupo SO_{16r} obtenemos un conjunto $\{D^8(x)\}$, $x \in f(S^s)$; $\Pi_8' \ni i(x)$. Ya que la esfera S_0^7 está fijada, en el grupo SO_{16r} surge un subconjunto $\overline{S} = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^8(x)$, que define la aplicación $F\colon S^{s+8} \to SO_{16r}$ tal, que $F\mid_{S^s} = f$ (la esfera S^s es un ecuador en la esfera S^{s+8}). Ahora consideremos la sucesión de las esferas de dimensión nula $S_k^0 = \{J_k, -J_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant 7$. Fijando la esfera S_7^0, podemos construir una correspondencia $\gamma_7\colon x \to D^1(x)$, donde el punto $x \in \Omega_8$, la trayectoria $D^1(x)$ es una geodésica minimal del punto J_7 al punto $-J_7$, cuyo punto medio es x. Entonces $D^1(x) \in \Omega_7$, y existe una aplicación $F_7\colon S^{s+1} \to$

$\to \Omega_7$ tal, que se tiene una correlación:

$$F_7 S^{s+1} = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^1(x), \quad F_7|_{S^s} = f,$$

con esto, de la teoría unidimensional de Morse se deduce que la correspondencia $f \to F_7$ define el isomorfismo de los grupos homotópicos $\pi_s(\Omega_8) \xrightarrow{\simeq} \pi_{s+1}(\Omega_7)$. Fijando una esfera de dimensión nula S_6^0, obtenemos la correspondencia: γ_6: $y \to D^1(y)$, $y \in \Omega_7$; está claro, que existe la aplicación

$$F_6 : S^{s+2} \to \Omega_6; \quad F_6 S^{s+2} = \bigcap_{y \in F_7(S^{s+1})} D^1(y); \quad F_6|_{S^{s+1}} = F_7.$$

Continuando este proceso obtenemos las correspondencias: γ_7, γ_6, ..., γ_1, γ_0, donde $E = J_0$; la aplicación F_0: $S^{s+8} \to \Omega_0 = SO_{16r}$, además, la aplicación F_0 corresponde a la aplicación f para un isomorfismo de periodicidad; $F_0 S^{s+8} = FS^{s+8}$, porque $\bigcup_{x \in f(S^s)} [\gamma_0 \circ \gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_7(x)] = \overline{S}$. Por eso es posible considerar que $F_0 \underset{\beta_8}{\equiv} F$. Esto concluye la demostración del lema, ya que $\pi_s(\Pi_8) = \pi_{s+8}(SO_{16r})$.

De manera que para un subespacio $i(O_r) \subset \Pi_8$ se cumplen todas las afirmaciones del punto b) del teorema demostrable por nosotros. Queda para probar que se ha cumplido la igualdad $W = i(O_r)$.

LEMA 11. *Se cumple la relación*: $i(O_r) \subset W$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que el disco $i(x)$ (D^8) es una sección plana central, entonces la afirmación del presente lema se demuestra de la misma manera que la afirmación correspondiente en el teorema sobre la periodicidad unitaria, es decir, se deduce de la desigualdad $A[f] \leqslant D[f]$.

LEMA 12. *Es justa la relación*: $i(O_r) = W$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in W$, es decir que la funcional D tome en la aplicación f su valor mínimo. Sea i_0: $D^8 \to D_0^8$ (véase más arriba); entonces, es evidente que $A[i_0] = D[i_0]$. Ya que $A[f] \leqslant D[f] = D[i_0] = A[i_0]$, entonces lo mismo que al demostrar el correspondiente lema de periodicidad unitaria, se determina que el disco $f(D^8)$ es una sección plana central, que contiene la esfera S_0^7 en calidad de frontera. Sea $x \in f(D^8)$ y el vector x sea ortogonal a todos los vectores $E, J_1, \ldots, J_7$; entonces tenemos: $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, donde γ es una geodésica en el disco $f(D^8)$, $\gamma(0) = E$, $\gamma(1) = -E$. La longitud $L(\gamma)$ es igual a $L(\gamma')$, donde la geodésica γ' se contiene en el disco $f(D^8)$ y es tal, que $\gamma'(0) = E$, $\gamma'(1) = -E$, $\gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = J_1$. Por eso γ es una geodésica minimal del punto E al punto $-E$ en el grupo SO_{16r}. De aquí tenemos: $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \in \Omega_1$, es decir, $x^2 = -E$.

Puesto que el vector x es ortogonal a todos los vectores J_s $(1 \leqslant s \leqslant 7)$, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + J_s) \in \Omega_1$, o sea, $\frac{1}{2}(x + J_s)^2 = -E$. Por consiguiente, $xJ_s + J_s x = 0$, o sea, $x \in \Omega_8$. Por eso $f \in i\ (O_r)$ puesto que $f\ (D^8) = D^8\ (x)$. El lema queda demostrado. De esta manera, está concluida la demostración de la periodicidad ortogonal aunque no rigurosamente, sin recurrir a la teoría «unidimensional» de Morse.

Claro que se tiene un teorema completamente análogo también en el caso de un grupo simpléctico Sp_n Omitimos las formulaciones y demostración dejándolas al lector como un ejercicio útil en la técnica de los problemas de variación multidimensionales.

PROBLEMA 1. Demostrar que se tienen las siguientes equivalencias homotópicas: a) $BSp = \Omega\Omega\Omega\ SO$; b) $BO = \Omega\Omega\Omega\ Sp$ utilizando el mismo método. Obtener de estas igualdades los ocho primeros grupos homotópicos: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$, 0, $\mathbb{Z}$, 0, 0, 0, $\mathbb{Z}$.

En el caso de la periodicidad unitaria hemos tenido la siguiente afirmación útil: el conjunto $i\ (U_m) \subset \Pi_2$ es una órbita del punto $i_0 \in \Pi_2$ con la acción adjunta del grupo $G \subset U_{2m}$, donde $G \cong U_m$, en un conjunto de aplicaciones Π_2. En el caso de la periodicidad ortogonal la afirmación análoga es justa para $i\ (O_r)$, aunque no hemos utilizado este hecho al demostrar el teorema.

AFIRMACIÓN 1. *El conjunto $W = i\ (O_r)$ sumergido (encajado) en el espacio Π_8 es una órbita del punto $i_0 \subset \Pi_8$ con la acción adjunta del grupo $G \subset SO_{16r}$ en el conjunto de todas las aplicaciones Π_8, donde $G = J_8\Omega_8 \simeq O_r$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta con probar que para cualquier disco completamente geodésico $D^8\ (x)$, donde $x \in \Omega_8$ hay un elemento $g \in SO_{16r}$ tal, que se cumplen las igualdades: $gJ_s = J_s g$ $(1 \leqslant s \leqslant 7)$ y $gxg^{-1} = J_8$. Consideremos $g \in SO_{16r}$, $gJ_s = J_s g$ $(1 \leqslant s \leqslant 7)$; entonces $g\Omega_8 g^{-1} \subset \Omega_8$ y $(gD_0^8 g^{-1}) \cap \Omega_8 = gJ_8 g^{-1}$, es decir, $gD^8\ (x)\ g^{-1} = D^8\ (gxg^{-1})$. Sea R el subgrupo de todos los elementos $g \in SO_{16r}$ tales, que $gJ_s = J_s g$ $(1 \leqslant s \leqslant 7)$, y sea $p\ (g) = gJ_8 g^{-1}$ una proyección natural $p\colon R \to \Omega_8$. Consideremos en el grupo SO_{16r} un desplazamiento $g \to J_8 g$. Sean $g \in R$, $g = \exp A$, $A \in T_E R$. Puesto que $gJ_s = J_s g$, luego $AJ_s = J_s A$. Entonces es fácil ver que $J_8 g$ anticonmuta con J_s $(1 \leqslant s \leqslant 7)$, es decir, $J_s g \in \Omega_8$, $J_8 R \subset \Omega_8$. Y viceversa, sea $J_8 \exp A \in \Omega_8$; entonces $AJ_s = J_s A$ $(1 \leqslant s \leqslant 7)$, o bien $gJ_s = J_s g$, donde $g = \exp A$ (o sea, $g \in R$, $J_8 R \supset \Omega_8$). De aquí obtenemos: $\Omega_8 = J_8 R$. Por eso la proyección p es un difeomorfismo y para cualquier $x \in \Omega_8$ hay un elemento $g \in R$ tal, que $x = gJ_8 g^{-1}$. La proposición queda demostrada.

CONCLUSION. Se deduce de los teoremas más arriba demostrados, que el mecanismo del surgimiento de la periodicidad unitaria, lo mismo que la ortogonal, es el mismo y el resultado definitivo depende del hecho de en qué espacio consideramos una funcional multidi-

mensional de Dirichlet; en el caso del espacio de las aplicaciones de los discos bidimensionales obtenemos la periodicidad unitaria, y en el caso del espacio de aplicaciones de los discos octadimensionales, la ortogonal.

Sería interesante obtener una demostración directa de estos dos teoremas, la cual no utiliza alguna información relacionada con las funcionales unidimensionales de acción y longitud. La demostración directa se deduciría inmediatamente del hecho de la contractilidad de un armazón $(2m)$-dimensional del espacio Ω_2 (respectivamente, de un armazón $(r - 2)$-dimensional del espacio Ω_8) en el subespacio $i(U_m)$ (respectivamente, $i(O_r)$), que es el conjunto de los puntos del mínimo absoluto de la funcional de Dirichlet. Exactamente el teorema respectivo de la contractilidad para una funcional de acción (véase la teoría clásica de Morse en un espacio de bucles) permite realizar el paso: $\pi_{i-1}(G^{\mathbb{C}}_{2m,m}) \cong \pi_{i-1}(\Omega_1)$. Aún no existe minguna afirmación análoga para los problemas de variación multidimensionales. Esto está ligado con las dificultades que surgen con estudiar los problemas multidimensionales de «tipo de Plateau», cuando una funcional multidimensional puede degenerarse en ciertos subconjuntos de medida positiva, que se contienen en subvariedades extremales.

§ 26. Teoría de Morse y algunos movimientos en el problema plano de n cuerpos

En este parágrafo examinaremos algunos movimientos del problema plano de n cuerpos. Como se sabe, es posible considerar en una primera aproximación que los planetas reales del sistema solar se mueven en un plano llamado plano de la eclíptica. El centro de las masas de todo este sistema es posible considerarlo con elevado grado de exactitud coincidente con la posición del Sol. El movimiento del sistema está dirigido por el potencial de Newton conforme a las leyes de la mecánica clásica. Como siempre, el movimiento del sistema se determina con los dados iniciales: hay que definir las posiciones de las masas gravitantes y sus velacidades en un momento inicial del tiempo. Es bien conocido que las soluciones generales de este sistema son muy complicadas (por ejemplo, según el teorema clásico de Bruns — Poincaré, el sistema no admite integrales analíticas de movimiento sobrantes).

Sin embargo, a pesar de la complejidad del problema general, es posible destacar algunas subclases naturales en la multitud de todas las soluciones que admiten una descripción bastante simple. Una de estas subclases es así llamadas «soluciones del sólido», o sea, tales soluciones particulares, con las cuales el movimiento de todo el sistema de los cuerpos se representa como un giro simultáneo, de todas las masas del sistema en el mismo ángulo en el plano de la eclíp-

tica. En otras palabras, todo el sistema como un sólido gira en torno a su centro de masas; en este caso particular no se cambian las posiciones mutuas de todos los cuerpos del sistema y no dependen del tiempo. A tales soluciones periódicas se las llaman a veces en la literatura especializada «trayectorias circulares». Un hecho notable es la circunstancia de que la descripción de tales «soluciones del sólido» del problema de n cuerpos se reduce a la descripción de los puntos críticos de cierta función de Morse, además, la información topológica relacionada naturalmente con las funciones de Morse sobre las variedades suaves (véase más arriba), permite hacer importantes declaraciones cualitativas sobre la estructura geométrica de estas soluciones circulares. Por ejemplo, es muy interesante el problema: cuál es la configuración formada en un plano bidimensional por n cuerpos del sistema movientes en correspondencia con la «solución de sólido» del sistema. Está claro que no toda configuración ni mucho menos de n puntos sobre un plano puede generar las trayectorias circulares del sistema. Como resulta, tales configuraciones singulares se determinan con un juego de las masas de los cuerpos del sistema y en el caso, cuando todas las masas, salvo una, son iguales, se definen con ciertos grupos discretos de simetrías.

A tales configuraciones se las llaman a veces equilibrios relativos del sistema.

Ahora pasemos a plantear el problema exactamente. El problema plano de n cuerpos de la mecánica celeste se determina completamente con un juego de n números reales positivos $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Vamos a considerar, que todos los n cuerpos se representan con n puntos de un plano bidimensional euclídeo. Sea que el origen de las coordenadas, el punto 0, coincida con el centro de las masas del sistema de n cuerpos. Demos la posición de cada j-ésimo punto en un plano con una coordenada compleja $z_j = x_j + iy_j$; puesto que 0 es un centro de las masas del sistema, tenemos una relación: $\sum_{j=1}^{n} m_j z_j = 0$. De tal manera, un espacio configurado del sistema es un subespacio lineal $M^{2n} - 2$ (hiperplano complejo) en un espacio euclídeo $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$:

$$M^{2n-2} = \left\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{j=1}^{n} m_j z_j = 0 \right\}.$$

Un espacio de fase del sistema es un espacio fibrado tangente $TM = M \times M$ (producto directo).

La energía cinética del sistema K es definida por la fórmula

$$K(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i |v_i|^2.$$

donde v es un vector de velocidad, $\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = 0$, $|v_i|$ es la longitud euclídea del vector en el plano $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2$ (n veces).

Consideremos en un espacio configurado del sistema un subconjunto singular consistente en un juego de los hiperplanos «bisectores», precisamente:

$$\Delta_{ij} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\}; \quad \Delta = \bigcup_{i,j} \Delta_{ij}.$$

La energía potencial del sistema se da como una función en un espacio configurado $M \setminus \Delta$, donde

$$V(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|}.$$

De manera que las ecuaciones clásicas de Newton definen un campo vectorial X en un espacio fibrado cotangente $T = T(M \setminus \Delta)$. El espacio configurado del sistema es $(M \setminus \Delta)$, y el espacio de fase es $T^*(M \setminus \Delta)$.

La energía completa E: $T \to \mathbb{R}^1$ se define por la fórmula: $E = K + V$. Tenemos en las coordenadas (z, v): $E(z, v) = K(v) + V(z)$; la función $E(z, v)$ definida en $T^*(M \setminus \Delta)$ es la primera integral del flujo X, es decir, la función $E(z, v)$ es constante en cada trayectoria integral $(z(t), v(t))$ del sistema X. A la par con esta integral el sistema X admite una integral más (no dependiente funcionalmente de la integral E en los puntos de la posición general en $T(M \setminus \Delta)$) que es un momento de impulso designado por J y definido por la fórmula:

$$J(z, v) = \sum_{i=1}^{n} m_i [z_i \wedge v_i],$$

donde por $[z_i \wedge v_i]$ está designado un producto vectorial (o un producto exterior de dos 1-formas):

$$z_i^1 v_i^2 - z_i^2 v_i^1, \quad \text{donde} \quad z_i = (z_i^1, z_i^2); \quad v_i = (v_i^1, v_i^2)$$

son coordenadas cartesianas de los vectores z_i y v_i en un plano $\mathbb{R}^2$.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ una acción estándar de un grupo $G = S^1$ (giros en torno al centro de masas); entonces esta acción genera una acción por coordenadas evidente en $M \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2$ (n veces) también en un espacio fibrado tangente TM. Con esto un grupo G conserva (transforma en sí) los planos «bisectores» $\Delta_{ij} = (z_i = z_j)$; por consiguiente, el grupo G queda invariantes a M/Δ, $T(M \setminus \Delta)$, K, J, V, E, X. De tal modo, el flujo X determina naturalmente un sistema dinámico en un espacio cociente: $T(M \setminus \Delta)/G = T((M \setminus \Delta)/G)$. Ya que es posible factorizar por acción los grupos

de alargamiento $z \to \lambda z$ en $\mathbb{C}^n$, entonces, definitivamente, podemos reducir el sistema a un sistema en $T(\mathbb{C}P^{n-1} \setminus \tilde{\Delta})$, donde $\tilde{\Delta}$ es un factor Δ por dos acciones más arriba mencionadas de los grupos: de rotaciones y de alargamientos. Esta factorización la utilizaremos más tarde, y ahora volvamos a un sistema inicial en $T(M \setminus \Delta)$.

La existencia de dos integrales E y J permite definir una aplicación I: $I \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ por la fórmula: $I(\xi) = (E(\xi), J(\xi)) \in \mathbb{R}^2$, donde $\xi = (z, v) \in T(M \setminus \Delta) = T$. La aplicación I: $T \to \mathbb{R}^2$ es suave; consideremos un espacio fibrado de la variedad T en las preimágenes $I_{c,p} = I^{-1}(c, p)$, donde $(c, p) \in \mathbb{R}^2$; $E(\xi) = c$, $J(\xi) = p$. Las preimágenes $I_{c,p}$ son (para casi todos los puntos $(c, p) \in \mathbb{R}^2$) subvariedades suaves de codimensión 2 en la variedad $T = T(M \setminus \Delta)$. Está claro de la definición de I, que todas las superficies $I_{c,p}$ son superficies comunes de nivel de dos integrales: E y J y tienen (en los puntos de la posición general) una dimensión $4n - 4 - 2 = 4n - 6$, ya que $\dim T = 4n - 4$.

LEMA 1. *Las variedades $I_{c,p}$ son invariantes respecto a la acción del grupo $G = S^1$ y respecto al flujo X.*

La demostración se deduce inmediatamente de la descripción de la acción de S^1 en $\mathbb{C}^n \setminus \Delta$ y en $T(\mathbb{C}^n \setminus \Delta)$.

Puesto que $I_{c,p}$ (o sea, la superficie de energía constante $E = c$ y del momento de impulso $J = p$) es invariante con la acción de S^1, entonces está definido correctamente un espacio cociente $\tilde{I}_{c,p} = I_{c,p}/S^1$.

Uno de los problemas resolubles en los límites de la mecánica celesta clásica consiste en dar una descripción de la estructura topológica de las superficies $I_{c,p}$ e $\tilde{I}_{c,p}$. Ahora vamos a considerar trayectorias circulares en el problema de n cuerpos.

Sean fijadas las masas $m_1, \ldots, m_n$; entonces la configuración $z = (z_1, \ldots, z_n)$ (que es dada con las posiciones de los puntos $z_1, \ldots, z_n$, donde $\sum m_i z_i = 0$) se llama equilibrio relativo (el conjunto de tales configuraciones se designa por R_e), si la acción estándar de S^1 en $\mathbb{R}^2$ (y, por consiguiente, en $\mathbb{C}^n$) induce el movimiento $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$, que satisface las ecuaciones del movimiento de Newton. En otras palabras, cada punto z_i circunscribe una circunferencia $z_i(t)$, conservando con esto las posiciones recíprocas de los puntos $z_1, \ldots, z_n$.

El conjunto $R_e \subset M \setminus \Delta$, evidentemente, es invariante respecto a la acción de S^1 y la multiplicación por un escalar (o sea, respecto a la transformación $z \to \lambda z$, $\lambda \neq 0$), por eso está definido correctamente un conjunto Φ_n de las clases de equivalencia en R_e (dos configuraciones z y z' se consideran equivalentes, si es posible hacer coincidirlas mediante un giro ortogonal y la multiplicación por un escalar).

Resulta que con pequeños n el conjunto Φ_n puede ser descrito efectivamente (véase esto más abajo).

Ahora pasemos a describir los equilibrios relativos por puntos críticos de una función V (potencial).

Consideremos en $M \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$, que se da con una forma simétrica $K(\xi, \eta) = \sum m_i \xi^i \eta^i$ (K es la energía cinética del sistema); designemos por $S_K = S_K^{2n-1}$ a una esfera unidad en M respecto a este producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$: $S_K = \{z \in M \mid K(z, z) = 1\}$. Con esto utilizamos el hecho de que M es isométrica a cada espacio tangente suyo (utilizamos el hecho de que $M \setminus \Delta$ es un dominio $2n$-dimensional en un espacio lineal $\mathbb{R}^{2n}$). Por $S_K \setminus \Delta$ designemos a un complemento en S_K a los planos bisectores Δ, es decir, $S_K \setminus \Delta = S_K \setminus (S_K \cap \Delta)$. Notemos, que es posible describir las superficies de nivel $I_{c,p}$ en términos de las variedades $S_K \setminus \Delta$. En efecto, consideremos para un ejemplo un caso particular: el movimiento del sistema por la superficie de nivel $I_{c,0}$, que tiene valor nulo del momento de cantidad de movimiento. Si $J(z, v) = 0$, tenemos: $\Sigma m_i [z_i \wedge v_i] = \sum m_i (z_i^1 v_i^2 - z_i^2 v_i^1) = 0$. De aquí se deduce la siguiente afirmación geométrica.

PROPOSICIÓN 1 (Smale). *En el problema plano de n cuerpos con las masas $m_1, \ldots, m_n$ el movimiento de un sistema dinámico con un momento nulo de impulso es realizado por una superficie de nivel de dos primeras integrales $E = c =$ const, $J = p = 0$, es decir, por una superficie integral $I_{c,0}$, donde la superficie $I_{c,0}$ tiene la siguiente estructura topológica:*

a) *si la energía $E = c$ es no negativa, entonces $I_{c,0}$ es difeomorfa a un producto directo $S^{2n-4} \times (S_K \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^1$; la dimensión de $I_{c,0}$ es igual a $(2n-4) + (2n-2-1) + 1 = 4n-6$;*

b) *si la energía $E = c$ es negativa, entonces la superficie $I_{c,0}$ es difeomorfa a un producto directo $\mathbb{R}^{2n-3} \times (S_K \setminus \Delta)$; la dimensión de $I_{c,0}$ es igual a $((2n-3) + (2n-2-1) = 4n-6$.*

Las superficies $I_{c,p}$ correspondientes a los valores constantes de energía y de momento (ya con valores arbitrarios de c y p), también pueden ser descritas bastante simplemente en los términos de algunos espacios fibrados de Riemann sobre el espacio $S_K \setminus \Delta$. Puesto que la estructura topológica de $I_{c,p}$ no será utilizada en las siguientes construcciones, omitimos esa descripción.

Ahora formularemos un teorema básico del presente parágrafo.

TEOREMA 1 (Smale). *Sea dado un juego arbitrario de las masas $m_1, \ldots, m_n$ que define el problema plano de n cuerpos. Consideremos una variedad S_K: $\{K(z) = 1\}$; $\dim S_K = 2n-3$, y consideremos sobre la variedad $S_K \setminus \Delta$ una función suave V_S que es una restricción en $S_K \setminus \Delta \subset M \setminus \Delta$ del potencial V dado en $M \setminus \Delta$; sea el punto $z \in M \setminus \Delta$ tal, que $K(z) = 1$, o sea, es posible considerar, que $z \in S_K \setminus \Delta$. Entonces el punto z (configuración de n cuerpos) es un equilibrio rela-*

tivo, si, y sólo si, z es un punto crítico para la función V_S en $S_K \setminus \Delta$. Puesto que los equilibrios relativos z y z' = λz los consideremos equivalentes, entonces en cada clase de Φ_n se tiene sin falta un punto z tal, que K (z) = 1, por eso los puntos críticos de la función V_S en la variedad $S_K \setminus \Delta$ describen todo Φ_n, es decir las clases de los equilibrios relativos equivalentes.

La demostración de este teorema será dada más abajo. Ahora presentemos (sin demostración) algunos resultados de un carácter clasificatorio sobre las clases de los equilibrios relativos equivalentes.

En el caso del problema de dos cuerpos ($n = 2$) se tiene sólo una clase de los equilibrios relativos equivalentes. Para tres cuerpos ($n = 3$) se tienen cinco clases de los equilibrios relativos equivalentes. Dos clases se distinguen una de otra por la orientación y se representan geométricamente por los vértices de un triángulo equilátero (llamado caso de Lagrange). Otras tres clases están formadas con los llamados equilibrios relativos colineales (caso de Euler). Esto significa que todos tres puntos z_1, z_2, z_3 se encuentran en una misma recta, y hay tres diferentes métodos de la posición de los puntos z_1, z_2, z_3 en la recta, los cuales satisfacen las ecuaciones de movimiento de Newton.

Un problema no solucionado: ¿es finito el conjunto Φ_n (es decir, un conjunto de clases diferentes de equilibrios relativos equivalentes) para cualquier juego de masas $m_1, \ldots, m_n$? En todos los ejemplos conocidos (examinados hasta el fin) el conjunto Φ_n es finito.

Pasemos a demostrar el teorema básico. Este es un corolario de un resultado general de la teoría de los sistemas de Hamilton.

Sea M —variedad suave— un espacio configurado de cierto sistema mecánico, sea $T = TM$ un espacio de fase del sistema; la energía cinética K es posible interpretarla como una métrica de Riemann sobre la variedad M, es decir, es posible comprender la forma K_z como un producto escalar en un espacio tangente T_zM. La energía completa E la escribamos de la forma $E = K + V$. Considerando dadas todas las magnitudes arriba definidas, podemos con ayuda de las ecuaciones de Hamilton (o de Lagrange) determinar las ecuaciones diferenciales ordinarias en un espacio fibrado tangente (o cotangente), es decir, un campo vectorial suave en $T = TV$. Estas mismas ecuaciones se pueden interpretar como ecuaciones diferenciales de segundo orden en la variedad M (véase [1], p. I, cap. 5).

Ahora supongamos que este sistema de Lagrange tiene cierto grupo configurado de simetrías. Esto significa que en la variedad M actúa suavemente cierto grupo de Lie G que conserva la métrica de Riemann K y la energía potencial V (dada «casi por doquier» en la variedad M). En otras palabras, G es un subgrupo de un grupo de isometrías de la métrica de Riemann K; las condiciones arriba descritas, significan que el grupo G conserva también un respectivo sistema de Hamilton (engendrado por K, V). En particular, el potencial V es constante en las órbitas del grupo G.

AFIRMACIÓN 1. *Sean: M, K, V, G, un sistema mecánico con el grupo de simetrías G; M, un espacio configurado; K, la energía cinética (ella es una métrica de Riemann); V, un potencial en $M \setminus \Delta$, donde* vol $(\Delta) = 0$; *K y V son invariantes respecto* a *G.* Sea $X \in \mathfrak{g}$, *donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie del grupo G. Al elemento X es posible interpretarlo como un campo vectorial suave X sobre la variedad M; designemos por ψ_t las trayectorias integrales del flujo X, es decir, las soluciones del sistema $\dot{z} = X(z)$. Designamos con φ_t las trayectorias integrales de un esquema mecánico inicial, es decir, las soluciones en la variedad M de una ecuación de segundo orden, definida por la energía completa $E = K + V$. Entonces la solución de $\psi_t(z)$ coincide con la solución de $\varphi_t(z)$ (o sea, para todo t: $\psi_t(z) = \varphi_t(z)$) si y sólo si, el punto inicial z es un punto crítico de una función f sobre la variedad M, la cual es dada por la fórmula $f(z) = V(z) - K(X(z))$. Para $V \equiv 0$ obtenemos la descripción de aquellas geodésicas (de la métrica K), las cuales coinciden con las órbitas de la acción de cierto subgrupo uniparamétrico de un grupo de isometrías.*

La demostración de este hecho se deduce elementalmente del hecho de que nuestra condición es simplemente la condición de tangencia de un flujo de Hamilton en $T(M)$ con el flujo X levantado en $T(M)$. Ahora mostremos cómo se deduce de aquí el teorema fundamental de este parágrafo.

A la par con la función V en M consideremos una función nueva V_p definida en el conjunto $M \setminus \Delta$ y dada por la fórmula $V_p(z) = V(z) + p^2/4K(z)$, donde p es un momento de impulso.

Hemos introducido más arriba el espacio $S_K = \{K(z) = 1\}$; de la definición de M se deduce que $M \setminus 0$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^+ \times S_K$, donde como $\mathbb{R}^+$ se designa un semieje real positivo; el difeomorfismo buscado f: $M \setminus 0 \to S_K \times \mathbb{R}^+$ se da por la fórmula:

$$f(z) = (\sqrt{K(z)};\quad z/\sqrt{K(z)});\quad \sqrt{K(z)} \in \mathbb{R}^+,\quad z/\sqrt{K(z)} \in S_K.$$

Es evidente que la restricción de la aplicación f en el espacio $M \setminus \Delta$ transforma a $M \setminus \Delta$ difeomorfamente en $\mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta)$. Consideremos la función V_S en $S_K \setminus \Delta$ como la restricción del potencial V en una subvariedad $S_K \setminus \Delta \subset M \setminus \Delta$; sea $\sigma(d)$ la designación del conjunto de los puntos críticos de una aplicación d.

Demostremos las dos relaciones siguientes:

$$\text{A.}\quad \sigma(V_p) = \{(t, x) \in (M \setminus \Delta) \approx \mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta) \mid x \in \sigma(V_S),\ t = -p^2/2V(x)\}$$

donde $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in S_K \setminus \Delta$, $z = (t, x)$.

$$\text{B.}\quad \sigma(V - K(X)) = \{z = (t, x) \in (M \setminus \Delta) \approx \mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta) \mid x \in \sigma(V_S),\ t = \sqrt[3]{-V(x)/2K(X)}\}.$$

Notemos que se cumplen las siguientes igualdades evidentes: $K(z) = t^2$ (véase la representación del punto z en forma (t, x)), $V(z) = V(t, x) = V(x)/t$ (véase la fórmula explícita para el potencial $V(z)$ en el problema plano de n cuerpos). Demostremos la relación A.

El punto $z = (t, x)$ es crítico para la función V_p si, y sólo si, son iguales a cero las derivadas parciales: $\partial_t V_p = 0$, $\partial_x V_p = 0$ $\left(\text{donde } \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}\right)$. De aquí obtenemos:

$$\partial_t V_p(t, x) = \partial_t \left(V(z) + \frac{p^2}{4K(z)}\right) = \partial_t \left(\frac{V(x)}{t} + \frac{p^2}{4t^2}\right) =$$
$$= -\frac{V(x)}{t^2} - \frac{p^2}{2t^3} = 0,$$

es decir, tenemos: $t = -p^2/2V(x)$. Luego, calculando $\partial_x V_p(t, x)$, obtenemos:

$$\partial_x V_p(z) = \frac{1}{t}(\partial_x V(x)) + \partial_x \left(\frac{p^2}{4t^2}\right) = \frac{1}{t}\,\partial_x V(x).$$

Así, grad $V_p(t, x) = 0$ si, y sólo si, $\partial_x V(x) = 0$ y $t = -p^2/2V(x)$, lo que demuestra la igualdad A.

Demostremos la relación B. Claro que

$$(V - K(X))(z) = V(t, x) - K(X(t, x));$$

de aquí obtenemos:

$$\partial_t [V(t, x) - K(X(t, x))] = \partial_t \left[\frac{V(x)}{t} - t^2 K(1, x))\right] =$$
$$= -\frac{V(x)}{t^2} - 2tK(X(x)) = 0, \text{ donde } X(x) \equiv X(1, x).$$

Puesto que $t \in \mathbb{R}^+$, o sea, $t > 0$, de aquí se deduce que:

$$t^3 = -\frac{V(x)}{2K(X(x))}.$$

Luego calculando $\partial_x (V - K(X))(t, x)$, obtenemos:

$$\partial_x \left[\frac{V(x)}{t} - t^2 K(X(x))\right] = \frac{1}{t}\,\partial_x V(x) - t^2 \partial_x [K(X(x))] = 0.$$

Puesto que el campo vectorial X está engendrado por un elemento X del álgebra de Lie de un grupo de isometrías, entonces el campo X conserva (con exactitud de un multiplicador escalar) una métrica de Riemann K. De aquí se deduce que $\partial_x(K(X(x)) = 0$. Así, definitivamente, $\partial_x V(x) = 0$.

La condición: grad $(V - K(X))(t, x) = 0$ se cumple si, y sólo si, $t^3 = -V(x)/2K(X(x))$; $\partial_x (V(x)) = 0$. La última condición significa, que grad$_x V(x) = 0$, donde $V(x) = V_S(x)$ es una restricción del potential V de la variedad $M \setminus \Delta$ en la subvariedad $S_K \setminus \Delta$,

Así, ambas igualdades A y B quedan demostradas.

Demostración del teorema 1. Sean $z = (t, x)$ y $K(z) = 1$. Entonces el punto z es, en virtud de la afirmación 1, un punto, por el cual pasa la órbita de cierto subgrupo uniparamétrico de un grupo de isometrías coincidiente con una trayectoria integral del sistema dinámico, sólo en el caso cuando el punto z es crítico para la función $V(z) - K(X(z))$. En virtud de la igualdad B, el conjunto de los puntos críticos de la función $V - K(X)$ (donde $K(z) = 1$) coincide con el conjunto de los puntos críticos de la función V_S en $S_K \setminus \Delta$. Pero los puntos críticos descritos en la afirmación 1 engendran órbitas que pasan por ellos (circunferencias) de los grupos uniparamétricos de isometrías. En el caso del problema plano de n cuerpos estas órbitas siendo trayectorias integrales del sistema dinámico dan un conjunto de posiciones de equilibrio relativo del sistema. Reuniendo por último toda la información obtenida, vemos que el punto $z \in M \setminus \Delta$, $K(z) = 1$, es un equilibrio relativo si, y sólo si, es un punto crítico de restricción V_S en $S_K \setminus \Delta$ del potencial V. Así queda demostrado completamente el teorema 1.

Ahora podemos pasar a examinar una clase especial de los equilibrios relativos, los llamados equilibrios relativos colineales, es decir, tales que todos los n cuerpos se encuentran en el plano en una recta. Calcularemos el número exacto de tales posiciones espaciales de equilibrio para un n arbitrario, utilizando la información obtenida más arriba sobre los puntos críticos de la energía potencial.

TEOREMA 2 (Mullton). *Para cualquier juego dado de masas $m_1, \ldots, m_n$ en el problema plano de n cuerpos, siempre hay exactamente $n!/2$ clases de equilibrios relativos colineales del sistema, es decir, hay $n!/2$ clases de equilibrio relativo cuando todos los puntos z_i (que dan las posiciones a los cuerpos del sistema) se encuentran en una misma recta que pasa por el centro de las masas, y en el proceso del movimiento esta recta gira en* torno al centro de las masas (origen de las coordenadas); con esto, cada punto circunscribe una trayectoria circular (circunferencia con centro en el origen de las coordenadas).

Sea que en un plano del sistema $\mathbb{R}^2$ se escoge una recta l. Ella define unívocamente el subconjunto $M_l \subset M$ de aquellos puntos $z = (z_1, \ldots, z_n)$, para los cuales todas las coordenadas z_i pertenecen a la recta l. Lo mismo que antes, destaquemos un subconjunto Δ de planos bisectores y construyamos los siguientes subconjuntos: $S_l = S_K \cap M_l$, $S_l \setminus \Delta = S_l \setminus (S_l \cap \Delta)$. Consideremos la acción de una circunferencia S^1 en un conjunto S_K; es evidente que el conjunto S_l queda en su sitio sólo con girar el plano en un ángulo π. Por consiguiente, en el conjunto S_l actúa de modo natural un grupo de segundo orden $\mathbb{Z}_2$. Consideremos el espacio cociente $S_l/\mathbb{Z}_2$, donde l es una recta fijada anteriormente en un plano bidimensional. Ya que la fijación de tal recta define unívocamente en cada recta compleja (o sea, en el plano real bidimensional) en $\mathbb{C}^{n-1}$, que pasa por

el origen de las coordenadas, cierta recta real, entonces el conjunto de todas estas rectas reales (surgidas al considerar todas las rectas complejas) se identifica de manera natural con un espacio real proyectivo, que da el siguiente difeomorfismo: $S_l/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{n-2}$. En este caso, es posible considerar la inmersión más arriba descrita de cada recta real en una correspondiente recta compleja como la «complejificación» de esta recta real, es decir, la inmersión $S_l/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{n-2} \to \mathbb{C}P^{n-2}$, surgida al pasar de la recta l al plano $\mathbb{R}^2$, coincide con una inmersión estándar de un espacio real proyectivo en un espacio complejo proyectivo. Consiguientemente, surge una inmersión inducida $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2}) \to \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}$. Consideremos en $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}$ una función suave $\widetilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta} \to \mathbb{R}^1$ inducida por un potencial $V: M \setminus \Delta \to \mathbb{R}^1$, donde $\widetilde{\Delta} = \Delta/S^1$.

LEMA 2 *El número de clases de equilibrio relativo es igual exactamente al número de puntos críticos de una función suave* $\widetilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta} \to \mathbb{R}^1$.

DEMOSTRACIÓN. De la definición de clase (véase más arriba), se deduce que cada clase de los equilibrios relativos es definida unívocamente por un equilibrio relativo normalizado contenido en ello, y estas posiciones en virtud del teorema 1, corresponden unívocamente a los puntos críticos de la función $\widetilde{V}$. Con eso, utilizamos el hecho de que al girar un plano bidimensional, el equilibrio relativo pasa una vez más a ser equilibrio relativo, o sea, las transformaciones ortogonales transforman la clase de tales equilibrios en sí misma.

AFIRMACIÓN 2. (Smale). *Las clases de equilibrios relativos colineales están en una correspondencia biunívoca con los puntos de la función suave* $\widetilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta} \to \mathbb{R}^1$, *los cuales se encuentran en una subvariedad* $\mathbb{R}\ (P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2}) \subset \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta} \subset \mathbb{C}P^{n-2}$ (la inmersión (encaje) estándar ha sido descrita más arriba).

DEMOSTRACIÓN. Si el equilibrio relativo (es decir, la configuración) dado por un juego de números $z = (z_1, \ldots, z_n)$ es colineal, entonces todos esos números complejos se encuentran en una misma recta, y mediante una transformación ortogonal de un plano bidimensional es posible trasladarlos a todos a una recta destacada (y fijada) $l \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^1$. Con eso, por un lado, no hemos salido de los límites de la clase de los equilibrios relativos colineales y, por otro lado, resultamos estar en un punto crítico de restricción de la energía potencial en una subvariedad real $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$, sumergida de una manera estándar en $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}$. La afirmación queda demostrada.

De este modo, para describir equilibrios colineales basta con describir todos aquellos puntos críticos del potencial, que se encuentran en una subvariedad real, o sea, en un subespacio real proyectivo.

Para describir tales puntos es conveniente examinar todos los puntos críticos de restricción del potencial en esta subvariedad real. En el caso general, claro, el punto crítico de restricción de la función en la subvariedad de ningún modo tiene que ser también un punto crítico de la misma función en toda la variedad abrazante (lo inverso, claro está, es justo). Sin embargo, como ahora vamos a demostrar, en el caso concreto dado hay una correspondencia biunívoca entre los puntos críticos de restricción del potencial en un subespacio real y los puntos críticos de un potencial «completo» encontrados en este subespacio real.

AFIRMACIÓN 3. *Si* $z \in \mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ *es un punto crítico de restricción del potencial* $\widetilde{V}$ *en la subvariedad* $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2}) \subset \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}$, *entonces este punto z es crítico también para un potencial «completo»* $\widetilde{V}\colon \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta} \to \mathbb{R}^1$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las masas fijadas $m_1, \ldots m_n$ y un potencial $V(z) = -\sum_{i \neq j} m_i m_j / |z_i - z_j|$. Entonces se tienen las siguientes fórmulas: 1) la primera diferencial de la función V es igual a

$$dV(z)(v) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|^3} \langle z_i - z_j,\ v_i - v_j \rangle,$$

donde $v \in M$; 2) la segunda diferencial de la función V es de forma

$$d^2V(z)(v, w) = -\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|^3} \cdot \left(\frac{3}{|z_i - z_j|^2} \langle z_i - z_j, v_i - v_j \rangle - \right.$$
$$\left. - \langle v_i - v_j, w_i - w_j \rangle \right) = Q_z(v, w),$$

donde $v, w \in M$. Aquí por $\langle\ ,\ \rangle$ se designa un producto euclídeo escalar de los vectores en un plano $\mathbb{R}^2$; 3) la segunda diferencial de la contracción de la función V en $S_K \setminus \Delta$ es igual a

$$d^2V|_{(S_K \setminus \Delta)}(z)(v, w) = Q_z(v, w) + V(z) K(v, w).$$

Aquí con K se designa la energía cinética del sistema, considerada como un producto escalar, definible por las masas dadas $m_1, \ldots, m_n$ Todas esas fórmulas se obtienen por el cálculo directo, consistente en la diferenciación sucesiva en las coordenadas locales cartesianas, por eso omitimos los detalles, dejando la verificación de las fórmulas indicadas al lector.

Para cualquier $v_i \in \mathbb{R}^2$ hacemos $v_i = (v_i'; v_i'')$, donde $v_i' \in l$ y $v_i'' \in l^\perp$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces es posible escribir para el vector v la descomposición: $v = (v', v'')$, donde $v' = (v_1', \ldots, v_n')$. La descomposición dada tiene lugar para cualquier vector $v \in M$. Si $z \in S_l \subset S_K$, $z \notin \Delta$, entonces $T_z S_K = \{v \in M;\ v \perp z\}$; $T_z S_l = \{v' \in$

$\in M_l$: $v' \perp z\}$, donde en la variedad M se fija el producto escalar K, definible por las masas dadas de los puntos del sistema. Si $v \in T_z S_K$ y $v = (v', v'')$, entonces $v' \in T_z S_l$, puesto que $K(v, z) = K(v', z)$. De las fórmulas 1)—3) arriba obtenidas se deduce, que si $z \in S_l \setminus \Delta$, $v \in T_z S_K$, luego $dV(z)(v) = dV(z)(v')$. Pero entonces, de la igualdad $dV(z)(v') = 0$, obtenemos que $dV(z)(v) = 0$. Esta última igualdad demuestra nuestra afirmación.

LEMA 3. *La variedad $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ tiene $n!/2$ componentes de conexión lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Esta afirmación geométrica se deduce de la definición de los planos bisectores. En efecto, fijemos el punto $z = (z_1, \ldots, z_n) \in S_l \setminus \Delta$ y consideremos que $z_1 < \ldots < z_n$, $z_i \in \mathbb{R}$ (con esto, utilizamos el hecho de que entre estas coordenadas no hay ningún par de números coincidentes). Ahora, sea dada una permutación arbitraria $\sigma = (i_1, \ldots i_n)$ de los números $(1, 2, \ldots, n)$. Aplicando esta permutación a las coordenadas del vector inicial z lo pasamos a otro componente de la conexión lineal, por supuesto, definible unívocamente por la permutación dada (ya que para todos los vectores pertenecientes a un componente de conexión, la ordenación de las coordenadas del vector por su magnitud es la misma y se define por la permutación dada). De manera que el conjunto $S_l \setminus \Delta$ se compone de $n!$ componentes de conexión, por consiguiente, el espacio cociente $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ consta en $n\,/2$ componentes. El lema queda demostrado.

LEMA 4. *Si el punto $z \in \mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ es un punto crítico de restricción del potencial $\widetilde{V}$ en $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$, entonces el punto z es un máximo no degenerado.*

DEMOSTRACIÓN. Aprovechémonos de la fórmula 2) arriba obtenida. Entonces, evidentemente, de ella se deduce, que para la función V: $S_l \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ la segunda diferencial $d^2V\mid_{(S_l \setminus \Delta)}(z)$ es una forma definida negativamente, lo que demuestra el lema.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA SOBRE LOS EQUILIBRIOS COLINEALES. De la fórmula explícita que define el potencial $\widetilde{V}$, se deduce, que esta función tiende a $-\infty$, en cuanto el punto z tiende al conjunto Δ; esto significa que en la frontera de cada componente de conexión lineal del conjunto $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\widetilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ la función $\widetilde{V}$ tiende a $-\infty$, y por eso tiene en cada componente un máximo. Se deduce inmediatamente de la teoría de Morse que no pueden haber dos puntos críticos en cada componente de la conexión lineal, puesto que cada uno de esos puntos sería un máximo no degenerado y esto engendraría, por lo menos, otro punto crítico más de ensilladura que no sería un máximo local. La contradicción obtenida demuestra que cada componente tiene exactamente un máximo no degenerado (y que no hay más puntos

críticos). Puesto que conocemos el número de los componentes, igual a $n!/2$, con esto termina la demostración del teorema.

Del teorema demostrado resulta evidente que la propuesta sobre el carácter lineal de todos los cuerpos del sistema (la posición de ellos en una misma recta) ha sido muy importante en algunos lugares sustanciales de la demostración; exactamente esto nos permitió calcular por completo el número de tales posiciones de equilibrio.

Pero si volvemos a un problema más general sobre el cálculo del número de clases de los equilibrios relativos (sin las condiciones de colinealidad), debemos poder describir los índices y el número de los puntos críticos del potencial ya no en un espacio proyectivo real sino en un espacio complejo, lo que representa un problema mucho más difícil.

Un grupo de rotaciones S^1 actúa en S_K, dejando invariante un conjunto singular Δ y el potencial V (véase esto más arriba). Como ya hemos visto, un espacio cociente S_K/S^1 se identifica de una manera natural con un espacio complejo proyectivo en $\mathbb{C}P^{n-2}$, y es posible considerar el conjunto singular $\widetilde{\Delta} = \Delta/S^1$ (en $\mathbb{C}P^{n-2}$) como una reunión de subespacios complejos proyectivos. De nuevo vamos a considerar la función $\widetilde{V}\colon \mathbb{C}P^{n-2}\setminus\widetilde{\Delta} \to \mathbb{R}$, inducida por un potencial inicial V.

HIPÓTESIS. Para casi todos los valores de las masas $(m_1, \ldots, m_n)$ en el problema plano de n cuerpos, el potencial $\widetilde{V}$ inducido por un potencial inicial V es una función de Morse, es decir, todos los puntos críticos de esta función suave son no degenerados.

Esta hipótesis por ahora no está demostrada ni refutada. Su papel consiste en que ella ha surgido de la pregunta de si es finito el número de clases del equilibrio relativo (para casi todos los juegos de masas). Es posible demostrar (omitimos la demostración), que la función $\widetilde{V}$ no tiene ningún punto crítico en cierto entorno abierto de un conjunto singular $\widetilde{\Delta}$ en la variedad $\mathbb{C}P^{n-2}$. De aquí, si es justa la hipótesis arriba formulada, se deduce inmediatamente que el número de puntos críticos de la función $\widetilde{V}$, es decir, el número de las clases de los equilibrios relativos, es finito (para casi todos los juegos de las masas).

Indiquemos otro corolario de la hipótesis. Si ésta es justa, entonces para casi todos los juegos de las masas es posible estimar el número de clases de los equilibrios relativos de la siguiente manera. Confrontemos a cada equilibrio relativo un número no negativo, el índice del punto crítico (de potencial inducido $\widetilde{V}$), correspondiente a esta clase de equilibrios relativos (véase el teorema más arriba). Entonces, las cantidades de clases de los equilibrios relativos con índice dado son conexas según las correspondientes desigualdades de Morse (véase la teoría elemental más arriba) con los números de Betti

(es decir, con los rangos de los grupos de homologías reales) del espacio $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}$. En particular, los grupos de cohomologías bastante ricos del espacio $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}$ permiten demostrar la existencia de las clases no triviales de equilibrios relativos. El anillo de cohomologías del espacio $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}$ se puede calcular en forma explícita (Arnold), a saber, este anillo es isomorfo a un anillo de cohomologías de un espacio topológico bastante simple X, un producto directo del ramo de dos circunferencias por el ramo de tres circunferencias por el ramo de cuatro circunferencias etc., por el ramo de $n-1$ circunferencias. En forma explícita el polinomio de Poincaré del espacio $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}$ tiene la siguiente forma: $\prod_{\alpha=2}^{n-1} (1 + \alpha t)$, es decir

$$H^* (\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \widetilde{\Delta}) = H^* ((S^1 \vee S^1) \times (S^1 \vee S^1 \vee S^1) \times \ldots).$$

CAPÍTULO 3

COBORDISMOS Y ESTRUCTURAS SUAVES

§ 27. Números característicos. Cobordismos. Ciclos y subvariedades. Signatura de las variedades

I. Planteamiento del problema. Nociones sencillas sobre los cobordismos. Signatura.

Consideremos aquí algunos problemas de la teoría de las variedades suaves, utilizando el aparato desarrollado en los capítulos anteriores.

1. PROBLEMA SOBRE EL COBORDISMO. Sea dada una variedad suave cerrada M^n. ¿En qué caso ésta es frontera de una variedad suave compacta con borde $M^n = \partial W^{n+1}$? La pregunta análoga si ambas M^n y W^{n+1} se suponen orientables.

2 PROBLEMA SOBRE LA REALIZACIÓN DE LOS CICLOS MEDIANTE LAS SUBVARIEDADES. Sean $x \in H_i(M^n; \mathbb{Z})$ o $y \in H_i(M^n; \mathbb{Z}_2)$. ¿En qué caso se hallará una subvariedad cerrada $M^i \subset M^n$ representante del ciclo y (o x, si M^i está orientada)?

3. ¿QUÉ CICLOS SON IMÁGENES CONTINUAS DE LAS VARIEDADES? Sean $x \in H_i(X; \mathbb{Z})$ o y $H_i(X, \mathbb{Z}_2)$, elementos de homologías de algún complejo celular X. En qué caso se hallará un «bordismo singular» (M^i, f), o sea, la variedad M^i y una aplicación $f\colon M^i \to X$ tal, que $f_*[M^i] = y$ (o $f_*[M^i] = x$ para la variedad orientable M^i)?. Preguntas análogas se formulan para el caso relativo.

Sean $x \in H_i(X, Y; \mathbb{Z})$ o $y \in H_i(X, Y; \mathbb{Z}_2)$. Hay que hallar la variedad M^i con el borde W^{i-1} y la aplicación de los pares $f\colon (M^i, M^{i-1}) \to (X, Y)$ tal, que $f_*[M^i, W^{i-1}] = y$ (o x en el caso orientable).

Se definen de manera natural los grupos de los «bordismos singulares»: *el bordismo singular* es un par (M^i, f), como está descrito más arriba, donde M^i es una variedad cerrada. *El ciclo* es una combinación lineal formal de los bordismos singulares.

La película singular es un par (W^j, f) donde W^j es una variedad con borde. La frontera de la película singular es un ciclo singular. El grupo cociente de todos los ciclos i-dimensionales (bordismos singulares) por las fronteras de las películas $(i + 1)$-dimensionales es un «grupo de bordismos» y se designa por $\Omega_i^O(X)$. Los grupos $\Omega_i^O(X, Y)$ se definen por analogía: los ciclos son aplicaciones de las varieda-

des con borde, donde la imagen de la frontera se encuentra en $Y \subset X$, y las películas se introducen de manera natural.

Basando en la clase de las variedades orientables y películas se construyen análogamente los «bordismos orientables», los cuales se designan por $\Omega_i^{SO}(X)$ y $\Omega_i^{SO}(X, Y)$. Se tienen las aplicaciones evidentes

$$\Omega_i^O(X) \to H_i(X; \mathbb{Z}_2),$$
$$\Omega_i^O(X, Y) \to H_i(X, Y; \mathbb{Z}_2),$$
$$\Omega_i^{SO}(X) \to H_i(X; \mathbb{Z}),$$
$$\Omega_i^{SO}(X, Y) \to H_i(X, Y, \mathbb{Z}_2).$$

Por su propia definición, los grupos Ω_i^O y Ω_i^{SO} son invariantes homotópicamente. Los grupos Ω_i^O y Ω_i^{SO} pueden resultar ser no triviales para un espacio contractable X (o punto). Estos grupos Ω_i^O y Ω_i^{SO} se llaman *grupos de cobordismos clásicos*. El producto directo de las variedades introduce en ellos una estructura de los anillos anticonmutativos:

$$\Omega_i^O\Omega_j^O \subset \Omega_{i+j}^O, \qquad xy = yx,$$
$$\Omega_i^{SO}\Omega_j^{SO} \subset \Omega_{i+j}^{SO}, \qquad xy = (-1)^{ij}\, yx.$$

En los grupos $\Omega^O = \sum\limits_{i \neq 0} \Omega_i^O$ es justa la identidad

$$2x = 0.$$

Esto se deduce, evidentemente, de la igualdad

$$\partial(M^i \times I) = M^i \cup M^i = 2M^i.$$

Tomando en consideración la orientación, obtendremos en $\Omega^{SO} = \sum\limits_{i \geqslant 0} \Omega_i^{SO}$

$$\partial(M^i \times I) = M_+^i \cup M_-^i.$$

Esto significa que la variedad con la orientación opuesta da un elemento inverso en los grupos Ω^{SO}, ya que la suma es dada por una reunión formal de variedades.

Datos elementales:

a) $\Omega_0^O = \mathbb{Z}_2$, $\Omega_0^{SO} = \mathbb{Z}$;

b) $\Omega_1^O = \Omega_1^{SO} = 0$;

c) $\Omega_2^{SO} = 0$ (vemos de la clasificación de las superficies, que todas las variedades orientables M^2 se hallan en $\mathbb{R}^3$ y acotan el entorno W^3).

Calculemos los grupos Ω_2^O.

LEMA 1. *Si la variedad cerrada M^i es un borde, o sea, si $M^i = \partial W^{i+1}$, entonces su característica de Euler es par:* $\chi(M^i) = 2m$.

DEMOSTRACIÓN. a) Sea $i = 2k + 1$. Entonces $\chi(M^i) = 0$ en virtud de la dualidad de Poincaré en las homologías. b) Sea que $i = 2k$. Consideremos la duplicación

$$V^{2k+1} = W^{2k+1} \bigcup_{M^{2k}} W^{2k+1}.$$

Se deduce de la definición de χ, mediante la triangulación del complejo:

$$\chi(X \bigcup_L Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(L),$$

donde $L = X \cap Y$.

Obtenemos:

$$0 = \chi(V^{2k+1}) = 2\chi(W^{2k+1}) - \chi(M^{2k}).$$

El lema queda demostrado.

Puesto que $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, obtenemos:

$$\mathbb{R}P^2 \neq \partial W^3, \qquad \Omega_2^O \neq 0.$$

Es fácil de construir una película W^3 tal, que $\partial W^3 = K^2$ (superficie de Klein). (¡Hállese esta película!) Sabemos de la clasificación de las superficies (véase § 3): cualquier variedad cerrada bidimensional no orientable es bien $\mathbb{R}P^2$ + (asas), o bien K^2 + (asas).

De aquí se obtiene el resultado:

$$\Omega_2^O = \mathbb{Z}_2 \text{ (elemento básico } [\mathbb{R}P^2]).$$

Desarrollando la técnica geométrica es posible demostrar, que $\Omega_3^O = \Omega_3^{SO} = 0$ y $\Omega_4^{SO} = \mathbb{Z}$ (Rojlin). Obtendremos estos resultados, lo mismo que muchos otros, de la teoría (de Thom) que utiliza los métodos homológicos expuestos más arriba. El desarrollo del lema 1 es el siguiente

LEMA 2. (Pontriaguin). a) *Si la variedad cerrada M^i es un borde en la teoría de los O-bordismos Ω_*^O, entonces todos sus números característicos estables (es decir, las clases características estables de dimensión i) son iguales* al cero de módulo 2.

b) *Si la variedad cerrada orientable M^i es un borde en la teoría de los SO-bordismos (o sea, borde de una variedad orientable W^{i+1}), entonces complementariamente todos sus números característicos estables (es decir, las clases de dimensión i) en las cohomologías sobre un campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ son iguales a cero.*

DEMOSTRACIÓN. El espacio fibrado tangente (por ejemplo, con ayuda de la inmersión $M^i \subset \mathbb{R}^N$, $N \to \infty$) se obtiene mediante una

aplicación tangencial en la base de un espacio fibrado universal (aplicación gaussiana generalizada $M^i \xrightarrow{\tau} G_{i,N} = BO_i$). La clase característica mod 2 es definida por cualquier elemento $w \in H^*(G_{i,N}; \mathbb{Z}_2)$ (compárese con [1], p. II. § 25). Por definición, hacemos:

$$w(M^i) = \tau^*(w).$$

Las clases características «estables» $w \in H^*(BO_i)$ se obtienen mediante la restricción

$$w = \lambda^* \overline{w},$$

donde $\overline{w} \in H^*(BO_{i+1})$, λ: $BO(i) \to BO(i+1)$. De modo análogo se define la noción de clase característica estable para BSO_i, BU_i, BSp_i.

Si $M^i = \partial W^{i+1}$, tenemos $w(M^i) = \tau_M^*(w) = \tau_M^* \lambda^* (\overline{w})$; $\overline{w}(W^{i+1}) = \tau_w^*(\overline{w})$. Designamos la inmersión $M^i \to W^{i+1}$ por j. La restricción del espacio fibrado es de forma $\tau_W \mid_{M^i} = j^* \tau_W = \tau_M \oplus 1$. Sea que $\dim w = i$. Entonces

$$w(M^i) = \tau_M^* \lambda^* (\overline{w}) = j^* \tau_W^* (\overline{w}).$$

Puesto que $j_*[M^i] = 0$, por cuanto $M^i = \partial W^{i+1}$, obtenemos para los productos escalares:

$$(j^* \tau_W^* (\overline{w}), \quad [M^i]) = (\tau_W^* (\overline{w}), \quad j_*[M^i]) = 0.$$

De manera que el punto a) queda demostrado.

La demostración del punto b) es completamente idéntica a la anterior con el cambio de las $\mathbb{Z}_2$-homologías por las homologías sobre $\mathbb{Q}$ y con la consideración del hecho de que en un caso orientable la igualdad $j_*[M^i] = 0$ en $H_i(W^{i+1})$ es justa en las homologías racionales. El lema 2 queda demostrado.

Un ejemplo de la clase característica no estable es $\chi(M^i)$. Las clases de Stiefel—Whitney $w_q \in H^q(M^i; \mathbb{Z})$ y todos los polinomios de ellas de dimensión i, así como también las clases de Pontriaguin $p^q \in H^{4q}(M^i, \mathbb{Q})$ y todos los polinomios de ellas de dimensión i (si $i = 4k$) nos dan un juego completo de los números característicos estables para Ω_i^O y Ω_i^{SO}.

EJEMPLO 1. $M^2 = \mathbb{R}P^2$; aquí $w(z) = (1 + zt)^3 = 1 + w_1 z + w_2 z^2$, donde $t \in H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ $t \neq 0$. Por eso $w_1^2 \neq 0$ y $w_2 \neq 0$ (mod 2). Empero el grupo $\Omega_2^0 = \mathbb{Z}_2$. Por eso tenemos: $w_1^2 - w_2 \equiv 0$ (mod 2).

EJEMPLO 2. $M^4 = \mathbb{C}P^2$, la orientación es natural; aquí $p(z) = (1 + z^2 t^2)^3 = 1 + p_1 z^2$. Por eso $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3$ (el polinomio de Pontriaguin $p(z)$ está indicado en § 9 para $\mathbb{C}P^n$), $t \in H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q})$, es un elemento básico del grupo $H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$.

EJEMPLO 3. a) $M_1^4 = \mathbb{C}P^4$, la orientación es natural. Aquí $p(z) = 1 + p_1z^2 + p_2z^4 = (1 + t^2z^2)^5 = 1 + 5t^2z^2 + 10t^4z^4$, t es un elemento básico del grupo $H^2(\mathbb{C}P^4; \mathbb{Z})$.

Para los números característicos obtenemos:

$$p_1^2 = 25, \quad p_2 = 10,$$

b) $M_2^8 = \mathbb{C}P_1^2 \times \mathbb{C}P_2^2$. Aquí $p(z) = 1 + p_1z^2 + p_2z^4 = (1 + t_1^2z^2)^3 (1 + t_2^2z^2)^3 = 1 + 3(t_1^2 + t_2^2)z^2 + 9t_1^2t_2^2z^4$, donde $t_i \in H^2(\mathbb{C}P_i^2; \mathbb{Z})$, son elementos básicos.

Luego tenemos: $(t_1^2)^2 = 0$, $(t_2^2)^2 = 0$, $(t_1^2 + t_2^2)^2 = 2t_1^2t_2^2$. Los números característicos son de forma

$$p_1^2 = 18, \quad p_2 = 9.$$

Además de los números característicos hay un invariante interesante más de SO-cobordismo para las variedades orientables de dimensión $4k$ llamado «signatura» de la variedad. En virtud de la dualidad de Poincaré (véase el § 15) en un grupo de homologías de dimensión media está definida una forma bilineal unimodular con coeficientes enteros simétrica para las dimensiones $4k$ y antisimétrica para las dimensiones $4k + 2$ (por ejemplo, para superficies orientables con $k = 0$). Esta forma está engendrada por un «índice de intersección» de los ciclos en un grupo de homologías $H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$ o por la multiplicación de los cociclos en un grupo $H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q}) \approx H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$,

$$\langle x, y\rangle = (xy, [M^{4k}]),$$
$$x, y \in H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q}),$$

o (lo que es lo mismo)

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle = \tilde{x} \circ \tilde{y} \text{ (índice de intersección)},$$
$$\tilde{x}, \tilde{y} \in H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q}).$$

DEFINICION 1. La diferencia del número de los cuadrados positivos y negativos de la forma indicada en un grupo $H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Z})$ se llama «signatura» de la variedad. Al cambiar la orientación $M^{4k} \to -M^{4k}$ la forma y la signatura cambian el signo. La signatura se connota con $\tau[M^{4k}]$.

LEMA 3. (Rojlin). *La signatura de una variedad limitativa es igual a cero y define correctamente la forma lineal*

$$\tau : \Omega_{4k}^{SO} \to \mathbb{Z}.$$

PROBLEMA 1. Demostrar que la signatura del producto directo de las variedades es igual al producto de las signaturas.

De este modo obtenemos un homomorfismo de los anillos

$$\tau:\Omega_*^{SO}=\sum_{i\geqslant 0}\Omega_i^{SO}\to\mathbb{Z},$$

donde $\tau(1)=1$, $\Omega_i^{SO}\xrightarrow{\tau}0$, si i no es divisible por 4.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3. Por causas triviales, la signatura de una reunión no conexa de variedades, es una suma de signaturas. Demostremos que la signatura de una variedad limitativa es igual a cero. Sea $M^{4k}=\partial W^{4k+1}$. Designemos por j la inmersión $M^{4k}\xrightarrow{j}W^{4k+1}$. Tenemos $j_*[M^{4k}]=0$ en el grupo $H_{4k}(W^{4k+1};\mathbb{Q})$. Si dos cociclos x, y se obtienen mediante la restricción de los cociclos $\bar{x}$, $\bar{y}\in H^{2k}(W^{4k+1};\mathbb{Q})$, entonces $\langle x, y\rangle=0$. Realmente, si $x=j^*(\bar{x})$, $y=j^*(\bar{y})$, entonces

$$\langle x, y\rangle=(xy, [M^{4k}])=(j^*(\bar{x}\bar{y}), [M^{4k}])=(\bar{x}\bar{y}, j_*[M^{4k}])=0.$$

(Para los ciclos $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ esto significa un hecho evidente: si ambos ciclos son homológicos a cero en W^{4k+1}, entonces el índice de intersección de los mismos es igual a cero.) Demostremos que la dimensión de un subgrupo $j^*H^{2k}(W^{4k+1};\mathbb{Q})\subset H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$ es igual exactamente a la mitad de la dimensión del grupo $H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$. Escribamos dos sucesiones exactas del par $(M^{4k}; W^{4k+1})$ en las cohomologías y homologías racionales, recíprocamente duales, según Poincaré:

$$\begin{array}{ccccc}
H^{2k}(W^{4k+1}) & \xrightarrow{j_*} & H^{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{\delta} & H^{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k})\to\\
\| D & & \| D & & D\|\\
H_{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{j_*} & H_{2k}(W^{4k+1})\to
\end{array}$$

En virtud del operador de dualidad de Poincaré el homomorfismo j^* pasa a ∂ y el homomorfismo δ pasa a j_*. Por eso los operadores j^* y δ son conjugados entre sí, donde el grupo $H^{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k})$ es conjugado a $H^{2k}(W^{4k+1})$ y el $H^{2k}(M^{4k})$ es isomorfo a su conjugado $(H^{2k}(M^{4k}))^*=H_{2k}(M^{4k})$ con ayuda de una forma no degenerada $\langle x, y\rangle$. De aquí se deduce de un modo puramente algebraico la coincidencia de los rangos de los grupos $\operatorname{Im} j^*$ e $\operatorname{Im}\delta$. En virtud de la exactitud de las sucesiones, el rango de la imagen $\operatorname{Im} j^*$ es exactamente igual a la mitad del rango del grupo $H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$. Del carácter no degenerado de la forma $\langle x, y\rangle$ y del hecho de la existencia de un espacio nulo $\operatorname{Im} j^*$ de dimensión media, concluimos que $\tau=0$. El lema 3 queda demostrado.

Ya se ha mencionado más arriba que $\Omega_4^{SO}=\mathbb{Z}$ (adelante será demostrado, que $\Omega_4^{SO}\oplus\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$). En el ejemplo 2 ha sido calculado el número $p_1[\mathbb{C}P^2]=3\neq 0$. Notemos que $\tau(\mathbb{C}P^2)=1$, ya que la forma $\langle x, y\rangle$ en el grupo $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ tiene la forma $\langle x,$

$x\rangle = 1$ (esto se deduce con evidencia de la estructura del anillo $H^*(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Q})$, véase el § 7). Puesto que $\tau = 1$, el elemento $[\mathbb{C}P^2]$ no es múltiplo de nadie en el grupo $\Omega_4^{SO} = \mathbb{Z}$ y cualquier elemento $x \in \Omega_4^{SO}$ es de forma $x = \lambda [\mathbb{C}P^2]$. De esto se deduce inmediatamente el siguiente corolario (fórmula de Thom—Rojlin): para cualquier variedad orientable es justa la fórmula

$$\tau [M^4] = \frac{1}{3} p_1 [M^4]. \tag{*}$$

Realmente, para $\mathbb{C}P^2$ tenemos

$$p_1 [\mathbb{C}P^2] = 3, \qquad \tau [\mathbb{C}P^2] = 1.$$

La magnitud $p_1 - 3\tau$ es trivial para $\mathbb{C}P^2$ y, de esta manera, para todos los elementos $x \in \Omega_4^{SO}$, puesto que $x = \lambda [\mathbb{C}P^2]$. Basta con demostrar que $\Omega_4^{SO} \otimes \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}$. Más adelante calcularemos los grupos $\Omega_i^{SO} \oplus \mathbb{Q}$ y obtendremos una generalización de la fórmula (*), o sea, la fórmula de Hirzebruch.

Es posible definir la signatura también para las variedades no cerradas, lo mismo que la característica de Euler. Efectivamente, si $M = M^{4k}$ es una variedad suave orientable con borde $V = V^{4k-1} = V_1 \cup \ldots \cup V_m$, entonces está definida, hablando en general, una forma degenerada de intersecciones en un grupo de ciclos $H_{2k}(M^{4k}, \mathbb{Q})$. La signatura de esta forma se llama signatura de la variedad $\tau (M^{4k})$. Tiene lugar la siguiente «propiedad de aditividad» (Nóvikov—Rojlin).

ADITIVIDAD DE SIGNATURA. Sean M_1^{4k} y M_2^{4k}, variedades suaves con bordes

$$\partial M_1^{4k} = \bigcup_j V_j, \qquad \partial M_2^{4k} = \bigcup_q W_q$$

y $V_1^{4k-1} = W_1^{4k-1}$. Se tiene la igualdad

$$\tau (M_1^{4k} \bigcup_{V_1 = W_1} M_2^{4k}) = \tau (M_1^{4k}) + \tau (M_2^{4k}).$$

De esa manera, la signatura es aditiva si existe una pegadura de dos variedades a lo largo de un componente entero de frontera. Un hecho análogo es justo para la característica de Euler de las variedades de dimensión par: en efecto,

$$\chi (M_1^{2q} \bigcup_{V_1} M_2^{2q}) = \chi (M_1^{2q}) + \chi (M_2^{2q}) - \chi (V_1),$$

donde $\chi (V_1) = 0$, puesto que V_1 es una variedad cerrada de dimensión impar.

Demostremos la aditividad de la signatura. Los grupos de homologías $H_{2k}(M_1^{4k})$ y $H_{2k}(M_2^{4k})$ se presentan de la forma $H_{2k}(M_s^{4k}) = A_s \oplus B_s$, $B_s = \operatorname{Im} i_{s*}$, donde $i_s\colon V_1 = W_1 \to M_s^{4k}$, $s = 1, 2$.

La forma de intersecciones se concentra enteramente en un subespacio A_s. De manera que $\tau(M_s^{4k}) = \tau(A_s)$. El grupo $H_{2k}(M_1^{4k} \underset{V_1=W_1}{\cup} M_2^{4k})$ se presenta de la forma

$$H_{2k}(M_1 \cup M_2) = A_1 \oplus A_2 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus D \oplus F,$$

donde

$$B_1 = C_1 \oplus D = \operatorname{Im} i_{1*}\colon H_{2k}(V_1) \to H_{2k}(M_1),$$
$$B_2 = C_2 \oplus D = \operatorname{Im} i_{2*}\colon H_{2k}(W_1) \to H_{2k}(M_2),$$
$$E \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus D = H_{2k}(V_1) = H_{2k}(W_1),$$
$$E = \operatorname{Ker} i_{1*} \cap \operatorname{Ker} i_{2*} \subset H_{2k}(V_1),$$
$$D = \operatorname{Im}\{H_{2k}(V_1) \to H_{2k}(M_1 \underset{V_1}{\cup} M_2)\}.$$

El subgrupo F es isomorfo a la intersección

$$F' = \operatorname{Ker} i_{1*} \cap \operatorname{Ker} i_{2*} \subset H_{2k-1}(V_1) = H_{2k-1}(W_1),$$

con eso, dos películas en M_1 y M_2 tendidas en un mismo ciclo de $F' \subset H_{2k-1}(V_1)$, juntas dan un ciclo del grupo $F \subset H_{2k}(M_1 \cup M_2)$. La forma de las intersecciones en el grupo $H_{2k}(M_1 \cup M_2)$ es del tipo de matriz de bloque, donde a) $C_1 \oplus C_2$ es el anulador de la forma; b) en todos los espacios C_1, C_2, D, F, la forma por separado es trivial, pero los espacios F y D son conjugados entre sí; c) los subespacios A_1, A_2 son ortogonales entre sí, y con respecto a los demás conjuntos en virtud de esta forma. Verifíquense esos hechos sencillos. De aquí se deduce

$$\tau(M_1 \underset{V_1}{\cup} M_2) = \tau(A_1) + \tau(A_2).$$

La afirmación queda demostrada.

II. Complejos de Thom. Cálculo de cobordismos (por el módulo de torsión). Fórmula de signatura. Realización de los ciclos mediante subvariedades.

Consideremos una variedad suave cerrada conexa B y un espacio fibrado vectorial ξ con base en B, con fibra $\mathbb{R}^n$ y con grupos $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n/2)$ y otros

$$\xi : E \underset{p}{\longrightarrow} B, \qquad F = \mathbb{R}^n.$$

Consideremos en las fibras los vectores de longitud $\leqslant 1$. El conjunto de ellos forma un espacio fibrado $\widetilde{E} \to B$ con fibra $F' = D^n \subset \mathbb{R}^n$. La frontera $\partial\widetilde{E}$ es un espacio fibrado con fibra S^{n-1}.

DEFINICIÓN 2. *Se llama complejo de Thom $M(\xi)$ del espacio fibrado ξ un complejo cociente*

$$M(\xi)=\widetilde{E}/\partial\widetilde{E},$$

donde $\partial\widetilde{E}$ está contraído en un punto.

LEMA 4. *Se tiene el isomorfismo natural*

$$\varphi: H_i(B)\to H_{n+i}(M(\xi)),$$
$$H^i(B)\to H^{n+i}(M(\xi)),$$

donde $i\geqslant 0$ es arbitrario y $n=\dim F$. Este isomorfismo es justo para las homologías mod 2, *si* $G=O(n)$, y *para las homologías sobre* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$, si $G=SO(n)$. *(Es obvio el isomorfismo φ: para cualquier ciclo z en la base B el ciclo $\varphi(z)$ se define como una preimagen completa $\varphi(z)=p^{-1}(z)$* mod $\partial\widetilde{E}$.)

La demostración del lema 4 ya ha sido dada (véase el § 17, lema 2) para la efectivización de las desigualdades de Morse en el caso de las variedades críticas. Recordemos que el isomorfismo φ es una superposición de dos operadores de la dualidad de Poincaré

$$\varphi=D_{\widetilde{E}}D_B,$$

apuntando además que E es de un tipo homotópico B y $H^q(M(\xi))=H^q(\widetilde{E},\partial E)$, $q>0$,

$$D_B: H_q(B)\to H^{m-q}(B),\qquad m=\dim B,$$

$$\begin{array}{ccc} D_{\widetilde{E}}: H^{m-q}(\widetilde{E}) & \to & H_{n+m-(m-q)}(\widetilde{E},\partial\widetilde{E}).\\ \| & & \| \\ H^{m-q}(B) & & H_{q+n}(M(\xi)) \end{array}$$

En las cohomologías del complejo de Thom $M(\xi)$ hay una «clase fundamental» $\varphi(1)\in H^n(M(\xi))$. Además, en el complejo $M(\xi)$ se encuentra la misma base $B\subset M(\xi)$ como una sección nula del espacio fibrado ξ. Un espacio fibrado normal respecto a B en $M(\xi)$ es exactamente ξ, y el complemento $M(\xi)\setminus B$ se contrae a un punto $*\in M(\xi)$.

La primera aplicación de los complejos de Thom consiste en el establecimiento de la conexión de las clases de Stiefel Whitney $w_i\in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$ para cualquier espacio fibrado ξ con base B con los cuadrados de Steenrod Sq^i.

DEFINICIÓN 3. Se llama *clase* $w_i\in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$ al elemento $\varphi^{-1}Sq^i\varphi(1)$, donde

$$\varphi: H^q(B;\mathbb{Z}_2)\to H^{n+q}(M(\xi);\mathbb{Z}_2).$$

Para establecer la conexión de esta definición con la dada más arriba hay que efectuar algunos cálculos en las cohomologías de los

espacios clasificadores $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2)$ y $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$. En el grupo $O(n)$ se tiene el subgrupo de las matrices diagonales $D(n) \subset \subset O(n)$ que son de forma

$$\begin{Vmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{Vmatrix},$$

$D(n) = \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$. De manera que se tiene la aplicación de los espacios clasificadores

$$BD(n) = \mathbb{R}P_1^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P_n^\infty \xrightarrow{i} BO(n)$$

y la aplicación de cohomologías

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^*(BD(n); \mathbb{Z}_2).$$

PROBLEMA 2. Por analogía con el grupo $U(n)$ demostrar los siguientes hechos: la imagen $\operatorname{Im} i^*$ coincide exactamente con los polinomios simétricos de $x_1, \ldots, x_n$, donde $0 \neq x_i \in H^1(\mathbb{R}P_i^\infty; \mathbb{Z}_2)$
Por eso i^* no tiene núcleo (monomorfismo).

Las clases de Stiefel—Whitney se obtienen como polinomios simétricos elementales

$$i^*(w_q) = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} x_{i_1} \ldots x_{i_q}.$$

PROBLEMA 3. Con aplicación $BSO(n) \xrightarrow{j} BO(n)$ la imagen $\operatorname{Im} j^*$ es un epimorfismo («aplicación en») en $\mathbb{Z}_2$-cohomologías, y el núcleo es engendrado como un ideal por el elemento $w_1 \in H^1(BO(n); \mathbb{Z}_2)$.

PROBLEMA 4. Consideremos los complejos de Thom de un espacio fibrado universal ξ sobre $BO(n)$ y la inmersión $BO(n) \overset{f}{\subset} M(\xi)$. Demostrar, que la aplicación

$$f^*: H^*(M(\xi); \mathbb{Z}_2) \to H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$$

no tiene núcleo y la imagen $\operatorname{Im} f^*$ se compone de todos los polinomios de las clases w_i divididos por $w_n \in H^n(BO(n); \mathbb{Z}_2)$, donde $i^* w_n = = x_1 \ldots x_1$. Demostrar que $f^*\varphi(1) = w_n$ y $f^*\varphi(w_i) = Sq^i(w_n) = = w_i w_n$. En general, es justa la fórmula

$$f^*\varphi(x) = x w_n$$

(demostrarlo).

Obtener resultados análogos para $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2)$. Calcular las operaciones Sq^i en $H^*(MO(n); \mathbb{Z}_2)$, por analogía con el § 10. Examinar los grupos homotópicos

$$\pi_{n+j}(M(\xi)), \qquad j < n-1,$$

utilizando los resultados del § 10.

PROBLEMA 5. Partiendo de la fórmula $w_i = \varphi^{-1} Sq^i \varphi(1)$, demostrar que las clases $w_j \in H^j(M^n; \mathbb{Z}_2)$ son invariantes homotópicamente para las variedades cerradas, utilizando la conexión de un espacio fibrado con un entorno de la diagonal en $M^n \times M^n$.

PROBLEMA 6. Para la clase w_1 que se anula si, y sólo si, la variedad es orientable, existe la fórmula

$$Dw_1 = \delta_*[M^n], \qquad \delta_*: H_n(M^n, \mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z}_2),$$

donde δ_* es un operador en las homologías, descrito en el § 3. Demostrar esta fórmula independientemente del problema 5.

Para la base $B = BG$ para $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n/2)$, $SU(n/2)$, $Sp(n/4)$ y para un espacio fibrado universal ξ con fibra $\mathbb{R}^n$, el complejo de Thom $M(\xi)$ se designa habitualmente con $MO(n)$, $MSO(n)$, $MU(n/2)$, $MSU(n/2)$, $MSp(n/4)$.

Si $G = e$ (grupo unidad), entonces el espacio fibrado universal ξ es trivial, la base $BG = *$ (un punto), pero la fibra es $\mathbb{R}^n$. Obtenemos

$$Me = S^n.$$

En particular, $SO(1) = e$ y $MSO(1) = S^1$. Luego: $O(1) = \{\pm 1\}$, $BO(1) = \mathbb{R}P^\infty$ (o $\mathbb{R}P^N$ para N grandes); el espacio fibrado universal η con un grupo $O(1)$ es de forma de un espacio fibrado normal respecto a $\mathbb{R}P^N$ en $\mathbb{R}P^{N+1}$:

$$E \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^N, \quad \text{fibra} \quad F = \mathbb{R}^1.$$

Un espacio $\widetilde{E}$ del espacio fibrado con fibra $D^1 = I$ consiste en los vectores de longitud $\leqslant 1$ en la fibra, es una «cinta de Moebius» (véase [1], p. II, § 2). La frontera $\partial\widetilde{E}$ es una esfera S^N que cubre $\mathbb{R}P^N$. Por eso, el espacio de Thom $M(\eta)$ es de forma

$$M(\eta) = MO(1) = \widetilde{E}/\partial\widetilde{E} = \mathbb{R}P^{N+1} \supset \mathbb{R}P^N = B.$$

Para $G = SO(2)$ tenemos de un modo análogo

$$\begin{array}{l} MSO(2) = \mathbb{C}P^{N+1} \supset \mathbb{C}P^N = B, \qquad N \to \infty. \\ \quad \| \\ MU(1) \end{array}$$

La clase fundamental en estos casos es el elemento básico de los grupos

$$u = \varphi(1) \in H^1(S^1; \mathbb{Z}) \quad \text{para} \quad MSO(1) = S^1;$$

$$u = \varphi(1) \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \quad \text{para} \quad MO(1) = \mathbb{R}P^\infty;$$

$$u = \varphi(1) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \quad \text{para} \quad MSO(2) = \mathbb{C}P^\infty.$$

Estos espacios son complejos del tipo $K(\pi, n)$ para $n = 1, 2$, $\pi = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$; el elemento $u = \varphi(1)$ coincide con el elemento fundamental del complejo $K(\pi, n)$; véase el § 10.

Tiene lugar el siguiente lema sencillo.

LEMA 5. *Los complejos de Thom $M(\xi)$ son implemente conexos con $n > 1$. Sus grupos homotópicos más simples son de forma:*

$$\pi_j(M(\xi)) = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

$$\pi_n(M(\xi)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \textit{el espacio fibrado es no orientable.} \\ \mathbb{Z}, & \textit{el espacio fibrado es orientable.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. La partición celular $M(\xi)$ se obtiene de una partición celular de la base B mediante la multiplicación por una célula (fibra)

$$B \subset \sigma^j \mapsto \varphi(\sigma^j) = p^{-1}(\sigma^j) = \sigma^{n+j}.$$

Además, hay una célula de dimensión nula $\sigma^0 \subset M(\xi)$ obtenida de $\partial\widetilde{E}$ mediante la contracción en un punto. Por eso $\pi_j(M(\xi)) = 0$ para $j < n$ (no hay células en estas dimensiones). Sea que B tiene sólo una célula de dimensión nula (para una base B conexa siempre es posible reducirla a este caso, como se mostró en el § 4); entonces en $M(\xi)$ hay sólo una célula de dimensión n (es una fibra sobre un punto). Así, el grupo $\pi_n(M(\xi))$ es cíclico. Para un espacio fibrado no orientable en la base se hallará una curva cerrada (la cual puede considerarse como una célula σ^1), que invierte la orientación de la fibra. Para esta célula σ^1 su preimagen $P^{-1}(\sigma^1) = \varphi(\sigma^1) = \sigma^{n+1}$ es una célula en $M(\xi)$ tal, que

$$\partial\sigma^{n+1} = 2\sigma^n.$$

Esto es geométricamente evidente en un espacio fibrado sobre S^1. Si el espacio fibrado es orientable, entonces las fronteras de todas las células $p^{-1}(\sigma_j^1)$ en un complejo $M(\xi)$ son iguales a cero. Por eso el ciclo $[\sigma^n]$ es de orden infinito. El lema queda demostrado, puesto que $H_n(M(\xi)) = \pi_n(M(\xi))$.

Tiene lugar el siguiente teorema importante.

TEOREMA 1. *Los grupos de cobordismos Ω_i^O, Ω_i^{SO} son canónicamente isomorfos a los grupos homotópicos estables*

$$\pi_{n+i}(MO(n)) \approx \Omega_i^O \quad \text{y} \quad \pi_{n+i}(MSO(n)) \approx \Omega_i^{SO}$$

para $i < n - 1$ (compárese con [1], p. II, § 23, *donde fue establecida la conexión entre los grupos $\pi_{n+i}(S^n) = \pi_{n+i}(Me)$ y los cobordismos de variedades equipadas).*

DEMOSTRACIÓN. a) Consideremos una variedad cerrada $M^i \subset \subset \mathbb{R}^{n+i}$, donde $i < n - 1$. Todas las inmersiones (encajes) $M^i \subset \subset \mathbb{R}^{n+i}$ son isotópicas (véase [1], p. II, § 11), y el espacio fibrado normal a M^i en $\mathbb{R}^{n+i}$ no depende de la inmersión, y lo designemos por ν. Surge una aplicación en un espacio fibrado universal

$$M^i \to BO(n),$$
$$\nu \to \xi,$$

donde ξ es un espacio fibrado universal con fibra $\mathbb{R}^n$. El espacio del espacio fibrado ν es un entorno de M^i en $\mathbb{R}^{n+i} \subset S^{n+i}$, y su imagen cubre todo el cuerpo $\widetilde{E}$. Prolonguemos esta aplicación en todo el complemento del entorno, de tal manera que todo este complemento se aplica en una célula $\sigma^0 \in M(\xi)$ obtenida mediante la contracción de $\partial\widetilde{E}$. Obtenemos la aplicación de la esfera

$$S^{n+i} \xrightarrow{f} M(\xi).$$

Esta aplicación es regular transversalmente en una subvariedad $BO(n) \subset M(\xi)$ y $f^{-1}(BO(n)) = M^i$. La noción de la regularidad transversal a lo largo de la subvariedad $BO(n) \subset M(\xi)$ consiste en lo siguiente: en cualquier punto $x \in f^{-1}(BO(n))$ la imagen del espacio tangente $\mathbb{R}_x^{n+i}$ con la aplicación lineal df es transversal respecto al plano tangente de la subvariedad $BO(n) \subset M(\xi)$ es decir, los espacios lineales $df(\mathbb{R}_x^{n+i})$ y $\tau_{f(x)}(BO(n))$ engendran conjuntamente todo el espacio tangente a $M(\xi)$ en el punto $f(x)$ (véase [1], parte II, § 10).

Coloquemos el cobordismo (película) W^{i+1}, donde $\partial W^{i+1} = = M_1^i \cup M_2^i$, en el producto $\mathbb{R}^{n+i} \times I(0, 1)$ de tal modo, que $M_1^i \subset \subset \mathbb{R}^{n+i} \times 0$, $M_2^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \times 1$ y W^{i+1} se apoya normalmente contra los bordes. Repitiendo la construcción anterior para un haz normal ν a $W^{i+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times I$, obtenemos la homotopía

$$S^{n+i} \times I(0, 1) \to M(\xi).$$

Así, queda construida la correspondencia (homomorfismo)

$$\Omega_i^O \to \pi_{n+i}(MO(n)), \quad i < n-1,$$

De modo análogo se construye el homomorfismo

$$\Omega_i^{SO} \to \pi_{n+i}(MSO(n)), \quad i < n-1.$$

b) Mostremos, que la correspondencia construida es un isomorfismo. Sea dado un elemento $a \in \pi_{n+i}(MO(n))$ representado por la aplicación.

$$f: S^{n+i} \to MO(n).$$

Es posible considerar, si se efectúa una perturbación pequeña (véase [1], p. II, § 10), que la aplicación f es transversalmente regular a lo largo de la subvariedad $BO(n) \subset MO(n)$. La imagen completa $f^{-1}(BO(n)) = M^i$ es una subvariedad suave regular $M^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \subset S^{n+i}$. La imagen de los n-planos normales respecto a M^i en $\mathbb{R}^{n+i}$ con aplicación df es transversal a $BO(n)$. Mediante la deformación elemental de aplicación esta imagen por doquier a lo largo de $BO(n)$ puede ser normalizada respecto a $BO(n)$, y es posible contraer todo el complemento del entorno de la variedad M^i en S^{n+i} en un punto σ^0 obtenido de $\sigma\widetilde{E}$ en $MO(n)$. De aquí se deduce la demostración del teorema 1 para Ω_i^O. Todo es análogo para Ω_i^{SO}.

El teorema queda demostrado.

TEOREMA 2. a) *El ciclo $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z}_2)$ es realizado por una subvariedad cerrada $M^i \subset M^{n+i}$ si, y sólo si, se halla una aplicación $M^{n+i} \xrightarrow{f} MO(n)$ tal, que $f^*u = Dx$, donde $u \in H^n(MO(n); \mathbb{Z}_2)$ es una clase fundamental y D es el operador de la dualidad de Poincaré.*

b) *Sea M^{n+i} una variedad orientada. El ciclo $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z})$ es realizado por una subvariedad cerrada orientada $M^i \subset M^{n+i}$ si, y sólo si, se halla una aplicación $f: M^{n+i} \to MSO(n)$* tal, que $f^*u = Dx$.

c) *El ciclo $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z})$ es realizado por una subvariedad cerrada orientada con un espacio fibrado normal trivial $M^i \subset M^{n+i}$ (es decir, con un juego dado de las ecuaciones regulares $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_n = 0$ en M^n)* si, y sólo si, se halla una *aplicación $f: M^{n+i} \to Me = S^n$ tal, que $f^*u = Dx$.*

OBSERVACIÓN. Es justo un teorema analógico para poder realizar un ciclo por una subvariedad con un espacio fibrado normal prescrito con un grupo estructural $U(n/2)$, $SU(n/2)$, $Sp(n/4)$, etc. La aplicación de la variedad M^{n+i} en $MU(n/2)$, $MSU(n/2)$, $MSp(n/4)$ etc. engendra tal realización.

Los grupos $\pi_{n+i}(MU(n/2)) = \Omega_i^U$, $\pi_{n+i}(MSU(n/2)) = \Omega_i^{SU}$, $\pi_{n+i}(MSp(n/4)) = \Omega_i^{Sp}$ naturalmente es posible interpretarlos como cobordismos complejos (unitarios), complejos especiales y de cuaternios Ω^U, Ω^{SU}, Ω^{Sp}. Son importantes extraordinariamente los cobordismos unitarios. Cada variedad compleja y casi compleja tiene una clase de cobordismos en los grupos Ω_{2i}^U.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 PARA $G = O(n)$.

Sea dada una subvariedad $M^i \subset M^{n+i}$. Un espacio fibrado normal es definido por una construcción ya expuesta, la aplicación

$M^{n+i} \xrightarrow{f} MO(n)$, donde $M^i \to BO(n)$; Todo el complemento del entorno de la variedad M^i en M^{n+i} se aplica en un punto σ^0, obtenido por la contracción de $\partial\widetilde{E}$ al construirse $M(\xi)$. Es fácil ver que

$$f^*u = D[M^i].$$

Por el contrario, si se da a lo largo de $BO(n) \subset MO(n)$ una aplicación transversalmente regular $f: M^{n+i} \to MO(n)$, entonces una imagen completa $M^i = f^{-1}(BO(n))$ es tal, que $f^*u = D[M^i]$. Para $G = SO(n)$ y otros, todo es análogo.

El teorema queda demostrado.

En algunos casos los complejos $MO(i)$, $MSO(i)$ son complejos de forma $K(\pi, n)$. Son los casos:

$$MSO(1) = Me = S^1 = K(\mathbb{Z}, 1), \qquad \pi_j = 0, \quad j > 1,$$

$$MO(1) = \mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1), \qquad \pi_j = 0, \quad j > 1,$$

$$MSO(2) = \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2), \qquad \pi_j = 0, \quad j \neq 2.$$

Con esto el elemento $\varphi(1) = u \in H^n(MG)$ coincide con una clase fundamental del complejo $K(\pi, n)$ en estos tres casos*). Según el teorema del § 10 obtenemos un juego de los corolarios del teorema 2.

COROLARIO 1. a) *Cualquier ciclo $x \in H_n(M^{n+1}; \mathbb{Z}_2)$ para todo n es realizado por una subvariedad cerrada.*

b) *Cualquier ciclo $x \in H_n(M^{n+1}; \mathbb{Z})$ y $x \in H_n(M^{n+2}; \mathbb{Z})$ para todo n se realiza por una subvariedad cerrada orientable.*

La deducción del corolario del teorema 2 se reduce al hecho de que un cociclo $Dx = y$ para estos casos se representa en forma de la imagen f^*u, según una propiedad fundamental de $K(\pi, n)$, puesto que $MO(1)$, $MSO(1)$, $MSO(2)$ son complejos $K(\pi, 1)$.

COROLARIO 2. Si $i < n/2$, *entonces para cualquier ciclo $x \in H_i(M^n; \mathbb{Z})$ se hallará un número $\lambda \neq 0$ tal, que un ciclo λx se representa como una subvariedad $M^i \subset M^{n+i}$.*

Este corolario se deduce del teorema 2 con ayuda de los resultados del § 10: se estableció que en las dimensiones estables cualquier complejo (aquí es $MSO(n)$) «se arregla de la misma manera que el producto directo de los complejos de tipo $K(\pi, m)$, donde $m \geqslant n$ si se multiplica todo tensorialmente por un campo $\mathbb{Q}$».

COROLARIO 3. *Para cualquier ciclo $x \in H_i(X; \mathbb{Z})$ se halla un número $\lambda \neq 0$ tal, que al ciclo λx es una imagen de la variedad M^i.*

$$\varphi: M^i \mapsto X,$$

$$\varphi_*[M^i] = x.$$

---

*) Un teorema más complejo (de Thom), afirma que todos los complejos $MO(n)$ hasta la dimensión $2n-1$ son homotópicamente equivalentes a un producto directo de los complejos de tipo $K(\mathbb{Z}_2, m_j)$, donde $m_j \geqslant n$.

La demostración consiste en la inmersión $X \subset \mathbb{R}^{N+i}$ y en la examinación de una variedad con borde $U \supset X$, que contrae hacia X: $U \sim X$. Después el ciclo $\lambda x \in H_i(U) \approx H_i(X)$ se realiza en base al corolario 2 como una subvariedad con ayuda de la aplicación $(U, \partial U) \xrightarrow{f} MSO(N)$, donde ∂U se aplica en un punto y $f^*u = D[M^i]$.

COROLARIO 4. El homomorfismo natural

$$\Omega_i^{SO}(X, Y) \otimes \mathbb{Q} \to H_i(X, Y; \mathbb{Q})$$

de los grupos de bordismos en la homología es un «epimorfismo» (aplicación en todo).

Para los complejos sin torsión impar en las homologías $H_*(X, Y; \mathbb{Z})$ es justo el teorema (de Nóvikov) que establece un hecho análogo sin la multiplicación tensorial en el campo $\mathbb{Q}$, o sea, los ciclos son realizados por las imágenes de las variedades sin multiplicidades.

Ahora pasemos a los corolarios del teorema 1 y del teorema de Cartan—Serre (véase el § 10). El anillo $H^*(BSO(n); \mathbb{Q})$ es engendrado por clases características y es un anillo de los ploinomios de los elementos (clases de Pontriaguin y clase de Euler—Poincaré):

$$p_i \in H^{4i}(BSO(n); \mathbb{Q}),$$

$$\chi \in H^{2n}(BSO(2n); \mathbb{Q}).$$

Con eso, tenemos para $j < n$ y $j \neq 4k$:

$$H^{n+j}(MSO(n); \mathbb{Q}) = 0.$$

El rango de los grupos estables

$$H^{4k}(BSO(n); \mathbb{Q}) \overset{\varphi}{\approx} H^{n+4k}(MSO(n); \mathbb{Q})$$

para $4k < n$ es igual al número de las particiones del número k en los sumandos, $k = m_1 + \ldots + m_q$, puesto que la base consiste en los monomios $z = p_{m_1} p_{m_2} \ldots p_{m_q}$ (son posibles las coincidencias de $m_i = m_j$), $\deg z = 4(m_1 + \ldots + m_q)$.

Para las dimensiones $4k = 4, 8$, hemos escrito más arriba (véase el p. I) los números característicos de las variedades $[\mathbb{C}P^2] \in \Omega_4^{SO}$ y $[\mathbb{C}P^2]^2, [\mathbb{C}P^4] \in \Omega_8^{SO}$. Del teorema 1 junto con el de Cartan-Serre se deduce el siguiente teorema.

TEOREMA 3. *Los grupos $\Omega_j^{SO} \otimes \mathbb{Q} = 0$ para $j \neq 4k$; $\Omega_{4k}^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ es un grupo de rango igual al número de posibles vectores linealmente independientes, o sea de los números característicos de las variedades M^{4k}. Para $4k = 4, 8$ se deduce de los cálculos (véase más arriba), que el juego de los números característicos en $\mathbb{Q}$-cohomologías determina completamente la clase de cobordismos $x \in \Omega_{4k}$ con exactitud de torsión*).*

PROBLEMA 7. Calcular los vectores de los números característicos

*) Una información completa sobre la estructura de los anillos Ω^{SO}, Ω^U el lector puede encontrarla en el resumen [60].

de los productos $CP_1^{2n_1} \otimes \ldots \otimes CP_2^{2n_k}$ y mostrar, que todos estos vectores son linealmente independientes.

COROLARIO. *La signatura $\tau[M^{4k}]$ es una forma lineal de los vectores de los números característicos.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos, que τ es una forma lineal en $\Omega_{4k}^{SO} \otimes \mathbb{Q}$, según el lema 3 (véase más arriba), mientras los números característicos dan una base completa de formas. El corolario queda demostrado.

Para $4k = 4{,}8$ tenemos:

$$k=1: p_1[\mathbb{C}P^2]=3, \quad \tau[\mathbb{C}P^2]=1; \quad \Omega_4^{SO} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}.$$

CONCLUSIÓN: $\tau = \frac{1}{3} p_1$. (1)

$k = 2$: ya hemos obtenido la matriz (véase la parte I):

	$[\mathbb{C}P^2]\times[\mathbb{C}P^2]$	$[\mathbb{C}P^4]$
p_1^2	18	25
p_2	9	10
τ	1	1

CONCLUSIÓN. Tiene lugar la fórmula

$$\tau = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2). \tag{2}$$

Es posible obtener una fórmula general para todo k en una forma analítica conveniente (Hirzebruch).

Es conveniente plantear un problema más general: sea dada una característica numérica arbitraria en los cobordismos $\Omega_*^G = \Sigma\Omega_i^G$ para $G = U, SO$

$$\mathbb{B}: \Omega_*^G \to \mathbb{C}$$

tal, que $\mathbb{B}(1) = 1$, $\mathbb{B}(M_1^n \cup M_2^n) = \mathbb{B}(M_1^n) + \mathbb{B}(M_2^n)$, $\mathbb{B}(M_1^n \times M_2^n) = \mathbb{B}(M_1^n)\mathbb{B}(M_2^n)$, es decir, aditiva y multiplicativa (respecto al producto directo de las variedades). De hecho, nos interesa sólo el anillo $\Omega_*^G \otimes \mathbb{Q}$, determinado por los números característicos que son polinomios de c_i o de p_i. Para cualquier dimensión par $n = 2k$ en el caso $G = U$ tenemos un polinomio $\mathbb{B}_k(c_1, \ldots, c_k)$ tal, que $\mathbb{B}[M^{2k}] = (\mathbb{B}_k(c_1, \ldots, c_k), [M^{2k}])$, donde M^{2k} es una variedad «unitaria» (o sea, variedad en cuyo espacio fibrado normal estable se ha introducido la estructura de un U-espacio fibrado con inmersión $M^j \subset \mathbb{R}^{2N-j}$; en particular, una U-estructura se obtiene como una reflexión débil de una estructura de variedades compleja (o casi compleja), que «recuerda» las clases características). Para $G = SO$

tenemos los polinomios $\mathbb{B}_k(p_1, \ldots, p_k)$ para todas las dimensiones $n = 4k$ tales, que

$$\mathbb{B}[M^{4k}] = (\mathbb{B}_k(p_1, \ldots, p_k), [M^{4k}]).$$

El caso $G = SO$ se reduce a $G = U$ mediante la condición complementaria $\mathbb{B}_{2k+1}(c_1, \ldots, c_{2k+1}) = 0$, como se verá en adelante.

La sucesión de los polinomios ($\mathbb{B}_0 = 1, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots, \mathbb{B}_k, \ldots$) no es arbitraria, sino que se encuentra fuertemente vinculada a la condición de multiplicatividad de $\mathbb{B}(M^{2k} \times M^{2l}) = \mathbb{B}(M^{2k})\,\mathbb{B}(M^{2l})$.

Busquemos la respuesta en la siguiente forma: se ha dado la serie formal

$$\mathbb{B}(zt) = 1 + a_1 zt + a_2 z^2 t^2 + \ldots = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{B}_k(\eta)\, z^k, \qquad t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$$

con coeficientes numéricos, que determina una clase característica para los U-espacios fibrados unidimensionales. Tomamos

$$\mathbb{B}_k(c_1, \ldots, c_k) = \Big[\prod_{i=1}^{n} \mathbb{B}(zt_1)\,\mathbb{B}(zt_2) \ldots \mathbb{B}(zt_n)\Big]_k = \mathbb{B}_k(\sigma_1, \ldots \sigma_k)$$

donde $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ son polinomios elementales simétricos de $t_1, \ldots, t_n$.

Hay que tomar la serie $\mathbb{B}(zt)$ para el caso $G = SO$ en forma $\mathbb{B}(zt) = P(z^2t^2)$, las clases p_k son de forma $p_k \leftrightarrow \sigma_k(t_1^2, \ldots, t_n^2)$, véase más arriba.

Según la fórmula de Cauchy podemos escribir

$$\mathbb{B}_k(c_1, \ldots, c_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{B}(zt_1) \ldots \mathbb{B}(zt_n) \frac{dz}{z^{k+1}} \; (n \geqslant k).$$

Para $\mathbb{C}P^n$ tenemos, según las fórmulas de las clases características de un espacio fibrado tangente,

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{n+1} = t \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}),$$

$$\tau_{\mathbb{C}P^n} \oplus 1 = \eta \oplus \ldots \oplus \eta \; (n+1 \text{ sumandos}),$$

$$\mathbb{B}(\eta) = \sum \mathbb{B}_k(\eta)\, z^k, \quad \mathbb{B}(\tau_{\mathbb{C}P^n}) = \mathbb{B}(\eta)^{n+1}.$$

Para el número $\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n]$ tenemos

$$\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n] = [\mathbb{B}(\eta)^{n+1}]_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varepsilon} \mathbb{B}(z)^{n+1} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

(componente n-ésimo de la serie por z).

EJEMPLO 1. $\mathbb{B}[\mathbb{C}P^{2n}] = 1$, $\mathbb{B}[\mathbb{C}P^{2n+1}] = 0$. Aquí $\mathbb{B}(zt) = zt/th\,(zt)$. En este caso $\mathbb{B}$ coincide con la signatura τ:

$$\mathbb{B} = \tau, \quad \mathbb{B}_k = L_k(p_1, \ldots, p_k).$$

Esto da una fórmula general para los polinomios de Hirzebruch

$$\tau = (L_k(p_1, \ldots, p_k)\, M^{4k}).$$

EJEMPLO 2. $\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n) = 1$ para todo n. Aquí

$$\mathbb{B}(zt) = zt/(1 - \exp(-zt)).$$

Esto es el llamado «género de Todd» $T[M^{2n}]$ de las variedades algebraicas (complejas): según el teorema (de Hirzebruch), $T[M^{2n}] = \sum (-1)^i r_i$, donde r_i son las dimensiones de los espacios de las formas diferenciales puramente holomorfas en la variedad M^{2n};

$$T_0 = 1, \quad T_1 = \frac{1}{2} c_1, \quad T_2 = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2), \quad T_3 = \frac{1}{24} c_1 c_2.$$

Deduzcamos una fórmula general para la serie $\mathbb{B}(z)$ en el caso de una característica arbitraria $\mathbb{B}: \Omega_*^U \to \mathbb{C}$. Introduzcamos una serie importante formal $\sum\limits_{n \geqslant 0} [\mathbb{C}P^n] z^n$ y su "integral" $g(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1} z^{n+1}$. Le confrontemos a esta serie el valor de la característica $\mathbb{B}$:

$$g\mathbb{B}(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n)}{n+1} z^{n+1}.$$

Tenemos

$$\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=\varepsilon} \frac{\mathbb{B}^{n+1}(t)}{t^{n+1}}\, dt,$$

$$\frac{dg\mathbb{B}(z)}{dz} = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{B}(\mathbb{C}P^n) z^n = \frac{1}{2\pi i z} \sum_{n \geqslant 0} \oint_{|w|=\varepsilon} \left(\frac{\mathbb{B}(w)}{w} z\right)^{n+1} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \frac{\mathbb{B}(w)/w}{1 - z\mathbb{B}(w)/w}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \frac{dw}{w/\mathbb{B}(w) - z}$$

$$\left|\frac{z\mathbb{B}(w)}{w}\right| < 1.$$

Por eso

$$g\mathbb{B}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^z \oint_{|w|=\varepsilon} \frac{dw\, dv}{(w/\mathbb{B}(w)) - v}, \qquad |z| < \left|\frac{w}{\mathbb{B}(w)}\right|.$$

Integrando respecto a v, hallamos:

$$g\mathbb{B}(z)=\left[\frac{z}{\mathbb{B}(z)}\right]^{-1},$$

puesto que esta integral representa una función inversa. Así, hemos obtenido una respuesta general (Nóvikov):

$$\mathbb{B}(z)=\frac{z}{g^{-1}(z)}, \qquad (3)$$

donde

$$g\mathbb{B}(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n)}{n+1}z^{n+1}.$$

III. Algunas aplicaciones de la fórmula de la signatura. La signatura y los problemas de invariación de clases.

Mostremos que en la base de la noción de signatura pueden ser definidas también las mismas clases características p_k en $\mathbb{Q}$-cohomologías.

Consideremos el ciclo $x\in H_{4k}(M^n)$ y calculemos el producto escalar (p_k, x) sólo mediante la signatura. Es posible considerar, que $4k<n/2-1$ (si no es así, pasamos de la variedad M^n a $M^n\times S^N$). El cociclo $y=D(x)\in H^{n-4k}(M^n)$ es posible, multiplicando por $\lambda\neq 0$, realizarlo en forma de imagen con la aplicación

$$f: M^n\to S^{n-4k}=Me,$$
$$f^*(u)=\lambda y.$$

Esto se deduce de los resultados del p. II. La preimagen completa $f^{-1}(x_0)$ de un punto regular $x_0\in S^{n-4k}$ es una subvariedad con un espacio fibrado normal trivial

$$i: M^{4k}\times\mathbb{R}^{n-4k}\subset M^n,$$

donde $i_*[M^{4k}]=\lambda x\in H_{4k}(M^n)$.

Supongamos para $k=1$:

$$(p_1, x)=\frac{1}{\lambda}(p_1, \lambda x)=\frac{1}{\lambda}3\tau(M^{4k})$$

en virtud de la fórmula (1) y de la trivialidad de un espacio fibrado normal respecto a $M^{4k}\subset M^n$.

Esto da una definición nueva de la clase p_1. De modo análogo para la clase p_2 de (2) tenemos:

$$(p_2, x)=\frac{1}{\lambda}(p_2, \lambda x)=\frac{1}{7\lambda}[(45\tau(M^{4k})+(p_1^2, \lambda x)].$$

Es posible deducir de la fórmula general de Hirzebruch, que para todo k la clase p_k se puede expresar por $\tau(M^{4k})$ y el producto de

las clases de dimensiones inferiores. Esto da una nueva definición de las clases p_k. La definición «de signatura» permite demostrar sin dificultad la invariación de las clases racionales p_k con homeomorfismos lineales a trozos (suaves a trozos) (véase la idea más abajo) y desempeña un papel importante en la demostración de la invariación de las clases p_k respecto a cualesquiera homeomorfismos continuos. Como se ve, la definición de signatura es sustancialmente racional: en ella se contienen los denominadores «necesarios», por ejemplo, 1/7 para la clase p_2. Esto tiene sus consecuencias: las clases de cohomologías con coeficientes enteros $p_k \in H^{4k}(M^n; \mathbb{Z})$, que, por definición, son invariantes del difeomorfismo, a veces son elementos de orden finito; una 7-torsión de la clase p_2 resulta no invariante respecto a los homeomorfismos continuos.

Consideremos una variedad lineal a trozos (triangulada) M^n y su aplicación simplicial en la esfera $M^n \xrightarrow{f} s^{n-4k}$. Entonces la preimagen completa de la parte interior del simplex $\sigma^{n-4k} \subset s^{n-4k}$ es de forma (¡verifíquese!)

$$\sigma^{n-4k} \times p^{-1}(y_0) = f^{-1}(\sigma^{n-4k}) = \sigma^{n-4k} \times M^{4k} \subset M, \qquad y_0 \in \sigma^{n-4k},$$

donde M^{4k} es una variedad de triangulación, o por lo menos un complejo, para cualquier punto de la cual $x_0 \in M^{4k}$ tenemos "homologías locales de esfera"

$$\begin{aligned} &H_i(M^{4k}, M^{4k} \setminus x_0) = 0, \qquad i \neq 4k, \\ &H_{4k}(M^{4k}, M^{4k} \setminus x_0) = \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

PROBLEMA 8. Demostrar que para las variedades homológicas (4) es justa la dualidad de Poincaré en las homologías, está definida la signatura $\tau(M^{4k})$ con las propiedades ordinarias: si $M^{4k} = \partial W^{4k+1}$, donde ambas son variedades homológicas, entonces $\tau = 0$.

Estas propiedades permiten dar una definición puramente simplicial (y combinatorio-invariante) de las clases $p_k \in H^*(M; \mathbb{Q})$ (Thom, Rojlin-Schwarz) en base a la fórmula de signatura. La clase $p_2 \in H^8(M; \mathbb{Z})$ no admite definición combinatoria y es no invariante combinatoriamente (topológicamente) (Minor, Kervaire).

Pasando al problema de la invariación topológica de las clases $p_k \in H^{4k}(M; \mathbb{Q})$, es posible considerar todas las variedades $M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}$ simplemente conexas. Sea $n \geqslant 2$. Consideremos la inmersión del toro $T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ y un dominio abierto en la variedad examinada:

$$M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}.$$

En cualquier estructura suave el dominio

$$M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}$$

es una variedad suave. Utilizando una técnica más comlicada de la teoría de clasificación de las variedades suaves simplemente conexas, difundida al caso de las variedades con los grupos abelianos libres $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$, se demuestra tal afirmación (variante más simple): si $\pi_1 (M^{4k}) = 0$, entonces el cubrimiento suave universal sobre una variedad suave abierta $M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R}$ (dado en cualquier estructura suave) es difeomorfo a $\widetilde{M}^{4k} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} M^{4k} \times \mathbb{R} \times \times T^{n-1}$, donde M^{4k} es una variedad suave. De aquí, con inducción por k se llega a la afirmación de que la magnitud $\tau (M^{4k}) = \tau (\widetilde{M}^{4k})$ define las clases características $p_1, \ldots, p_k$ de un modo topológicamente invariante (Nóvikov). Hasta ahora no se conocen demostraciones de este teorema, donde se lograría librarse de, parecería, una utilización artificial de los dominios auxiliares con un grupo abeliano libre π_1 es en este problema «simplemente conexo puro», por un planteamiento no conexo con π_1.

Notemos, que ya la clase $p_1 \in H^4 (M^k; \mathbb{Q})$, a diferencia de las homologías y las clases de Stiefel-Whitney, no es un invariante homotópico (Dold). Consideremos los espacios fibrados (sea $\chi = 0$ para $n = 4$) sobre una esfera S^4 con fibra S^{n-1}, grupo $G = SO(n)$ y todas las clases posibles $p_1 (\xi) \in H^4 (S^4; \mathbb{Z})$. El espacio de tal espacio fibrado $E \xrightarrow{p} S^4$, $F = S^{n-1}$ tiene las células σ^0, σ^4, σ^{n-1}, σ^{n+3}, donde $\partial\sigma^4 = \partial\sigma^{n-1} = 0$, $\partial\sigma^{n+3} = 0$. Por eso E es del tipo

$$E = (S^4 \vee S^{n-1}) \bigcup_{\alpha} \sigma^{n+3},$$

donde $\alpha \in \pi_{n+2} (S^4 \vee S^{n-1})$.

PROBLEMA 9. Demostrar que el elemento α es del tipo

$$\alpha = [a_4, a_{n-1}] + b,$$

donde $b \in \pi_{n+2} (S^{n-1})$, $[a, b]$ es producto de Whitehead (véase [1], p. II, § 22), $a_4 \in \pi_4 (S^4)$ y $a_{n-1} \in \pi_{n-1} (S^{n-1})$ son generatrices. Para $n=5$, $b \in \pi_7 (S^4) = \mathbb{Z} \oplus$ (grupo finito) se encuentra en una parte finita.

Luego, sabemos del § 10 (corolario del teorema de Cartan-Serre), que el grupo $\pi_{n+2} (S^{n-1})$ para $n \neq 5$, es finito. (Es más, en el § 10 este grupo fue calculado para $n > 5$, donde $\pi_{n+2} (S^{n-1}) = \mathbb{Z}_{24}$). Así, se tiene no más de un número finito de las variedades cerradas E con exactitud de un tipo homotópico (para $n > 5$ hay no más que 24). Estas variedades tienen dimensión $n \geqslant 6$. En cuanto al difeomorfismo, la clase $p_1 (\xi)$ es un invariante de la variedad E, puesto que $p_1 (E) = p^* p_1 (\xi)$ (¡verifíquese!).

Así, ya la clase p_1 es homotópicamente no invariante para las variedades de dimensión $\geqslant 6$. Para las variedades M^4 esta clase es

homotópicamente invariante en virtud de la fórmula (véase más arriba)

$$p_1 = 3\tau [M^4].$$

Consideremos el caso $n = 5$. El ciclo básico $x \in H_4(M^5; \mathbb{Z})$ puede ser representado en concordancia con el corolario 1 del p. II en forma de una subvariedad orientable que divide localmente una variedad orientable M^5 en dos partes (pero no la divide globalmente). Consideremos un cubrimiento mínimo

$$\hat{M}^5 \xrightarrow[p]{} M^5$$

tal, que $(p_* \pi_1(\hat{M}^5), Dx) = 0$, y esta fórmula define el cubrimiento de una manera homotópicamente invariante. Este cubrimiento se

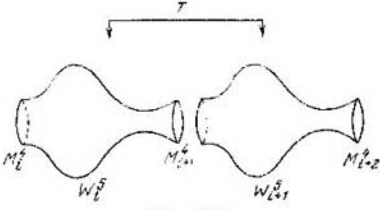


Fig. 118.

construye geométricamente así: la variedad M^5 se corta a lo largo de M^4; se obtiene una película W^5 tal, que

$$\partial W^5 = M^4 \cup M^4$$

(dos componentes de borde). El cubrimiento es de la forma indicada en la fig. 118: se toma un número infinito de ejemplares de W^5 designados por W^5_i.

Luego, hacemos

$$\hat{M}^5 = \ldots \bigcup_{M^4_1} W^5_1 \bigcup_{M^4_2} W^5_2 \bigcup_{M^4_3} W^5_3 \ldots$$

El grupo de monodromia del cubrimiento es igual a $\mathbb{Z}$ y actúa así:

$$T(W^5_i) = W^5_{i+1}$$
$$T(W^4_i) = M^4_{i+1}, \quad \partial W^5_0 = M^4_0 \cup M^4_1.$$

Designamos por i a la inmersión (al encaje) $M^4 \to \hat{M}^5$. Tenemos un ciclo $\hat{x} = i_*[M^4] \in H_4(\hat{M}^5)$. Es evidente que tenemos $T_*\hat{x} = \hat{x}$.

Sea $a, b \in H^2(\hat{M}^5; \mathbb{Q})$. Introducimos la forma

$$\langle a, b\rangle_{\hat{x}} = \langle ab, \hat{x}\rangle.$$

LEMA 6. *La forma* $\langle a, b\rangle_{\hat{x}}$ *está concentrada en algún subespacio de dimensión finita* $A \subset H^2(\hat{M}^5)$; *esto significa que* $H_1^2(\hat{M}^5) = A + B$ *y* $\langle B, b\rangle_x = 0$ *para cualquier* $b \in H^2(\hat{M}^5)$.

La demostración se deduce inmediatamente de la compacidad de la variedad M^4 (del ciclo $\hat{x}$), puesto que $(ab, \hat{x}) = ((i^*a)(i^*b), [M^4])$.

DEFINICIÓN 4. La signatura de la forma $\langle a, b\rangle_{\hat{x}}$ en un espacio de dimensión A se llama signatura del ciclo $\tau(\hat{x})$.

TEOREMA 4. (Nóvikov). *Tiene lugar la fórmula*

$$(p_1(M^5), x) = 3\tau(\hat{x}).$$

COROLARIO. *La clase* $p_1(M^5) \in H^4(M^5; \mathbb{Q})$ *es homotópicamente invariante.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. El ciclo $M^4 \subset M^5$ divide en dos partes $\hat{M}^5 = M_1 \cup M_2$. Tenemos dos inmersiones: i_1: $M^4 \to M_1$, i_2: $M^4 \to M_2$. La signatura del ciclo $\tau(\hat{x})$ coincide con la signatura de la forma en $H^2(M^4; \mathbb{Q})$ restringida en un subespacio $\operatorname{Im} i^*$, puesto que $(ab, x) = 0$, si $i^*a = 0$ o $i^*b = 0$. Evidentemente, tenemos

$$\operatorname{Im} i^* = \operatorname{Im} i_1^* \cap \operatorname{Im} i_2^*.$$

En las homologías $H_2(M^4, \mathbb{Q})$ se tienen los siguientes subgrupos:

$$L_0 = \operatorname{Ker} i_*, \quad L_1 = \operatorname{Ker} i_{1*} = L_0 + N_1,$$
$$L_2 = \operatorname{Ker} i_{2*} = L_0 + N_2,$$
$$L_3 = \operatorname{Im} i_* \subset H_2(\hat{M}^5; \mathbb{Q}).$$

El índice de intersección se anula en los subespacios L_1 y L_2 (los ciclos homológicos a nulo en la película, tienen intersección nula). Por eso en la base

$$H_2(M^4; \mathbb{Q}) = (L_0, N_1, N_2, L_3)$$

forma tiene la matriz de tipo (de bloque):

$$\begin{array}{c} \\ L_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L_0 & N_1 & N_2 & L_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & Q & Y \\ 0 & Q^* & 0 & Z \\ X^* & Y^* & Z^* & W \end{array} \right\| \end{array},$$

donde $W = W^*$. La signatura de esta forma coincide con la signatura de la forma en un subespacio L_3 (o sea, para la matriz W).

Luego, la signatura de la forma en el subespacio $L_3 \subset H_2(M^4; \mathbb{Q})$ coincide con la signatura de la forma $(ab, [M^4])$ en el subespacio $\operatorname{Im} i^* (H^2(\hat{M}^5))$ y, de este modo, coincide con la signatura $\tau(\hat{x})$. El teorema queda demostrado.

De manera que en las variedades cerradas no simplemente conexas entre las clases características racionales y un grupo fundamental, surge una conexión profunda cuyo estudio hasta ahora no está concluido ni mucho menos. Una «hipótesis sobre las signaturas superiores» más general consiste en lo siguiente: hay una reserva de las clases de cohomologías conexas con un grupo fundamental $\pi_1(M^n) = \pi$; esta clase se obtiene como una imagen $\operatorname{Im} j^*$, donde $j: M^n \to K(\pi, 1)$ es una aplicación canónica. Si $x \in H^{n-4k}(\pi, \mathbb{Q})^*$), entonces se supone que el producto escalar del polinomio de Hirzebruch de las clases características de Pontriaguin con el ciclo $Dj^*(x)$ es homotópicamente invariante: $(L_k(p_1, \ldots, p_k), Dj^*(x))$, donde D es la dualidad de Poincaré. Para los grupos libres abelianos (es decir, si x es un producto de clases unidimensionales) esta hipótesis está demostrada (Nóvikov, Rojlin, Caspárov, Hsiang, Farrell). Ella también está demostrada cuando π es un grupo fundamental de una variedad de Riemann compactada de curvatura negativa (Lusztig, Míschenko), así como también en una serie de casos o de modos algebraica reducidos a estos casos, o en cierto sentido análogos a estos casos (Keppell, Solovíov). Es imposible componer algunos otros invariantes homotópicos de las variedades cerradas de las clases características racionales (reales), o sea, del tensor de curvatura.

§ 28. Estructuras suaves en la esfera heptadimensional El problema de clasificación de las variedades suaves (invariantes normales). Torsión de Reidemeister e hipótesis básica de la topología combinatoria

Consideramos las variedades infinitamente diferenciables. Se sabe que la variedad de clase de suavidad $k \geqslant 1$ es equivalente (y además, única) a la variedad infinitamente diferenciable y hasta analítica real (Whitney). También es posible definir formalmente las variedades puramente continuas, donde no son suaves los cambios de coordenadas al pasar de un mapa de coordenadas al otro. Es asimismo posible examinar (lo que se realiza con mucha más frecuencia los homeomorfismos puramente continuos de las variedades suaves. Hasta los años 50 se consideraba «evidente» el hecho de que en cualquier variedad continua es posible introducir la estructura de una variedad suave y que dos variedades suaves continuamente homeomorfas en realidad, son también difeomorfas. Esto es evidente

*) En el álgebra de cohomología del complejo $K(\pi, 1)$ se llaman cohomologías los grupos π y se designan por $H^*(\pi, \mathbb{Q})$.

para $n = 1$, se demuestra sin dificultad para $n = 2$; con grandes complicaciones, pero empleando métodos elementales se logra establecer esos hechos para las variedades tridimensionales (Moise).

Uno de los más asombrosos corolarios del aparato expuesto más arriba de la topología algebraica consiste en descubrir entre las variedades bastante simples una variedad tal, que sea continuamente homeomorfa a una esfera suave heptadimensional ordinaria S^7, pero que no sea difeomorfa a la esfera S^7 (Milnor). Como se verá más adelante, este efecto conduce a descubrir variedades que no admiten la introducción de ninguna estructura de la variedad diferenciable.

Recordemos que con ayuda de cuaternios (véase [1], p. II, § 24) construíamos un «espacio fibrado de Hopf de cuaternios»

$$S^7 \xrightarrow{p} S^4, \quad \text{fibra} \quad F = S^3.$$

Esto es un espacio fibrado principal con el grupo $S^3 = SU\,(2)$ que consiste en los cuaternios q, $|q| = 1$, que actúan en la esfera así

$$S^7 = \{(q_1, q_2), \ |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}, \qquad (q_1, q_2) \to (qq_1, qq_2),$$

donde q_1, q_2, q son cuaternios. Pusto que $SU\,(2) \subset SO\,(4) = SU\,(2) \times \times\,(SU\,(2)/(-1, 1))$, entonces es posible hablar sobre las clases (χ, p_1). Vamos a estudiar los espacios fibrados análogos al grupo $SO\,(4)$, a los que realizaremos como espacios fibrados con fibra D^4 y base S^4:

$$E \xrightarrow[p]{} S^4, \quad F = D^4, \quad G = SO\,(4). \tag{1}$$

El número χ es igual, por definición, al índice de autointersección $S^4 \circ S^4$ donde $S^4 \subset E$ como intersección nula (véase [1], parte II, § 24). (Con mayor exactitud, χ es una clase de cohomologías de la base S^4, $\chi \in H^4\,(S^4; \mathbb{Z})$ tal, que $(\chi, [S^4]) = S^4 \circ S^4$.

LEMA 1 *El espacio ∂E del espacio fibrado* (1) *con fibra S^3 es homeomorfo a la esfera S^7* si, y sólo si, $\chi = 1$.

Demostremos que ∂E tiene un tipo homotópico de la esfera S^7 si, y sólo si $\chi = 1$. Consideremos la sucesión exacta

$$\ldots \to \pi_i\,(\partial E) \xrightarrow{p_*} \pi_i\,(S^4) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}\,(S^3) \to \ldots$$

Para $i = 4$ el homomorfismo ∂: $\pi_4\,(S^4) \to \pi_3\,(S^3)$ se calcula así: construimos una sección no nula del espacio fibrado (1) con fibra D^4. Ahora está claro que el índice de autosección $S^4 \circ S^4$ coincide con la multiplicidad, con la cual el ciclo S^3 (fibra) entra en la frontera $\partial\,[\sigma^4]$ en ∂E. Así, $\partial\,[S^4] = \chi\,[S^3]$ (véase [1], p. II, § 22). Si $\chi \neq 1$, tenemos

$$0 \to \mathbb{Z}_\chi \to \pi_3\,(\partial E) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\pi_3\,(S^4)}.$$

Por eso $\pi_3(\partial E) = \mathbb{Z}_\chi$. Si $\chi = 1$, entonces $\pi_j(\partial E) = 0$ para $j \leqslant 4$, como se deduce de la sucesión exacta. Como ∂E tiene solamente las células σ^0, σ^3, σ^4, σ^7 y $\pi_j = 0$ para $j \leqslant 4$, tenemos en realidad

$$H_j(\partial E) = \pi_j(\partial E) = 0, \quad j < 7, \quad \pi_7(\partial E) = \mathbb{Z}.$$

El elemento básico $\alpha \in \pi_7(\partial E) = \mathbb{Z}$ se representa por la aplicación $\alpha\colon S^7 \to \partial E$, la cual induce isomorfismo de los grupos de homologías (y, por consiguiente, de los grupos homotópicos). Así, $\partial E \sim S^7$.

Hay un teorema general (Smale, Stallings, Wallace), según el cual para $n \geqslant 5$ la variedad de tipo homotópico S^n es homeomorfa a S^n. De aquí, claro, se deduce el lema 1. Es posible, sin utilizar este teorema, construir concretamente algunos de los espacios fibrados mediante los cuaternios e indicar directamente el homeomorfismo $\partial E \approx S^7$, presentando explícitamente una función de Morse con un solo mínimo y un solo máximo (véase más abajo). Si $\chi = 1$ está fijado, tenemos espacios fibrados con diferentes clases p_1.

LEMA 2. *Para cualquier k existe un espacio fibrado ξ tal, que $p = 2k$, $\chi = 1$ (más exactamente, $p_1 = 2ku$, $\chi = u$, donde $u \in H^4(S^4; \mathbb{Z})$ es un elemento básico).*

Antes de demostrar el lema 2 presentaremos un mecanismo que conduce al surgimiento de las estructuras suaves no triviales en la esfera S^7.

Consideremos la clase $p_1(E) = p^*p_1(\xi)$, puesto que $\tau_E = \tau_{S^4} \oplus p^*(\xi)$. Por eso

$$p_1(E) = p^*p_1(\xi) = 2kp^*u = 2kv,$$

donde $v = p^*u \in H^4(E; \mathbb{Z})$ es un elemento básico. Tenemos para el ciclo $S^4 \subset E$

$$S^4 \circ S^4 = 1 = (\chi, [S^4]).$$

Por eso la signatura $\tau(E) = 1$.

Razonamiento por el contrario: si el borde ∂E es una esfera ordinaria $S^7 = \partial D^8$ (como una variedad suave), entonces tenemos una variedad suave

$$\overline{E}^8 = E \cup D^8, \text{ donde } \partial E = \partial D^8.$$

Luego, $H_i(\overline{E}^8) = H_i(E)$ para $i \leqslant 7$,

$$p_1(\overline{E}^8) = p_1(E) = 2kv,$$

$$\tau(E) = 1 - (\overline{E}^8).$$

Para una variedad suave cerrada $\overline{E}^8$ del tipo homotópico HP^2 (de un plano proyectivo de cuaternios) podemos aplicar la fórmula de signatura (véase el § 24):

$$p_2 = \frac{1}{7}(45\tau + p_1^2).$$

¡Con eso el número $(p_2, [\overline{E}^8])$ debe ser entero! En nuestro caso

$$\tau = 1, \quad p_1^2 = 4k^2,$$
$$p_2 = \frac{4k^2+45}{7}.$$

Para $k = 1$ tenemos: $p_2 = 7$ para un plano proyectivo de cuaternios ordinario $\mathbb{H}P^2$. Para $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$ etc. tenemos: ¡p_2 es un número no entero! Contradicción con la suavidad de $\overline{E}^8$.

CONCLUSIÓN. Para todo k, cuando p_2 es fraccionario, la variedad ∂E no es difeomorfa a la esfera S^7 (aunque sea homeomorfa a S^7).

Es sabido, que las clases p_q $H^{4k}(M^n; \mathbb{Q})$ son invariantes de los homeomorfismos continuos (Nóvikov). Por supuesto de aquí se deduce que la variedad $\overline{E}^8$ para $k = 0, 2$ no admite la introducción de una estructura suave. Realmente, la existencia de una estructura suave para $\overline{E}^8$ contradiría la invariación de la clase $p_1(E)$, ya que, evidentemente, τ es invariante. Por otra parte, un análisis detallado muestra que para algunos otros ejemplos es posible contentarse con medios más simples que el empleo de la invariación topológica de las clases p_q (Kervaire).

Ahora pasemos a demostrar el lema 2.

En principio consideremos el $SO(3)$, que es un espacio fibrado sobre S^4. Puesto que $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$, tenemos una aplicación (transformada en un espacio fibrado)

$$BSO(3) \underset{p}{\rightarrow} k(\mathbb{Z}_2, 2); \qquad F = BSU(2),$$

además, $\pi_1(B) = 0$. La sucesión espectral en las $\mathbb{Z}$-homologías tiene la forma $E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) = E^\infty_{p,q}$, $p+q \leqslant 5$:

4	u	0	u_1	0	u_2	u_3
	0	0	0	0	0	0
0	1	0	v	0	w	x
	0	1	2	3	4	5

$d_5 x = 0$, puesto que $2u \neq 0$, $2x = 0$, de donde se deduce, que $\pi_4(BSO(3)) \xrightarrow{H} H_4(BSO(3); \mathbb{Z})$ no es una aplicación «en» Coker $H = \mathbb{Z}_2$.

La clase $p_1 \in H^4(BSO(3), \mathbb{Q})$ es tal, que

$$(p_1, u) = 2,$$

donde u es un elemento básico del grupo $H\pi_4 \subset H_4(BSO(3); \mathbb{Z})$. De manera que para $G = SO(3)$ el número $(p_1, [S^4])$ recorre todos los valores pares para los espacios fibrados ξ sobre S^4.

Sumergiendo (encajando) $SO(3)$ en $SO(4)$ pasamos de ξ a $\xi \oplus 1$, donde $p_1(\xi \oplus 1) = p_1(\xi)$, $\chi(\xi \oplus 1) = 0$.

Ahora consideremos $SO(4) = (SU(2) \times SU(2))/(-1, -1)$ y una aplicación (espacio fibrado)

$$BSO(4) \xrightarrow[p]{} K(\mathbb{Z}_2, 2), \qquad F = BSU(2) \times BSU(2).$$

En la sucesión espectral para las $\mathbb{Z}$-homologías, considerando que $\pi_1(B) = 0$, tenemos

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) = E^\infty_{p,q}, \qquad p + q \leqslant 5,$$

4	u, y	0	u_1, x_1	0	u_2, x_2	
	0	0	0	0	0	0
0	1	0	v	0	w	x
	0	1	2	3	4	5

Aquí $2x = 2v = 2w = 0$, $d_5 x = 0$, puesto que $2u \neq 0$, $2y \neq 0$. La aplicación $H: \pi_4(BSO(4)) \to H_4(BSO(4); \mathbb{Z})$ no es un isomorfismo: Coker $H = \mathbb{Z}_2$.

CONCLUSIÓN Como p_1, χ es una base en un espacio conjugado Hom $(H_4, \mathbb{Z})$, entonces χ puede tomar cualesquiera valores enteros para los espacios fibrados sobre S^4, y los p_1 son pares.

El lema queda demostrado.

Construcción directa de los espacios fibrados (Milnor). Recordemos (véase [1], p. II, § 24), que los $SO(4)$-espacios fibrados sobre la esfera «se numeran» por los elementos del grupo $\pi_3(SO(4)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, o sea, por los pares de los números enteros (h, j). La construcción explícita de las aplicaciones correspondientes $f_{hj}: S^3 \to SO(4)$ es dada por cuaternios:

$$f_{hj}(u)\,v = u^h v u^j,$$

donde $u, v \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, $|u| = 1$ (o sea, $u \in S^3$). Designemos por ξ_{hj} al espacio fibrado correspondiente sobre S^4.

PROBLEMA 1. Demostrar, que

$$\chi(\xi_{hj}) = h + j, \qquad p_1(\xi_{hj}) = \pm 2(h - j).$$

Sean los números h y j tales, que $h + j = 1$, $h - j = k$. Designemos por M^7_k a un espacio fibrado ξ_{hj} (donde en la fibra está la

esfera S^3). Esta variedad puede ser pegada de dos ejemplares $\mathbb{R}^4 \times \times S^3$ mediante la pegadura de los subconjuntos $(\mathbb{R}^4 \setminus 0) \times S^3$ por un difeomorfismo

$$(u, v) \mapsto (u', v') = \left(\frac{u}{|u|^2}, \frac{u h_{vu}j}{|u|^2} \right)$$

(¡comprobarlo!)

PROBLEMA 2. Verificar, que la función f de forma

$$f(u, v) = \frac{\operatorname{Re} v}{(1 + |u|^2)^{1/2}} = \frac{\operatorname{Re} u''}{(1 + |u''|^2)^{1/2}},$$

donde $u'' = u'(v')^{-1}$ tiene en M_k^7 exactamente 2 puntos críticos $(u, v) = (0, \pm 1)$ que son no degenerados.

De aquí se deduce que todas las variedades M_k^7 son homeomorfas a la esfera S^7. Del problema 1 y de los razonamientos de este parágrafo (más arriba), se deduce que para $k^2 \not\equiv 1 \pmod 7$ la variedad M_k^7 no es difeomorfa a S^7.

Así, vemos que se tienen variedades no triviales de un tipo homotópico de esfera («esferas homotópicas»). El conjunto de las variedades del tipo homotópico S^n es cerrado respecto a la operación de «suma conexa» de las variedades (véase el § 4):

$$M_1^n \# M_2^n \sim S^n.$$

DEFINICIÓN 1. Dos variedades cerradas M_1^n y M_2^n (de cualquier tipo homotópico) se llaman *h-cobordantes* (o *J-equivalentes*), si se halla una película W^{n+1}, $\partial W^{n+1} = M_1^n \cup M_2^n$, además la película W^{n+1} se contrae a cada uno de sus bordes.

LEMA 3. *Las clases de h-cobordismos de las esferas homotópicas forman el grupo θ^n.*

DEMOSTRACIÓN: siempre es justa la asociatividad de una suma conexa (no sólo para las esferas homotópicas); consideremos la suma de una esfera homotópica orientable M_+^n y la misma esfera con una orientación opuesta $(M_+^n) \# (M_-^n) = M_0^n$. La variedad M_0^n es una frontera de la siguiente variedad W^{n+1} (véase la fig. 119).

Del producto $M_+^n \times I(0, 1)$ se excluye el producto $D_\varepsilon^n \times I$, donde $D_\varepsilon^n \subset M_+^n$ es una esfera (globo) pequeña abierta de radio ε. Suavizando los ángulos notemos que $\partial W^{n+1} = M_+^n \# M_-^n$, y W^{n+1} es contractable.

Exluyendo de W^{n+1} una esfera (globo) pequeña abierta D_0^n obtendremos un h-cobordismo entre ∂W^{n+1} y la esfera ordinaria S^n.

El lema queda demostrado.

Introducimos las siguiente s designaciones: ∂P^{n+1} es un subgrupo en θ^n, consistente en las fronteras de las variedades $(n+1)$-dimensionales que admiten la paralelización; $J_n \subset \pi_{N+n}(S^N)$, $n < < N - 1$ es un subgrupo consistente en pertrechamientos en la

esfera ordinaria $S^n \subset \mathbb{R}^{N+n}$ (véase [1], p. II, § 23). Tiene lugar el siguiente hecho:

Cualquier esfera homotópica M^n al encajarse (sumergirse) en $\mathbb{R}^{N+n}$ tiene un espacio fibrado trivial normal (para $n = 4k$ esto se deduce de la periodicidad de Bott (véase el § 22) y de la fórmula de signatura para p_k, teniendo en cuenta, que $\tau(S^n) = 0$; para $n \neq 4k$, $8k + 1$, $8k + 2$ es un corolario del hecho de que los grupos

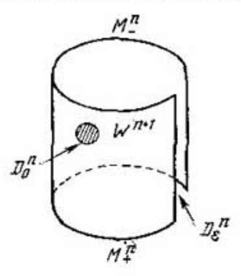


Fig. 119.

homotópicos $\pi_n(SO) = 0$; para $n = 8k + 1$, $8k + 2$ es el teorema de Adams que se deduce de una técnica más moderna de la topología algebraica).

Por eso, teniendo en cuenta la arbitrariedad en la elección del pertrechamiento en $M^n \subset \mathbb{R}^{N+n}$, obtenemos el homomorfismo $\theta^n \to \pi_{N+n}(S^N)/J^n$. El núcleo de este homomorfismo es un grupo ∂P^{n+1} (¡comprobarlo!);

Para el grupo ∂P^{n+1} se tienen los siguientes resultados: a) $\partial P^{n+1} = 0$, si n es par,

$$\text{b) } \partial P^{n+1} = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \\ \mathbb{Z}_2, & n = 10, \\ 0 \quad \text{o} \quad \mathbb{Z}_2, & \text{si } n = 4k + 1, \end{cases}$$

c) ∂P^{n+1} es igual a un grupo cíclico de algún orden finito, igual a 28 para $n = 7$ (de hecho, ya hemos construido más arriba un homomorfismo no trivial $\theta^7 \to \mathbb{Z}_7$). El caso singular $n = 3$ no se examina. Los grupos $\Gamma_n = \pi_{N+n}(S^N)/J^n$ y θ^n son de la forma:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Gamma_n =$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\theta^n =$	0	0	0	?	0	0	0	$\mathbb{Z}_{28}$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^3$	$\mathbb{Z}_2$

Así son los hechos (Milnor, Kervaire) sobre los grupos de las esferas homotópicas θ^n. Tiene lugar un teorema (Smale): para las variedades simplemente conexas de dimensión $n \geqslant 5$ cualquier h-cobordismo W^{n+1} es trivial, o sea $W^{n+1} = M^n \times I$. Por eso los grupos θ^n dan una clasificación de las estructuras suaves en las esferas, excluyendo las dimensiones $n = 3, 4$.

Las estructuras suaves en la esfera y las clasificaciones de las variedades de una esfera de tipo homotópico es el mismo problema con $n \neq 3, 4$. El grupo θ^3 es desconocido, pero no hay estructuras suaves no triviales en S^3. Es conocido el grupo $\theta^4 = 0$, pero se ignora si hay suavidades no triviales en S^4.

Expondremos ahora la teoría de la clasificación de las variedades suaves cerradas simplemente conexas de dimensión $n \geqslant 5$ (Nóvikov, Browder)*). Naturalmente surge la pregunta: ¿cuáles son las invariantes, excepto un tipo homotópico y una clase de equivalencia del espacio fibrado tangente, que definen una variedad suave cerrada? Para el caso particular de las esferas homotópicas hemos indicado la teoría (Milnor-Kervaire) que resuelve estos problemas. El enfoque de este problema para las variedades generales es el siguiente: trabajamos con un espacio fibrado normal estable ν^N con inmersión (encaje) $M^n \subset R^{n+N}$, definido de una manera unívoca por un espacio fibrado tangente τ^n si $N > n + 1$ en virtud de la igualdad

$$\tau^n \oplus \nu^N \sim 0.$$

Las variedades suaves de cualquier tipo homotópico no esférico, sin duda, no forman ningún grupo. Resulta muy útil examinar un complejo de Thom $M(\nu^N)$. Hay una inmersión (encaje) natural $M^n \subset M(\nu^N)$ y una aplicación de todo un entorno U de la variedad M^n en $\mathbb{R}^{n+N} \subset S^{n+N}$:

$$U \to M(\nu^N),$$

donde ∂U se aplica en un punto. El entorno de U es precisamente el espacio fibrado ν^N. La aplicación de los pares $(U, \partial U) \to (M(\nu^N), *)$ se prolonga de una manera natural hasta la aplicación de una esfera, trasladando un complemento del entorno U en la esfera S^{N+n} en un punto *:

$$\psi = \psi_{M^n} : S^{N+n} \to M(\nu^N).$$

Para la aplicación $\psi = \psi_{M^n}$ tenemos

$$\psi_* [S^{N+n}] = \varphi [M^n] \subset H_{n+N}(M(\nu^N)).$$

*) Para $n = 4$ de esta teoría se deduce sólo la afirmación que las variedades homotópicamente equivalentes son h-cobordantes.

Así, el ciclo $\alpha [M^n]$ es esférico. Luego, el grupo $H_{n+N} (M (\nu^N); \mathbb{Z})$ es igual a $\mathbb{Z}$, $n < N + 1$. Como corolario de los resultados del § 10 tenemos:

$$\pi_{N+n} (M (\nu^N)) = \mathbb{Z} + D,$$

donde D es un grupo abeliano finito.

A la variedad M^n, en virtud de esta construcción, le corresponde un elemento $\psi_{M^n} \in \pi_{N+n} (M\nu^N))$ tal. que $\psi_* [S^{N+n}] = \varphi [M^n]$. Por eso $\psi_{M^n} = 1 + \alpha$, $\alpha \in D$. Tiene lugar la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN 1 (Nóvikov). a) *A cada variedad M_1^n para la cual es dada una equivalencia homotópica $M_1^n \xrightarrow{f} M^n$ (deg $f = +1$, $f^*\nu^N_{M^n} = \nu^N_{M_1^n}$), que conserva un espacio fibrado normal y orientación, le corresponde un elemento $\psi_{M_1^n} \in \pi_{N+n} (M (\nu^N))$ de forma $1 + \alpha$, $\alpha \in D$ (aunque, hablando en general, no uno). Para $n \neq 4k + 2$ es justa también la afirmación inversa. Para $n = 4k + 2$ los elementos «realizables» $1 + \alpha$ pueden recorrer un subgrupo $\alpha \in \widetilde{D} \subset D$, donde $\widetilde{D} = D$, $\widetilde{D}$ tiene el índice 2.*

b) *Si dos tales variedades M_1^n y M_2^n resultan estar en una misma clase $1 + \alpha \in \pi_{n+N} (M (\nu^N))$, entonces se hallará una esfera de Milnor $\theta \in \partial P^{2n+1}$ tal, que $M_1^n \# \theta = M_2^n$.*

COROLARIO. *Con un tipo homotópico dado y un espacio fibrado tangente (o de sus invariantes, las clases $p_k \in H^* (M^n; Q)$) puede ser sólo un número finito de las variedades suaves simplemente conexas no difeomorfas de par en par de dimensión $n \geqslant 5$ (todos los invariantes construidos de difeomorfismo toman valores en los grupos abelianos finitos).*

Otro teorema (Browder, Nóvikov) muestra, qué espacios fibrados vectoriales ξ sobre una variedad suave M_1^n pueden ser realizados como los espacios fibrados normales $M_2^n \subset \mathbb{R}^{n+N}$ de alguna otra variedad M_2^n de un tipo homotópico M_1^n:

a) Para esto es necesario, y con $n = 6$, 14 y todos los $n = 2k + 1 \geqslant 5$ impares, también suficiente, que un ciclo $\varphi [M_1^n] \in H_{n+N} (M (\xi))$ sea esférico (imagen de la esfera S^{N+n}).

b) Cuando $n = 4k$ para la condición de suficiencia hay que añadir la condición de que un polinomio de Hirzebruch de parte de las clases $p_1 (\xi), \ldots, p_k (\xi)$ coincida con la signatura $\tau [M_1^n]$. Es evidente la necesidad de esta condición, véase más arriba la fórmula de signatura.

En efecto, este teorema puede ser formulado de una manera más general (Browder): es posible suponer que M_1^n no es una variedad, sino sólo un complejo en cuyas cohomologías con coeficientes enteros (que no son locales, sino globales) se tiene la dualidad de Poincaré. Se pregunta: ¿cuándo el complejo M_1^n es de tipo homotópico de la variedad suave cerrada M_2^n? Para eso es necesario y suficiente que

se halle un espacio fibrado estable ξ sobre M_1^n, donde el ciclo $\varphi(M_1^n)$ es esférico y se cumplen las condiciones a) y b).

Cuando $n = 4k + 2$, son justas las variantes de todos estos teoremas, pero se formulan de una manera más complicada; aquí no los presentamos.

PROBLEMA 3. Demostrar que tenemos para el caso de esfera $M^n = S^n$:

$$M(\nu^N) = S^N \vee S^{N+n},$$

$$\pi_{N+n}(M(\nu^N)) = \mathbb{Z} + \pi_{N+n}(S^N),$$

es decir, $D = \pi_{N+n}(S^n)$.

Para calcular el grado de multiformidad de este «invariante normal» $\psi_{M^n} \in \pi_{N+n}(M(\nu^N))$ hay que examinar un grupo de clases homotópicas de las aplicaciones de un espacio fibrado normal que tienen el grado $+1$ en la base:

$$M^n \xrightarrow{f} M^n, \quad \nu^N \xrightarrow{\tilde{f}} \nu^N.$$

Este grupo actúa en el complejo de Thom $M(\nu^N)$, las órbitas de acción en los elementos tolerables de tipo $1 + \alpha$ de $\pi_{N+n}(M(\nu^N))$ corresponden exactamente a las variedades con exactitud de adición de las esferas de Milnor de los subgrupos ∂P^{n+1}: $M_1^n \to M_1^n \# \partial P^{n+1}$.

PROBLEMA 4. Demostrar que para $M^n = S^n$ el grado de multiformidad se reduce a la factorización $\pi_{N+n}(S^N)/J^n$. Calcular el grupo de clases homotópicas de los automorfismos de variedad con un espacio fibrado normal para M^4, $\pi_1(M^4) = 0$; mostrar que este grupo actúa transitivamente en un conjunto de los elementos de forma $1 + \alpha$. Calcular estos grupos para $\mathbb{C}P^n$ y $S^k \times S^l$.

Prestemos atención a una propiedad más interesante (que puede ser establecida elementalmente) de las equivalencias homotópicas que conservan un espacio fibrado normal estable.

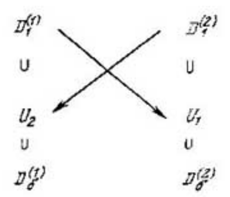
TEOREMA 1 (Mazur). *Si $f: M_1^n \to M_2^n$ es una equivalencia homotópica tal. que $f^*\nu_2^N = \nu_1^N$, entonces los espacios E_1 y E_2 de los espacios fibrados ν_2^N y ν_1^N con fibra $\mathbb{R}^N$ son difeomorfos (aquí no se supone el carácter simplemente conexo)*, $N > n + 2$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aproximación de la aplicación $f: M_1^n \to M_2^n \subset E_2$ con ayuda de una inmersión suave $\tilde{f}: M_1^n \subset E_2$ y la aproximación $\tilde{g}: M_2 \subset E_1$ de una aplicación «inversa» $g: M_2^n \to M_1^n \subset E_1$, donde $fg \sim 1$ y $gf \sim 1$. Consideramos que $N > n + 1$. Los espacios fibrados normales respecto a las imágenes $\tilde{f}(M_1^n) \subset E_2$ y $\tilde{g}(M_2^n) \subset E_1$, son ν_1^N y ν_2^N, por condición. Por eso hay un difeomorfismo de los dominios $D_1^{(2)}$ y $D_1^{(1)}$ formados por vectores de longitud <1 en ambos espacios fibrados E_2, E_1 en los ε-entornos U_1 y U_2 de

las inmersiones $\widetilde{f}(M_1^n) \subset E_2$ y $\widetilde{g}(M_2^n) \subset E_1$:

$$D_1^{(1)} \xrightarrow{\widetilde{F}} U_1 \subset E_2, \qquad D_1^{(2)} \xrightarrow{\widetilde{G}} U_2 \subset E_1.$$

Notemos lo siguiente: $U_1 \subset D_1^{(2)}$, $U_2 \subset D_1^{(1)}$. Están definidas las aplicaciones: $\widetilde{G}\widetilde{F} : D_1^{(1)} \to D_1^{(1)}$, $\widetilde{F}\widetilde{G}$: $D_1^{(2)} \to D_1^{(2)}$. Es posible considerar que el entorno U_1 contiene M_2^n y el entorno U_2 contiene M_1^n junto con sus δ-entornos $D_\delta^{(2)}$ y $D_\delta^{(1)}$ respectivamente, con δ suficientemente pequeños. En efecto, prestemos atención a que el entorno U_2 contiene una imagen difeomorfa $\widetilde{G}\widetilde{F}(D_1^{(1)})$. Con esto, la imagen de la sección nula es homotópica a sí misma. Por eso, mediante un difeomorfismo de toda la variedad E_1 inmóvil para todos los vectores de longitud $\geqslant 1/2$ e isotópico a un difeomorfismo idéntico, es posible hacer coincidir esta imagen con el entorno de la sección nula (véase [1], p. II, § 10). Aquí un papel importante desempeña la condición de estabilidad $N > n+2$, que permite emplear el teorema de Whitney. (Además, el lector verá fácilmente, que esta afirmación se deduce del teorema de Smale formulado más arriba en el caso simplemente conexo. Pero damos la demostración del teorema de Mazur también para las variedades no simplemente conexas.) Tenemos el diagrama de difeomorfismos e inmersiones (encajes)



Sin embargo $D_\delta^{(1)}$ con ayuda de un alargamiento canónico $E_i \xrightarrow{\delta^{-1}} E_i$ en δ^{-1} veces es difeomorfo de $D_1^{(1)}$, con eso el tamaño de U_i también se aumenta en δ^{-1} veces. Obtenemos, iterando el alargamiento múltiplemente:

$$D_\delta^{(1)} \subset U_2 \subset D_1^{(1)} \subset U_{2,\delta^{-1}} \subset D_{\delta^{-1}}^{(1)} \subset U_{2,\delta^{-2}} \subset D_{\delta^{-2}}^{(1)} \dots$$

$$\widetilde{F}^{-1} \qquad \widetilde{G}^{-1} \qquad \widetilde{F}_{\delta^{-1}}^{-1} \qquad \widetilde{G}_{\delta^{-1}}^{-1} \qquad \widetilde{F}_{\delta^{-2}}^{-1} \qquad \widetilde{G}_{\delta^{-2}}^{-1}$$

$$D_\delta^{(2)} \subset U_1 \subset D_1^{(2)} \subset U_{1,\delta^{-1}} \subset D_{\delta^{-1}}^{(2)} \subset U_{2,\delta^{-2}} \subset D_{\delta^{-2}}^{(2)} \dots$$

Puesto que $\bigcup_j U_{2,\,\delta^{-j}} = E_1 = \bigcup_j D^{(2)}_{\delta^{-j}}$, entonces una sucesión hinchada de difeomorfismos $\widetilde{F}^{(1)}_{\delta^{-j}} : U_{2,\,\delta^{-j}} \to D^{(2)}_{\delta^{-j}}$ en el límite da un difeomorfismo $E_1 \to E_2$. El teorema queda demostrado.

COROLARIO 1. *Los complejos de Thom de los espacios fibrados* ν_1^N, ν_2^N *sobre las variedades* M_1^n y M_2^n *son homeomorfas continuamente*:

$$M(\nu_1^N) \approx M(\nu_2^N).$$

La demostración es evidente.

PROBLEMA 5. Si $n = 3$. entonces todas las variedades orientables son paralelizables (demostrarlo).

COROLARIO 2. *Las variedades de lente* $L^3_p(q_j)$ $(j = 1, 2)$, *si son homotópicamente equivalentes (es decir*, $q_1 = \lambda^2 q_2$, *donde* q_1, q_2, λ *son residuos no nulos de módulo* p, p *es simple), tienen productos directos difeomorfos en* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 5$ *(véase el* § 11) $\mathbb{R}^5 \times L^3_p(q_1) = L^3_p(q_2) \times \mathbb{R}^5$, $q_1 = \lambda^2 q_2$.

Los complejos de Thom de los espacios fibrados $M(\nu_1)$ *y* $M(\nu_2)$ *son homeomorfos.*

Un hecho importante (Milnor): en el complejo de Thom $M(\nu)$ hay un punto especial $(*) \subset M(\nu)$, el cual está colocado de una manera combinatoria (con partición simplicial) como un cono sobre la frontera de una «estrella»—espacio fibrado ν_j con fibra S^{n-1}; los invariantes combinatorios de la frontera de la estrella son invariantes del mismo complejo. Si la esfera S^{n-1} es par, y el espacio fibrado ν_j es producto directo, entonces, la torsión de Reidemeister es de la forma

$$R(L^3_p(q) \times S^{n-1}) = R(L^3_p(q)) \times \chi(S^{n-1}),$$

donde χ es característica de Euler (¡Verifíquese!) En particular, puede suceder, por ejemplo, que $p = 7$:

$$R(L^3_p(q_1)) \times \chi(S^{n-1}) \neq R(L^3_p(q_2)) \times \chi(S^{n-1}),$$

donde $\chi(S^{n-1}) = 2$. Por eso los complejos de Thom $M(\nu_1)$ y $M(\nu_2)$ son no equivalentes combinatoriamente, aunque sean homeomorfos.

Bibliografía

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия.— М.: Наука, 1979. (*Dubrovin B. A., Nóvikov S. P., Fomenko A. T.* Geometría moderna. — Moscú, «Naúka», 1979).
2. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956. (*Rashevski P. K.* Curso de geometría diferencial. — Moscú, Gostejizdat, 1956).
3. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967. (*Rashevski P. K.* Geometría de Riemann y análisis tensorial.— Moscú, «Naúka», 1967).
4. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974. (*Pogorélov A. V.* Geometría diferencial. — Moscú, «Naúka», 1974).
5. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. (*Pogorélov A. V.* Geometría exterior de superficies convexas. — Moscú, «Naúka», 1969).
6. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Л.: Гостехиздат, 1948. (*Alexándrov A. D.* Geometría interior de superficies convexas. — Moscú Gostejizdat, 1948).
7. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. — М.: Наука, 1971. (*Efímov N. V.* Geométría superior. — Moscú, «Naúka», 1971).
8. Норден А. П. Теория поверхностей. — М.: Гостехиздат, 1956. (Norden A. P. Teoría de superficies. — Moscú, Gostejizdat, 1956).
9. *Фиников С. П.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1952. (*Fínikov S. P.* Curso de geometría diferencial. — Moscú, Gostejizdat, 1952).
10. *S. Kobayashi, K. Nomizu.* Foundations of differential geometry, Interscience publishers, New York, London, vol. 1—1963; vol. 2—1969.
11. *H. Seifert, W. Threlfall*, Lehrbuch der Topologie, Lepzig 1934 (New York 1947).
12. *H. Seifert, W. Threlfall.* Variationsrechnung im grossen, 1938.
13. *J. Milnor.* Morse Theory. Princeton, New Jersey, Princeton university press, 1963.
14. *J. Milnor.* Singular points of complex hypersurfaces. Annals of mathematics studies, número 61. Princeton university press and the university of Tokio press. Princeton, New Jersey, 1968.
15. *J. Milnor.* Lectures on the *h*-cobordism theorem. Princeton mathematical notes. Princeton, New Jersey. Princeton university press, 1965.
16. *Понтрягин Л. С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. — М.: Наука, 1976. (*Pontriaguin L. S.* Variedades suaves y sus aplicaciones en la teoría de homotopías. — Moscú, «Naúka», 1976).
17. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973. (Pontriaguin L. S. Grupos continuos. — Moscú, «Naúka», 1973).

18. *J.-P. Serre.* Lie algebras and Lie groups. Lectures given at Harvard university. New York — Amsterdam, Benjamin, 1966.
19. *G. Springer.* Introduction to Riemann surfaces. Department of Mathematics University of Kansas. Addison — Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, 1957.
20. *K. Nomizu.* Lie groups and differential geometry. The Mathematical Society of Japan, 1956.
21. *S. S. Chern.* Complex manifolds. The University of Chicago, autumn 1955 — winter 1956.
22. *Richard L. Bishop, Richard J. Crittenden.* Geometry of manifolds. Academic Press. New York and London, 1964.
23. *D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer.* Riemannsche geometrie in grossen. Lecture notes in mathematics. 55. Springer—Verlag. Berlin—Heidelberg—New York, 1968.
24. *Sigurdur Helgason.* Differential geometry and simmetric spaces. Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. Academic press. New York and London, 1962.
25. *Norman Steenrod.* The Topology of Fibre Bundles. Princeton, New Jersey, 1951.
26. *Розендорн Э. Р.* Задачи по дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1971. (*Rozendorn E. P.* Problemas de geometría diferencial).
27. *Новиков С. П., Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П., Фоменко А. Т.* Задачи по геометрии. — М.: Изд. МГУ, 1978. (*Nóvikov S. P., Mischenko A. S., Soloviov Yu. P., Fomenko A. T.* Problemas de geometría. — Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1978).
28. *D. Hilbert, S. Cohn—Vossen.* Anschauliche Geometrie. Berlin. 1932.
29. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977. *Rojlin V. A., Fux D. B.* Curso elemental de Topología. Capítulos geométricos. — Moscú, «Naúka», 1977).
30. *S. Lefschetz.* Algebraic Topology. 1942.
31. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. — М.: Гостехиздат, 1953. (*Gólubev V. V.* Lecturas de integración de las ecuaciones de movimiento del cuerpo sólido pesado cerca de un punto inmóvil. — Moscú, Gostejizdat, 1953).
32. *Sze—Tsen Hu.* Homotopy theory. Wayne State University, Detroit, Michigan. Academic Press. New York and London, 1959.
33. *A. Dold.* Lectures on algebraic Topology. Springer—Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1972.
34. *Edwin H. Spanier.* Algebraic topology. McGraw—Hill Company, New York—San Francisco—St. Louis. Toronto—London—Sydney. 1966.
35. *P. J. Hilton and S. Wylie.* Homology Theory. An introduction to algebraic topology. Cambridge. At the University Press, 1960.
36. *John W. Milnor and James D. Stasheff.* Characteristic classes. Annals of mathematics studies, Number 76. Princeton University Press and University of Tokyo Press. Princeton, New Jersey, 1974.
37. *Robert E. Stong.* Notes on cobordism theory. Princeton University Press and the University of Tokyo Press. Princeton, New Jersey, 1968.
38. *F. Hirzebruch.* Topological methods in algebraic geometry. Third enlarged edition. New appendix and translation from the second German Edition by R. L. E. Schwarzenberger. University of Warwick. With an additional section by A. Borel. Institute for advanced study, Princeton. Springer—Verlag, New York, 1966.
39. Расслоенные пространства и их приложения: Сб. переводов. — М.: ИЛ, 1958. (Espacios fibrados y sus aplicaciones. Colección de traducciones. Moscú. Literatura extranjera, 1958).
40. *Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л.* Гомотопическая тополо-

гия. — М.: Изд. МГУ, 1969. (*Fux D. B., Fomenko A. T., Gutenmajer V. L.* Topología homotópica. — Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1969).
41. *Dale Husemoller.* Fibre bundles. McGraw—Hill Book Company. New York—St. Louis—San Francisco—Toronto—London—Sydney, 1966.
42. *Robert E. Mosher, Martin C. Tangora.* Cohomology operations and applications in homotopy theory. Harper Row, Publishers. New York, Evanston, and London, 1968.
43. *André Weil.* Introductión à l'étude des variétés kählériennes. Hermann. Paris, 1958.
44. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.5 Изд. МГУ, 1971. (*Mischenko A. S., Fomenko A. T.* Curso de la geometría diferencial y topología. — Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1971).
45. Cohomology operations. Lectures by *N. E. Steenrod* written and revised by *D. B. A. Epstein.* Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1962.
46. Теория солитонов./Под редакцией Новикова С. П. — М.: Наука. 1979.
47. *Wilhelm Klingenberg.* Lectures on closed geodesics. Springer—Verlag. Berlin—Heidelberg—New York, 1978.
48. *Phillip Griffiths and Joseph Harris.* Principles of algebraic geometry. A Wiley—Interscience Publication. John Wiley Sons. New York—Chichester—Brisbane—Toronto. 1978.
49. *K*-theory. Lectures by *M. F. Atiyah*, notes by *D. X. Anderson.* Harvard University. Cambridge, Mass. 1965.
50. *William Browder.* Surgery on simply-connected manifolds. Springer—Verlag. Berlin—Heidelberg—New York. 1972.
51. *Болтянский В. Г., Ефремович В. А.* Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. (*Boltianski V. G., Efremovich V. A.* Topología evidente. 8— Moscú, «Naúka». 1982).
52. *Toda H.* Composition methods in homotopy groups of spheres.
53. *Adams J. F.* Stable homotopy theory. — Berlin, Springer—Verlag, 1966 (Lect. Notes, N 3).
54. *Morse M.* The calculus of variations in the large. — Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 18, N. Y., 1934.
55. *Альбер С. И.* О периодической задаче вариационного исчисления в целом. — УМН, 1957, 12, № 4, с. 57—124. (*Alber S. I.* Sobre el problema periódico de cálculo de variaciones en total. — «Uspeji matematícheskij naúk», 1957, 12, N 4, págs. 57—124).
56. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах. — Труды научно-исследовательского института математики и механики. — М., 1930. (*Lusternik L. A., Shnirelman L. G.* Métodos topológicos en los problemas variacionales. — Trabajos del Instituto de investigación científica de Matemáticas y Mecanica. — Moscú, 1930).
57. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Применение топологии к экстремальным задачам. Труды 2-го Всесоюзного математического съезда, 1935, т. I, с. 224—237. (Lusternik L. A., Shnirelman L. G. Aplicación de la topología a los problemas extremales. (Trabajos del segundo congresó de matemáticos de la URSS, 1935, v. I, págs. 224—237).
58. *Новиков С. П.* Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия, I.— ИАН СССР, сер. сер. матем., 1964, 28, с. 365—475. (*Nóvikov S. P.* Variedades suaves homotópicamente equivalentes, I. «Izvestiya Academii Naúk SSSR», serie matemática, 1964, 28, págs. 365—475).
59. *Новиков С. П.* О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях. — ИАН СССР, сер. матем., 1968, 30, с. 207—246. (*Nóvikov S. P.* Sobre variedades con un grupo abeliano funda-

mental libre y sus aplicaciones. — «Izvestiya Academii Naúk SSSR», serie matemática, 1986, 30, págs. 207—246).
60. *Новиков С. П.* Новые идеи в алгебраической топологии. — УМН, 1965, 20, № 3, с. 41—66. (*Nóvikov S. P.* Nuevas ideas en la topología algebraica. — «Uspeji matematícheskij naúk», 1965, 20, N 3, págs. 41—66).
61. *Фоменко А. Т.* Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле. — ИАН СССР, сер. матем., 1971, 35, с. 667—681. (*Fomenko A. T.* Periodicidad de Bott desde el punto de vista de la funcional de Dirichlet multidimensional. — «Izvestiya Academii Naúk SSSR», serie matemática, 1971, 35, págs. 667—681).
62. *Фоменко А. Т.* Многомерная задача Плато в римановых многообразиях. — Матем. сб., 1972, 89, с. 475—520. (*Fomenko A. T.* Problema multidimensional de Plateau en las variedades de Riemann. — Colección matemática, 1972, 89, N 3, págs. 475—520.
63. *Milnor J.* Whitehead torsion. Bull. Amer. Math. Soc. 1966, v. 72, N 3, p. 358—426).
64. *Milnor J.* On manifolfs homeomorfic to the 7-sphor. Ann. Math. 64, 1956, 399—405.
65. *Мищенко А. С.* Эрмитова *K*-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа. — УМН, 1986, 31, № 2, с. 69—134. (*Míschenko A. S. K*-teoría hermitiana. Teoría de las clases características, los métodos del análisis funcional. — «Uspeji matem. naúk», 1986, 31, N 2, págs. 69—134).
66. *Бухштабер В. М., Мищенко А. С., Новиков С. П.* Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии. — УМН, 1971, 26, № 2, с. 131—154. (*Bujshtaber V. M., Míschenko A. S., Nóvikov S. P.* Grupos formales y su papel en el aparato de la topología algebraica. — «Uspeji matemat. naúk», 1971, 26, N 2, págs. 131—154).
67. *Рохлин В. А.* Теория внутренних гомологий. — УМН, 1959, 14, № 4, с. 3—20. (*Roflin V. A.* Teoría de homologías internas. — «Uspeji matem. naúk», 1959, 14, N 4, págs. 3—20).
68. *Рохлин В. А.* 3-мерное многообразие — граница 4-мерного. — ДАН СССР, 1951, 81, № 3, с. 355—357. (*Roflin V. A.* Variedad 3-dimensional es una frontera de la variedad 4-dimensional. — «Docladi Academii Naúk» SSSRS, 1951, 81, N 3, págs. 355—357).
69. *Atiyah M. F.* Thom complexes. Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1961, v. XI, N 42, 291—310.
70. *Milnor J.* Differential topology. Lectures on Modern Mathematics. v. II (edited by T. L Saaty, Published by John Wiley Sons, Inc. 1964).
71. *Smale S.* On the structure of manifolds. Amer. J. Math. 1962, v. 84, N 3, 387—399.
72. *Smale S.* Topology and mechanics. I. Invent. Math. 1970, v. 10, N 4, 305—31
Smale S. Topology and mechanics. II. Invent. math. 1970, v. 11, N 1, 45—64.
73. Лекции на математическом семинаре по гомотопической топологии. — УМН, 1966, 21, № 5, с. 117—248. (Lecturas del semanario matemático dedicado a la topología homotópica. «Uspeji matem. naúk», 1966, 21, N 5, págs. 117—248).
74. *Kervaire M. A.* A manifold which does not admit any differentiable structure. — Comment. Math. Helv., 1960, 34, N 4, p. 257—270.
75. *Kervaire M. A., Milnor J.* Groups of homotopy spheres, 1. — Ann. Math., 1963, 77, p. 504—537.
76. *Milnor J.* Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. — Ann. Math., 1961, 74, p. 575—590.
77. *Serre J.-P.* Cohomology modulo 2 des complexes d'Eilenberg. — McLane. — Comment. Math. Helv., 1953, 27, p. 198—231.

78. *Cartan B.* Algebres d'Eilenberg-McLane et homotopie. — Seminaire H.Cartan, Ecol Norm. Super. (7e année), 1954/1955.
79. *Milnor J.* A survey of cobordism theory. Enseign. Math. 1 1962, 8, N 1—2, p. 16—23.
80. *Nóvikov S. P.* Pontryagin classes, the fundamental groups and some problems of stable algebra. — Ess. on topology and rel. topics. Memories dedies a Georges de Rham. — Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1970.
81. *Adams J. F.* Stable homotopy and generalised homology. — Chicago Lect. Notes in Math., 1974.

S. P. Nóvikov

SUPLEMENTO 1

TEORÍA ANÁLOGA A LA DE MORSE PARA LAS FUNCIONES MULTIFORMES. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS PARÉNTESIS DE POISSON.

Sea M una variedad suave cerrada de número finito o infinito de dimensiones (por ejemplo, algún espacio de curvas (caminos) que unen dos puntos x_0 y x_1 de una variedad suave W^m o un espacio de curvas cerradas orientadas que son aplicaciones suaves de las circunferencias en W^m). Demos una 1-forma cerrada ω en la variedad M; existe un cubrimiento (de hojas infinitas) $\hat{M} \xrightarrow{p} M$ tal, que la forma $p^* \omega$ es una diferencial de la función (un ejemplo más simple es $\omega = d\varphi$ en $\mathbb{R}^2 \setminus 0 = M$, donde $\hat{M}$ es una superficie de Riemann de logaritmo):

$$p^* \omega = dS. \tag{1}$$

Llamaremos a S «función multiforme» en la variedad M. En caso de dimensión infinita supongamos que en los puntos críticos (estacionarios) ($dS = 0$ o $\omega = 0$) la función S tenga una segunda diferencial d^2S que tiene un número finito de cuadrados negativos («índice de Morse») y un grado finito de degeneración. De hecho vamos a examinar sólo un caso, cuando todos los puntos críticos no son degenerados, o bien forman variedades críticas no degeneradas (véase el § 3). También supongamos, que S tiene un «descenso gradiental» correctamente definido, es decir, en la variedad $\hat{M}$ cualquier conjunto compacto al descender por el gradiente S ora pende en un punto crítico, ora pasa sucesivamente por todos los niveles de la función S «hacia abajo».

Problema: construir una teoría análoga a la de Morse para estimar el número de los puntos críticos de una función multiforme S (es decir, de una 1-forma cerrada ω) de cualquier índice de Morse i. Designemos al número de los puntos estacionarios con índice de Morse i por $m_i(S)$ o por $m_i(\omega)$, $p^* \omega = dS$.

Es posible en el grupo $H_1(M, \mathbb{Z})$ escoger tal base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_N)$, que

$$\oint_{\gamma_j} \omega = \begin{cases} 0, & j \geqslant k+1, \\ \varkappa_j \neq 0, & j \leqslant k, \end{cases} \tag{2}$$

además, todos los números $\varkappa_j$ con $j = 1, \ldots, k$ son linealmente independientes con coeficientes racionales (o enteros). El número $k - 1$ se llama «grado de irracionalidad» de la forma. Un grupo de monodromia de un cubrimiento mínimo $p \colon \hat{M} \to M$, que transforma ω en una diferencial de una función unívoca $dS = p^*\omega$, es igual exactamente a $\mathbb{Z}^k$, que es un grupo abeliano libre con k generatrices $t_1, \ldots, t_k$ que actúan como desplazamientos en M

$$t_j : \hat{M} \to M.$$

De hecho el exponente de la irracionalidad es un punto del espacio proyectivo

$$\varkappa = (\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 : \ldots : \varkappa_k) \in \mathbb{R}P^{k-1}.$$

Un caso especialmente simple e interesante es $k = 1$, cuando la forma ω da un elemento de un grupo con coeficientes enteros de cohomologías $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{Z})$. En este caso, el $\exp\{2\pi iS\}$ es una función unívoca de valor complejo, por módulo igual a 1, o sea, la aplicación

$$f = \exp\{2\pi iS\} : M \to S^1. \tag{3}$$

El problema sobre la construcción de una teoría análoga a la de Morse para los puntos críticos de tales aplicaciones es, sin duda, de aspecto clásico, pero este problema recién fue examinado en la literatura en el año 1981.

Examinemos ejemplos de dimensiones infinitas de las «funcionales multiformes», que conducen de una manera natural a los problemas más arriba planteados. Sea W^m una variedad de Riemann con la métrica completa $g_{ij}(x)$ en la cual está dada una 2-forma cerrada Ω, $d\Omega = 0$. Definimos un recubrimiento $W^m = \bigcup_\alpha U_\alpha$ por tal familia de dominios, que

a) la forma Ω es exacta en cualquier U_α:

$$\Omega \mid U_\alpha = d\psi_\alpha. \tag{4}$$

b) para cualquier aplicación suave γ del segmento I o de la circunferencia S^1 en W^m existe un dominio U_α tal, que γ está completamente en U_α.

Consideremos la variedad $M = \Omega(x_0, x_1, W^m)$ de las curvas (caminos) que unen dos puntos, o $M = \Omega^+(W^m)$ de las curvas ce-

rradas orientadas y recubrámoslas con los dominios $M = \bigcup_\alpha N_\alpha$, donde N_α consta de todas las curvas $\gamma \subset U_\alpha$. Cada intersección $N_\alpha \cap N_\beta$ se representa de la forma $N_\alpha \cap N_\beta = \bigcup_q N_{\alpha\beta}^{(q)}$, donde q es el número de la clase de homologías de la curva en $H_1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbb{R})$ cerrada o con dos extremos x_0, x_1. En cada conjunto N_α definimos una funcional unívoca

$$S^{(\alpha)}\{\gamma\} = \int_\gamma (dl - \psi_\alpha). \tag{5}$$

LEMA 1. *En las intersecciones $N_{\alpha\beta}^{(q)}$ para cada q la diferencia de las funcionales $S^{(\alpha)}\{\gamma\} - S^{(\beta)}\{\gamma\}$ es una constante.*

Efectivamente, la diferencia de las funcionales se representa de forma

$$S^{(\alpha)} - S^{(\beta)} = \int_\gamma (\psi_\beta - \psi_\alpha), \tag{6}$$

donde $d\psi_\alpha = d\psi_\beta$. Por eso, para cada clase de homologías q esta integral es una constante. El lema queda demostrado.

De manera que un juego de las funcionales $S^{(\alpha)}$ define una «funcional multiforme» S tal, que δS es una 1-forma definida de manera global en la variedad de dimensión infinita M.

Este ejemplo se generaliza naturalmente: sea dada alguna funcional univoca bastante regular $S_0\{\gamma\}$ para las aplicaciones suaves $\gamma\colon V^l \to W^m$ de dos variedades de Riemann completas, sean dados una $(l + 1)$-forma cerrada Ω en W^m, $d\Omega = 0$ y un recubrimiento $W^m = \bigcup_\alpha U_\alpha$ tal, que

a) $\Omega \mid U_\alpha = d\psi_\alpha$.

b) Para cualquier γ hay un número α tal, que la imagen de γ se encuentra completamente en el dominio U_α.

Por analogía a lo antedicho en la variedad M de todas las aplicaciones $V^l \to W^m$ («campos de Chiral») surge una «funcional multiforme» $S = S_0 + \int_\gamma \psi_\alpha$ (véase [4], § 5).

Volvamos al caso $l = 1$, cuando para las métricas de Riemann completas g_{ij} en la variedad W^m y para cualquier 2-forma Ω los índices de Morse de todos los puntos estacionarios son finitos y el haz del descenso gradiental a $\hat{M}$ está definido correctamente. Tal situación surge para el análogo de la llamada «funcional de Maupertuis-Fermat»: trayectorias del movimiento de una partícula cargada en un campo potencial de fuerzas $u(x)$ y campo magnético Ω en

la variedad de Riemann W^m (aquí $m = 2$ ó 3) con una energía dada, los E se definen como extremos de la funcional

$$\widetilde{S}\{\gamma\} = \int\limits_{\gamma} (d\widetilde{l}_E - A_j\, dx^j), \tag{7}$$

donde

$$(d\widetilde{l}_E)^2 = 2m\,(E - u\,(x))\, g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad d\,(A_j\, dx^j) = \Omega \tag{8}$$

(véase [1], p. I, § 33). Aquí el campo magnético Ω se considera 2-forma exacta. Para las 2-formas no exactas de Ω llegamos a las funcionales multiformes. Siempre en adelante supondremos cumplida la exigencia de la completitud de la métrica $\widetilde{l}_E$. En la variedad compacta W^m esto se equivale a la condición

$$E > \max_{W^m} u\,(x). \tag{9}$$

Para las variedades no simplemente conexas W^m (por ejemplo, para el toro $W^m = T^m$) puede darse esta situación: a pesar de todas las construcciones anteriores y la inexactitud de la forma Ω, a posteriori la 1-forma δS resultará ser exacta sólo por que el mismo espacio de curvas M es simplemente conexo. Para la exactitud de la 1-forma (δS) y uniformidad de la funcional S es suficiente que la forma Ω en un cubrimiento universal se vuelva exacta $q\colon \hat{W}^m \to W^m$, $q^*\Omega = d\psi$. Esto es correcto, si la clase de cohomologías de forma $[\Omega] \in H^2(W^m, \mathbb{R})$ se contiene en un subgrupo conexo sólo con el grupo fundamental:

$$[\Omega] \in H^2(\pi_1, \mathbb{R}) \subset H^2(W^m, \mathbb{R}).$$

PROBLEMA 1. Hallar la condición suficiente para que la funcional S en un espacio de curvas cerradas tome valores negativos tan grandes como se quiera (condición en el grupo π_1 y en la clase de homologías $[\Omega] \in H^2(\pi_1, \mathbb{R})$).

Esto no puede ser cumplido para las variedades simplemente conexas W^m. Las integrales de 1-forma (dS) por los ciclos básicos en M y el grado de irracionalidad de la forma $\omega = (\delta S)$, son definidos por un juego de integrales de 2-forma Ω por los 2-ciclos en $H_2(W^m, \mathbb{Z})$ y coinciden con ellas.

Algunos sistemas importantes de la mecánica clásica se reducen a las extremales de las funcionales de forma (7) (Nóvikov — Shmelzer):

1. El problema de Kirchhoff sobre el movimiento del cuerpo sólido en un líquido ideal cuyo movimiento es potencial y el cual está en el infinito;

2. El problema sobre el movimiento del cuerpo sólido en torno a un punto inmóvil en un campo simétrico respecto al eje —en particular, constante— de gravitación (trompo, giróscopo, etc.).

Estos dos problemas se describen por las ecuaciones, las cuales son, después de algunas transformaciones, sistemas de Hamilton en el álgebra de Lie $L = E(3)$ de un grupo de movimientos de un espacio euclídeo tridimensional, donde el espacio de fase es un espacio conjugado L^*. Escogiendo la base (e_j^*) en L^* representamos cualquier elemento en forma

$$l^* = \sum l_i e_i^*, \tag{10}$$

con todo eso, $l_i \in L$ son formas lineales en L^*, $L = (L^*)^*$. Por definición, el paréntesis de Poisson para cualesquiera funciones $f(l^*)$ en L^* se define, partiendo de las siguientes exigencias.

1. El paréntesis de Poisson de dos funciones lineales en L^* —o sea, de los elementos del álgebra de Lie L— coincide con su conmutador en L:

$$\{l_i, l_j\} = c_{ij}^k l_k. \tag{11}$$

2. El paréntesis de Poisson de cualesquiera funciones en L^* es definido por la exigencia 1 junto con los axiomas generales a los cuales satisface la paréntesis: bilinealidad, antisimetría, identidad de Jacobi y fórmula de Leibniz para la multiplicación de las funciones

$$\{fg, h\} = \{f, h\} g + \{g, h\} f. \tag{12}$$

Hablando en general, el paréntesis de Poisson de cualesquiera funciones en la variedad N^q con coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^q)$ es definido por el tensor $h^{ij}(x) = -h^{ji}(x)$ según la fórmula

$$\{f, g\} = h^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^i}. \tag{13}$$

La exigencia de que la fórmula (13) defina el paréntesis de Poisson, es decir, que sea justa la identidad de Jacobi, introduce restricciones sobre el tensor $h^{ij}(x)$: si $\det h^{ij} \neq 0$, entonces la 2-forma $h = h_l\, dx^i \wedge dx^j$, inversa al tensor h^{ij}, debe ser cerrada: $dh = 0$, $h_{ij} h^{jk} = \delta_i^k$.

Un caso simplísimo $h^{ij} = \text{const}$ apareció en el formalismo de Hamilton clásico, que surge del cálculo de variaciones (véase [1], p. I, § 33). El siguiente caso h^{ij}, función lineal de x, se discutió intensamente en la bibliografía los últimos 15 años, puesto que $h^{ij}(x) = c_k^{ij} x^k$, donde c_k^{ij} resulta un juego de las constantes estructurales del álgebra de Lie (esto se deduce de la identidad de Jacobi para el paréntesis).

Por lo visto, el caso de los paréntesis cuadráticos $h^{ij} = c_{kl}^{ij}x^kx^l$, según x, resultó también muy interesante y ahora lo empezaron a estudiar (Sklianin, Faddéev).

Nos importa un caso «lineal según x» de las álgebras de Lie, más estrictamente, del álgebra de Lie $L = E(3)$. Escojamos una base estándar de generadores de esta álgebra (M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3) donde los generadores p_i corresponden a las traslaciones y M_i a las torsiones. El paréntesis de Poisson (11), por definición, es de forma de conmutadores en $L = E(3)$:

$$\{M_i, M_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \varepsilon_{ijk} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix},$$
$$\{M_i, p_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k, \tag{14}$$
$$\{p_i p_j\} = 0.$$

El hamiltoniano del sistema $H(M, p)$ en el problema de Kirchhoff coincide con la energía del sistema cuerpo-líquido y es una forma cuadrática positiva de las variables (M, p) en el espacio L^* (son posibles los términos lineales en H, si el cuerpo sólido no es simplemente conexo):

$$H = \sum a_{ij} M_i M_j + \sum b_{ij} M_i p_j + \sum c_{ij} p_i p_j, \tag{15}$$

Para el movimiento de un cuerpo sólido (trompo, giróscopo) en un campo de gravitación simétrico respecto al eje $U(z)$ en torno a un punto inmóvil el hamiltoniano en el espacio L^* es de la forma

$$H = \sum a_{ij} M_i M_j + U(d^i p_i), \tag{16}$$

donde d^i son constantes definibles por la posición del centro de masas, y son puntos de fijación. La forma cuadrática $\sum a_{ij} M_i M_j$ se supone positiva siempre. En el caso (16) se tienen restricciones a esta forma como desigualdades, las cuales no se tienen en el problema de Kirchhoff (15).

Las ecuaciones de movimiento son de forma

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \tag{17}$$

Además de la energía $H = E$, las magnitudes (integrales) que se conservan de forma general para los sistemas (17) son tales funciones $f_i(M, p)$, que

$$\{f_i, M_i\} \equiv \{f_i, p_i\} \equiv 0 \tag{18}$$

para todo $i = 1, 2, 3$ (es decir, anulador del paréntesis de Poisson). Estas magnitudes que se encuentran, como resulta, en el centro de la

llamada «álgebra envolvente» del álgebra de Lie, en el caso dado se reducen a dos magnitudes («integrales de Kirchhoff»):

$$f_1 = \sum p_i^2, \qquad f_2 = \sum M_i p_i \tag{19}$$

(verificar (19) mediante un cálculo elemental).

En el problema sobre el trompo (giróscopo) las magnitudes p_i son tales, que $f_1 \equiv 1$ siempre. En este caso la integral f_2 se llama «constante de áreas». En las superficies de nivel $f_2 = \text{const} = ps$ los paréntesis de Poisson son definidos por las fórmulas (14), y la matriz $h^{ij}(x)$ en esta variedad cuadridimensional para $p \neq 0$ es no degenerada: $\det h^{ij} \neq 0$. Por eso se define una 2-forma «simpléctica» $h = h_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$, $h_{ij}h^{ik} = \delta_j^k$, donde $dh = 0$. La forma h depende de la magnitud de los niveles $f_1 = p^2$, $f_2 = ps$. Se tiene el siguiente lema importante.

LEMA 2. *El cambio de variables*

$$\begin{gathered} y^1 = \theta, \quad y^2 = \varphi, \quad \xi_2 = p_\theta, \quad \xi_2 = p_\varphi, \quad \gamma = \frac{s}{p}, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ p \operatorname{sen}\theta = p_3, \quad M_3 - \gamma p_3 = -p_\varphi, \\ p\cos\theta\cos\varphi = p_2, \quad M_2 - \gamma p_2 = p_\varphi \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\varphi + p_0\cos\varphi, \\ p\cos\theta\operatorname{sen}\varphi = p_1, \quad M_1 - \gamma p_1 = p_\varphi \operatorname{tg}\theta\cos\varphi - p_0\operatorname{sen}\varphi \end{gathered} \tag{20}$$

reduce el paréntesis de Poisson en las superficies de nivel $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = ps$ a la forma

$$\{y^a, y^b\} = 0, \quad \{y^a, \xi_b\} = \delta_b^a, \quad \{\xi_1, \xi_2\} = s\cos\theta \tag{21}$$

Con eso, la 2-forma simpléctica adopta el aspecto

$$h = \sum_{a=1}^{2} dy^a \wedge d\xi_a + s\cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi = h_0 + \Omega.$$

donde Ω es una forma cerrada en S^2.

Topológicamente la superficie de nivel $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = ps$ es difeomorfa a $T^*(S^2)$, un espacio fibrado tangente sobre la esfera S^2. La integral por parte de las formas h y Ω por un ciclo básico $[S^2] \in H_2(T^*(S^2)) = \mathbb{Z}$ es de la forma

$$\iint_{S^2} h = \iint_{[S^2]} \Omega = 4\pi s = 4\pi f_2 f_1^{-1/2}.$$

La demostración de este lema se obtiene por cálculo directo. La estructura topológica de las órbitas $f_1 = p^2$, $f_2 = p_s$ es casi evidente debido a la forma de las integrales f_1, f_2.

Tropezamos con los paréntesis de Poisson en $T^*(M^n)$ de forma $h = h_0 + \Omega$, donde Ω es una 2-forma cerrada en la base M^n. Tal paréntesis de Poisson equivale a la inclusión en el sistema de un campo magnético formal Ω. De manera que las trayectorias de movimiento en los problemas de Kirchhoff y de trompo (giróscopo) pueden ser obtenidas del principio de «Maupertuis—Fermat», es decir, de la funcional de forma (7), la cual es multiforme para $s \neq 0$ o $f_2 \neq 0$ (para un giróscopo clásico la «constante de áreas» es distinta de cero). El hamiltoniano H en las superficies $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = ps$ en las variables (20) es de forma

$$H = \frac{1}{2} g(y)\, \xi_a \xi_b + A^a(y)\, \xi_a + U(y),$$

y el paréntesis de Poisson se define por las fórmulas (21). Este sistema es equivalente en el dominio $U_\alpha = S^2 \diagdown (P_1 \cup P_2)$ (P_1 y P_2 son los polos superior e inferior) a un sistema de Lagrange definible por una funcional de acción mecánica

$$S^{(\alpha)}\{\gamma\} = \int\limits_\gamma \left(\frac{1}{2} g_{ab} \dot{y}^a \dot{y}^b - U(y) - A_a(y)\, \dot{y}^a - s \operatorname{sen} \theta \dot{\varphi} \right) dt, \quad (22)$$

donde

$$g_{ab} g^{ac} = \delta_b^c, \quad A_a g^{ac} = A^c, \quad y^1 = \theta, \quad y^2 = \varphi,$$
$$U = \left(V - \frac{1}{2} A^a A^b g_{ab} \right).$$

La funcional S es de forma de la funcional de acción de una partícula cargada sobre la esfera S^2 con métrica g_{ab} en un campo potencial $U(x)$ y en un campo magnético $\Omega_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ de un «monopolo» no trivial, puesto que para $s \neq 0$ un «campo magnético» es no trivial topológicamente. El papel del número α para el dominio U_α en la esfera S^2 lo desempeña el par de polos opuestos

$$\alpha = (p_1 \cup p_2).$$

Para el recubrimiento $S^2 = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ (véase más arriba) se cumplen aquellas exigencias con cuya ayuda se definió la funcional multiforme. Así, en nuestro caso, S es una funcional multiforme con $s \neq 0$, de acción de este sistema, la cual depende del nivel (p, s).

Con una energía E dada, las trayectorias de movimiento es posible obtenerlas de la funcional de Maupertuis—Fermat, que es

multiforme también, donde $\delta\widetilde{S}$ es una 1-forma cerrada de dimensión infinita

$$\widetilde{S}^{(\alpha)} = \int_{\gamma} (d\widetilde{l}_E - A_a^{(\alpha)}\, dy^a),$$
$$d\widetilde{l}_E = \sqrt{2\,(E-U)\, g_{ab}\dot{y}^a\dot{y}^b}. \qquad (23)$$

Para $E > \max\limits_{S^2} U(y)$ la métrica $\widetilde{l}_E$ es completa.

Destaquemos una propiedad explícitamente importante de una funcional unívoca o multiforme de forma (7):

en un espacio de curvas cerradas orientadas $M = \Omega^+(S^2)$ las curvas de un punto forman una variedad crítica no degenerada de los mínimos locales. Normalizamos la funcional $\widetilde{S}$ en un cubriente con hojas infinitas $p\colon \hat{M} \to M$ (donde $\widetilde{S}$ es unívoca) de tal manera: en un componente (sea nulo) de una preimagen completa $p^{-1}(S^2) = \bigcup\limits_{n} S_n^2$ de la variedad de las curvas de un punto, la funcional es igual a cero,

$$\widetilde{S}(S_0^2) = 0$$
$$\widetilde{S}(S_n^2) = n \iint_{S^2} \Omega = 4\pi ns. \qquad (24)$$

Es evidente la generalización de esta propiedad en cualesquiera variedades W^m.

Utilicemos estas propiedades del espacio de curvas cerradas. Unamos con un segmento $I\,(0,\ 1)$ dos componentes de los mínimos locales en el cubriente $\hat{M}$ de tal modo, que el punto 0 se encuentra en S_0^2 y el punto 1 se encuentra en $S_1^2 \subset \hat{M}$. Comencemos a desplazar monótonamente este segmento «hacia abajo» por el gradiente $\widetilde{S}$, obteniendo un segmento I_τ, $\tau \geqslant 0$, $I_0 = I$. Vemos lo siguiente:

a) son inmóviles los extremos para todo τ;

b) $\max\limits_{\tau=\mathrm{const}} \widetilde{S}(I_\tau) \geqslant 4\pi s$, ya que en los extremos hay un mínimo local.

De esto, junto con el principio conocido de minimax se deduce la existencia de un punto crítico de ensilladura que tiene índice 1 en un caso no degenerado.

Así, es justo el siguiente teorema.

TEOREMA 1 (Nóvikov). *Para todos los valores de los parámetros* $(E,\ p,\ s)$ *con la condición* (9), *existe una trayectoria en el problema de*

Kirchhoff y de movimiento del trompo (giróscopo) que es periódica en el sistema conexa con el cuerpo.

OBSERVACIONES. a) Varios mecánicos, utilizando los métodos de la teoría de las perturbaciones, obtuvieron de una manera más explícita tales familias cerca de los casos integrables. La posibilidad de prolongar esas familias en los valores de los parámetros que están lejos de los casos integrables quedaba sin demostrarse; b) para la constante nula de áreas $s = 0$ en el problema sobre giróscopo surge una funcional unívoca en S^2 equivalente a la métrica, en virtud del principio de Maupertuis—Fermat. Este resultado fue obtenido anteriormente mediante otro método (Kozlov, Jarlámov). Aquí, para $E > \text{máx } U(x)$ es posible utilizar los teoremas ya conocidos de Lusternik—Shnirelman; para $E \leqslant \text{máx } U$ el estudio fue hecho por Kozlov.

Ahora pasemos a un problema puramente topológico sobre la construcción de la teoría análoga a la de Morse para las 1-formas ω en las variedades suaves cerradas de dimensión finita $M = M^n$. En el caso más simple, si la forma ω representa una clase de cohomologías con coeficientes enteros $[\omega] \in H^1(M^n, \mathbb{R})$, llegamos a la aplicación en una circunferencia

$$f = \exp(2\pi i S)\colon M^n \to S^1, \quad S = \hat{f}\colon \hat{M} \to \mathbb{R}.$$

Consideremos ese caso. Si no hay puntos críticos, la aplicación f define un espacio fibrado suave con base $B = S^1$. Un $\mathbb{Z}$-cubrimiento cíclico $\hat{M} \xrightarrow{p} M^n$ se construye de tal manera: realicemos mediante una subvariedad N^{n-1} el ciclo $D[\omega] \in H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z})$, donde D es el operador de dualidad de Poincaré. Cortando la variedad M^n por el ciclo N^{n-1} obtendremos una película W^n con dos bordes $\partial W = N_0^{n-1} \cup N_1^{n-1}$ que son difeomorfos a N^{n-1} (véase también el § 27). Tomemos un número infinito de ejemplares de esta película $W \approx W_i$ con fronteras $\partial W_i = N_{i,0} \cup N_{i,1}$ que son difeomorfas a N^{n-1}. Los peguemos unos con otros a lo largo de los bordes según los números indicados de los componentes de la frontera

$$\hat{M} = \bigcup_{\infty > i > -\infty} W_i, \quad N_{i-1,0} = N_{i,1}, \quad -\infty < i < \infty.$$

Es posible considerar, que la variedad $N^{n-1} = N_0^{n-1}$ está escogida como una superficie de nivel de la función S (o la preimagen completa de un punto con aplicación $f = \exp(2\pi i S)$). El operador de monodromia actúa así:

$$t\colon W_i \mapsto W_{i+1}, \quad N_{i,0} \mapsto N_{i,1} = N_{i+1,0}, \quad \hat{M} \to \hat{M}. \tag{25}$$

En concordancia con los principios generales, la función S debe engendrar un complejo celular (véase el § 15). Sin embargo en nuestro caso no se cumple una exigencia importantísima, en la cual se

fundamentaba la teoría de Morse ordinaria: en esta teoría siempre era necesario que los dominios de menores valores $S \leqslant a$ fueran relativamente compactos en un caso de dimensión finita o infinita. Esto no es justo en nuestro caso. Pero también en nuestro caso de cada punto crítico de índice i sale «hacia abajo» por los niveles una «superficie de descenso rapidísimo», la cual (o su pequeño movimiento si es necesario) es natural considerarla «célula». Sin embargo, esta «célula» puede alargarse por los niveles S hasta $-\infty$; en su frontera algebraica puede ser incluido un número infinito de las mismas «células» de dimensión $i-1$. Para un desplazamiento $t\colon \hat{M} \to \hat{M}$ la función S que se transforma en sí misma con complemento de constante, aplicando los puntos críticos en los puntos críticos. Así, llegamos a las conclusiones:

a) cada punto crítico define una generatriz libre en un complejo que nos interesa;

b) la frontera de la célula puede ser combinación lineal infinita de las células de este complejo, las cuales se encuentran «más abajo» por los niveles de la función S, es decir, que van hacia el ∞ sólo en una dirección en $\hat{M}$;

c) todas las «células» se obtienen de un número finito de las básicas, mediante diversos desplazamientos en los elementos t^{m_j} del grupo $\mathbb{Z}$ que actúa en $\hat{M}$.

Introduzcamos un anillo compuesto de las series de Laurent de forma

$$\sum_{-\infty<\text{const}<j} m_j t^j, \tag{26}$$

con coeficientes enteros m_j que se anulan para todo j negativo bastante grande. Designamos a este anillo por $\hat{\mathbb{Z}}^{+}[t, t^{-1}] = K$. Al complejo celular engendrado por una función multiforme en la variedad M^n o por la función S en el cubrimiento $\hat{M} \to M^n$, lo consideramos como un complejo libre de K-módulos C con un número finito de generatrices (puesto que el número de los puntos críticos es finito). El complejo C es de la forma

$$0 \to C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \dots \to C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \to 0,$$

donde ∂ es un homomorfismo de K-módulos. Notemos, que a diferencia de la teoría de Morse ordinaria aquí es posible la situación $C_0 = 0$, $C_n = 0$. Es más, en cualquier variedad M^n hay una 1-forma cerrada de cualquier clase de cohomologías no trivial $[\omega] \in H^1(M^n, \mathbb{Z})$ tal, que no hay en absoluto mínimos ni máximos locales (es decir, $C_0 = C_n = 0$).

Para los productos oblicuos M^n con base S^1, hay una forma ω sin puntos críticos, es decir, $C_n = C_{n-1} = \ldots = C_0 = 0$.

Tiene lugar el siguiente lema.

LEMA 3. *Las homologías del complejo de K-módulos C, engendrado por cualquier 1-forma suave cerrada ω son homotópicamente invariantes.*

Sin demostrar este lema sencillo, vemos que los invariantes de esos grupos de homologías pueden ser utilizados para obtener análogos de las desigualdades de Morse en caso de las funciones multiformes que engendran una aplicación en la circunferencia

$$\exp(2\pi i S) : M^n \to S^1.$$

El anillo K es homológicamente unidimensional (si los coeficientes de series (26) son elementos de un campo, entonces K es también un campo). Por consiguiente, los submódulos de los módulos libres son siempre libres. Esto permite escoger bases libres en los grupos (módulos) de los «ciclos» $Z_k = \operatorname{Ker} \partial \subset C_n$ y de las «fronteras» $B_k \subset Z_k$. A la diferencia de rangos de esos módulos la llamaremos «número de Betti» y la designamos por $b_k(M^n, a)$, donde $a = [\omega]$.

$$b_k(M^n, a) = \operatorname{rang} Z_k - \operatorname{rang} B_k.$$

Los análogos de los números de torsión $q_k(M^n, a)$ se definen así: es posible escoger bases libres $(e'_1, \ldots, e'_N)$ de módulo Z_k y $(e'_1, \ldots, e'_L)$, de submódulo B_k, donde $N - L = b_k$ con las siguientes propiedades

$$e'_j = \left(n_j + \sum_{k \geq 1} n_{jk} t^k\right) e_j + \sum_{i > L} q_{ij}(t) e_i,$$

además: 1) el número n_j se divide en número n_{j+1}; 2) los grados de todos los términos de series $q_{ij}(t)$ son no negativos; 3) los números $q_{ij}(0) \neq 0$ y se dividen por n_j para todos los i, j (si la serie q_{ij} no se anula idénticamente).

Un número general de los índices j tales que $n_j \neq 1$, se llama número de torsión y se designa por $q_k(M^n, \omega)$. El número $q_k + b_k$ coincide con un número mínimo de generatrices de módulo $H_k = Z_k/B_k$.

TEOREMA 2. *Tienen lugar los siguientes análogos de las desigualdades de Morse para los números $m_i(S)$ o $m_i(\omega)$ de los puntos críticos de índice i para la aplicación en la circunferencia* $\exp(2\pi i S)$ *o una 1-forma cerrada ω, donde $[\omega] \in H^1(M_n, \mathbb{Z})$:*

$$m_i(S) \geq b_i(M^n, [\omega]) + q_i(M^n, [\omega]) - q_{i-1}(M, \omega). \qquad (27)$$

La demostración de este teorema es fácil obtenerla del anterior.

Notemos, que los análogos de las desigualdades de Morse obtenidos por nosotros son análogos a los clásicos, pero los invariantes topológicos incluidos en ellos tienen un sentido geométrico más complejo.

Para las variedades con $\pi_1(M^n) = \mathbb{Z}$ tiene sentido la cuestión sobre la exactitud de las desigualdades (27), análoga al conocido teorema de Smale sobre las funciones unívocas en las variedades simplemente conexas. Es posible construir sin dificultad una superficie de nivel $N^{n-1} \subset M^n$, que es dual a la clase $[\omega] \in H^1(M^n, \mathbb{Z})$ y es conexa y simplemente conexa (en particular, para $n \geqslant 5$). Luego, utilizando la función de Smale en la película W^n con dos bordes $\partial W^n = N^{n-1} \cup N^{n-1}$ obtenida de M^n por un corte, es posible de una manera «minimal» (empleando la función de Smale en W^n) prolongar la superficie de nivel N^{n-1} en toda la variedad M^n y obtener la forma ω en M^n y la función S en el cubrimiento $\hat{M} \to M^n$. Sin embargo esta forma (o función multiforme) puede ser no minimal ni mucho menos por el número de los puntos críticos. La construcción de la 1-forma minimal ω exige elegir en cierto sentido una variedad inicial «minimal» $N^{n-1} \subset M^n$, si esta elección es posible en general. Sería interesante examinar esta cuestión hasta su fin para las variedades con el grupo $\pi_1(M^n) = \mathbb{Z}$. (Este problema lo resolvió Farber en 1983.)

Efectuamos algunas observaciones relacionadas con un caso más complicado $k > 1$, es decir, cuando la forma ω tiene por lo menos dos integrales racionalmente independientes por ciclos unidimensionales

$$\varkappa_i = \oint_{\gamma_i} \omega, \ \gamma_1, \ \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ \ldots, \gamma_N \text{ es una base } H_1(M^n, \mathbb{Z}),$$

$$\varkappa_1 \neq 0, \quad \varkappa_k \neq 0, \quad \sum m_i \varkappa_i \neq 0,$$

m_i son números enteros arbitrarios. Surge el cubrimiento $\hat{M} \xrightarrow{p} M^n$, donde $p^* \omega = dS$ y el grupo de monodromia es abeliano libre. Introduzcamos el anillo $K_\varkappa$ consistente en las series $b \in K_\varkappa$ con coeficientes enteros

$$b = \sum_{m=(m_1 \ldots m_k)} b_m t_1^{m_1} \ldots t_k^{m_k}$$

tales que

1. $b_m = 0$, si $\sum m_i \varkappa_i$ es lo suficientemente grande por módulo, y negativo.

2. Tenga «estabilidad» por $\varkappa$ o sea, para cualquier serie b se hallan tales números $\varepsilon > 0$, y N, que $b_m = 0$, si se cumplen las condiciones

$$\sum m_i \varkappa_i^* < -N. \text{ donde } \sum |\varkappa_i^* - \varkappa_i| < \varepsilon$$

La 1-forma cerrada ω define un complejo celular, que consideramos como un complejo de $K_\varkappa$ — módulos. Las homologías de este complejo son homotópicamente invariantes y pueden servir de base para construir las desigualdades del tipo de Morse. Es interesante

estudiar la dependencia de $\varkappa$ respecto a los complejos y las homologías que surgen aquí, si la forma ω cambia un poco, y los puntos críticos permanecen iguales en esencia.

Si la forma ω no tiene puntos críticos en absoluto, la variedad M^n es de forma

$$M^n = \hat{M}/\mathbb{Z}^k = (\hat{N} \times R)/\mathbb{Z}^k,$$

donde N es una fibra típica de fibración $\omega = 0$. En caso dado todas las fibras son iguales. De la aproximación de la forma ω por medio de formas cerradas $\omega_j \to \omega$ con las integrales racionales por ciclos, sin los puntos criticos. es evidente que la variedad M^n es un producto oblicuo con base-circunferencia. Las fibras de estos productos oblicuos son variedades compactas N_j^{n-1}, que son factores $\hat{N}$,

$$\hat{N} \to N_j^{n-1},$$

es decir, $\hat{N}$ es un cubrimiento regular sobre N_j^{n-1} con grupo de monodromía $\mathbb{Z}^{k-1}$.

A. T. Fomenko

SUPLEMENTO 2

PROBLEMA DE PLATEAU, BORDISMOS Y SUPERFICIES GLOBALES MINIMALES EN LAS VARIEDADES DE RIEMANN

I. Superficies locales minimales (mínimas)

Como fue mencionado en [1], p. I, § 37, un buen modelo físico evidente de las superficies minimales bidimensionales son las películas de jabón que cubren un contorno fijado de alambre en un espacio euclídeo tridimensional. Recordemos la definición de la funcional de volumen multidimensional. Sea V^k una subvariedad suave compacta en una variedad de Riemann M^n, sea $D \subset V$ un dominio en esta subvariedad y sea g_{ij} una métrica de Riemann inducida en V. Entonces está definido el número $\mathrm{vol}\ _kD$ llamado volumen k-dimensional del dominio en la subvariedad respecto a la métrica g_{ij}. Si la subvariedad es compacta, obtenemos la correspondencia $V \to \mathrm{vol}_k V$ que define la funcional de un volumen de Riemann en una clase de subvariedades k-dimensionales. Precisamente las extremales de esta funcional se llaman superficies locales minimales. Por ejemplo, para el caso de una hipersuperficie V sumergida en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, la ecuación de Euler — Lagrange para esta funcional, cuyas soluciones son superficies locales minimales, fue hallada en [1], p. I, § 37. La condición de minimalidad local de la hipersuperficie V en R^n es posible escribirla en el lenguaje de los invariantes locales de la inmersión de esta superficie en el espacio euclídeo. Recordemos un resultado clásico (véase la demostración, por ejemplo, en [1], p. I, § 37): PROPOSICION 1. Sea $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie suave (es posible, con un borde no vacío). *La curvatura media H de esta hipersuperficie es idénticamente igual a cero si, y sólo si, es posible representar esta superficie en el entorno de cada punto interior suyo en forma de su gráfico de una función extremal para una funcional de volumen (o sea, en forma de solución de ecuación de la hipersuperficie minimal).*

Las superficies minimales bidimensionales en un espacio tridimensional admiten una descripción analítica bastante simple. Supongamos, que la superficie V^2 es definida por un radio-vector r: $D(u, v) \to \mathbb{R}^3$, $r = r(u, v)$, donde D es un dominio en el plano con

coordenadas cartesianas u, v. Es fácil verificar que si u y v son coordenadas conformes en la superficie (es decir, la métrica de Riemann inducida en la superficie es de forma $\lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$), entonces el radio-vector es armónico, o sea, sus coordenadas son funciones armónicas $\left(\text{respecto al operador } \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$. Véanse los detalles en [1], p. I, § 37. Lo inverso, hablando en general, no es justo, es decir, la superficie barrida por un radio-vector armónico no tiene necesariamente que ser minimal. La estructura topológica de las superficies minimales bidimensionales es bastante complicada, en particular, (a pesar de la existencia de una superficie minimal cubriente cualquier contorno cerrado suave a trozos) no hay un teorema de unicidad de la superficie minimal con un contorno fijo dado de frontera (borde de la superficie). Además, las películas minimales pueden tener peculiaridades.

El «problema de Plateau» es un término que asocia una serie de problemas relacionados con el estudio de las extremales y mínimos absolutos de la funcional de volumen k-dimensional, definida en la clase de superficies k-dimensionales sumergidas en una variedad de Riemann abrazante y que satisfacen unas u otras condiciones de frontera. En la rica historia del desarrollo de los problemas de variación de este tipo, naturalmente se destacan algunos períodos, caracterizantes por los enfoques muy diferentes de las mismas nociones de «superficie», «frontera», «minimización» y, respectivamente, por los distintos métodos de obtención de las soluciones minimales. Históricamente, primero fue planteado y resuelto el problema de Plateau para una superficie bidimensional con borde en $\mathbb{R}^3$ (y después, también en $\mathbb{R}^n$). En forma paramétrica este problema puede ser formulado así.

Sea $r(u, v)$ un radio-vector de la superficie V^2 en $\mathbb{R}^n$, es decir, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ da (localmente) una aplicación regular de un dominio bidimensional $D \subset \mathbb{R}^2$ en el espacio $\mathbb{R}^n$. Entonces $\operatorname{vol}_2 f(D) = \int_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$. Pregunta: ¿es posible hallar una superficie $X_0^2 = f_0(D)$ (y la aplicación f_0) tal, que ella tenga como frontera un contorno dado A, o sea, un sistema de circunferencias no intersecadas sumergidas (encajadas) en $\mathbb{R}^n$, y además el área de esa superficie buscada sea mínima en comparación con las áreas de las restantes superficies de forma $X^2 = f(D)$ limitadas por el mismo contorno (o sea, que tienen el mismo borde)? Además de este problema de obtención del mínimo absoluto (en la clase de todas las superficies con frontera dada), también se examinaba el problema sobre obtención de mínimo en dada clase homotópica, es decir, en la clase de superficies (con frontera fijada) dadas por las aplicaciones homotópicas entre ellas. Resulta que en un caso bidimensional estos proble-

mas se resuelven en sentido positivo (véanse, por ejemplo, los resúmenes en [1*], [2*]). Notemos, que la película mínima $X_0^2 = f_0(D)$ puede tener autointersecciones y otros puntos singulares (en dependencia de la configuración del contorno de frontera). Es numerosa la bibliografía sobre este problema bidimensional y cuestiones relacionadas con el mismo pero, puesto que nuestro objetivo principal es el resumen del problema multidimensional de Plateau, remitimos al lector que está interesado por el «temario bidimensional» a los resúmenes [5*], [6*].

Para pasar al análisis del problema multidimensional necesitamos de algunas nociones relacionadas con la segunda forma fundamental de la variedad de Riemann.

Sea $f\colon M^k \to W^n$ una inmersión suave de una variedad suave M^k en una variedad de Riemann suave orientable conexa cerrada W^n. Por TM designemos a un espacio fibrado tangente de variedad M. Sea T_mM un plano tangente respecto a M en el punto $m \in M$. Connotamos con $\langle x, y\rangle$ al producto escalar de los vectores $x, y \in T_mM$ inducido por una métrica de Riemann dada en W. Sea $\overline{\nabla}$ una conexión de Riemann simétrica en TW concordada con esta métrica. Como siempre, para un campo tensorial arbitrario P designemos por $\overline{\nabla}_XP$ su derivada covariante a lo largo de un campo vectorial X en W para la conexión $\overline{\nabla}$. Si x es el valor del campo vectorial X en el punto m (o sea, vector del plano T_mW), entonces designemos por $\overline{\nabla}_xP$ a una derivada covariante del campo P a lo largo de la dirección x.

Para abreviar una vez más connotamos la subvariedad $f(M^k) \subset \subset W^n$ con M^k, entonces a la par con el espacio fibrado TM se define un espacio fibrado normal NM, puesto que en cada punto $m \in M$ está definido un plano N_m^{n-k} ortogonal al plano T_mM. La inmersión (el encaje) $M \to W$ engendra conexiones de Riemann naturales en TM y en NM. Sean: Y, un campo suave vectorial en la subvariedad M, y $x \in T_mM$, un vector tangente arbitrario. Supongamos, por definición, $\overline{\nabla}_xY = (\overline{\nabla}_xY)^T$, donde por $\overline{\nabla}$ se designa la conexión de Riemann simétrica dada en la variedad abrazante W, y $(\ )^T$ es una proyección ortogonal en el plano tangente T_mM. Es fácil de verificar que esta operación es una conexión de Riemann sin torsión en TM, definible de manera unívoca por una métrica de Riemann en M, inducida por la inmersión $M \to W$. De la misma manera se define la conexión en un espacio fibrado normal NM. Consideremos una sección suave arbitraria V del espacio fibrado NM, o sea, demos en cada punto $m \in M$ un vector normal $V(m) \in N_mM$. Obtenemos un campo suave vectorial $\widetilde{V}$ definido en la variedad M. Si $x \in T_mM$, hacemos $\overline{\nabla}_xV = (\overline{\nabla}_x\widetilde{V})^N$, donde $(\ )^N$ es una proyección ortogonal en el plano N_mM. Esa operación es conexión de Riemann sin torsión en

NM. Pasemos a la construcción de la segunda forma cuadrática de la subvariedad M (de codimensión arbitraria).

DEFINICION 1. Sea $x \in T_mM$, $v \in N_mM$. Incluyamos el vector v en un campo vectorial arbitrario suave V en la variedad W, de modo que el campo V resulte ortogonal a la subvariedad M en cierto entorno del punto $m \in M$. Definimos la aplicación lineal Q^v: $T_mM \to T_mM$ por la fórmula: $Q^v(x) = -(\overline{\nabla}_x V)^T$. Esa aplicación resulta simétrica y, por consiguiente, define alguna forma bilineal $\{Q^v\}$, la cual precisamente se llama *segunda forma fundamental* de la subvariedad $M \subset W$.

En realidad, hemos definido toda una familia Q de formas Q^v, en la cual el vector $v \in N_mM$ desempeña el papel de parámetro, $Q = \{Q^v\}$. Resulta, que Q está definida correctamente, es decir no depende del modo de inclusión del vector v en el campo vectorial V en la variedad W y depende de una manera suave de todos sus argumentos. De manera equivalente Q puede interpretarse como una forma bilineal simétrica en el espacio tangente T_mM con valores en un espacio normal N_mM. En efecto, si x, $y \in T_mM$, es posible definir la forma $Q(x, y) \in N_mM$ por la igualdad: $\langle Q(x, y), v\rangle = \langle Q^v x, y\rangle$. Incluyamos el vector y en el campo suave vectorial Y en la variedad W y que este campo sea tangente a la subvariedad M. Entonces tenemos: $Q(x, y) = (\overline{\nabla}_x(Y))^N$. Con la ayuda de la forma Q es posible ahora definir la curvatura media de la subvariedad M.

DEFINICION 2. Consideremos la segunda forma fundamental representada en forma Q en el espacio tangente T_mM. Ya que en T_mM está definido el producto escalar, es posible examinar una traza de la forma Q que es (en cada punto m) un vector de N_mM. Así, la traza de la forma Q se representa por una sección suave H del espacio normal NM. Precisamente esta sección se llama curvatura media de la subvariedad sumergida (encajada) $M \subset W$.

Si M es una hipersuperficie en la variedad W, obtenemos la curvatura media escalar $H = \mathrm{Sp}R^{-1}Q$, donde R y Q son matrices de la primera y segunda formas cuadráticas, respectivamente.

DEFINICION 3. La subvariedad $M \subset W$ se llama local minimal, si su curvatura media H es igual a cero idénticamente (en todos los puntos de esa variedad).

Hay una conexión estrecha entre la anulación de la curvatura media de la subvariedad y la anulación de la primera derivada de la funcional de volumen. Sea dada la homotopía suave f_t: $M \to W$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ tal que cada aplicación f_t sea una inmersión, al mismo tiempo, $f_0 = f$, donde f es una inmersión (encaje) inicial. Tales homotopías se llaman a veces variaciones isotópicas. Es conocida la siguiente afirmación.

PROPOSICION 2. *Sea M una subvariedad compacta en W y $v_k(t) = \mathrm{vol}_k f_t M$. La subvariedad M es local minimal si, y sólo si,* $\frac{dv_k(0)}{dt} = 0$

para cualquier variación isotópica de la subvariedad M la cual (variación) se anula en la frontera ∂M.

De manera que las subvariedades de curvatura media nula son extremales de la funcional de volumen. El término «minimalidad local» significa, que el volumen de subvariedad «no cambia en la primera aplicación» (es decir, su primera derivada es igual a cero) con variaciones infinitamente pequeñas por amplitud y portador. Si la variación tiene valor finito, el volumen puede disminuirse. Por ejemplo, esto sucede para el ecuador en una esfera estándar, el cual, naturalmente, es local minimal (incluso es una subvariedad completamente geodésica), pero se contrae en un punto por la esfera, y por eso no es una subvariedad global minimal. Recordemos que cualquier subvariedad completamente geodésica es local minimal, puesto que en este caso la segunda forma fundamental es idénticamente igual a cero. La noción de la minimalidad global es no trivial por si misma, ya que exige examinar «grandes variaciones». Demos una de las definiciones de tales «grandes variedades».

DEFINICIÓN 4. Sea $M^k \subset W^n$ una subvariedad cerrada orientable compacta. Diremos que está dada su bordismo-deformación, si se da una subvariedad orientable compacta suave $(k+1)$-dimensional $Z^{k+1} \subset W^n$ con borde $\partial Z = M \cup (-P)$, donde $(-P)$ es una subvariedad de P con orientación inversa. Con todo eso, a la variedad P^k la llamaremos bordismo-variación de la variedad M^k. En caso de la subvariedad no compacta $M \subset W$, diremos que está dada su bordismo-deformación, si en W se da la subvariedad P^k coincidente con M^k fuera de algún dominio compacto y, además, está dada una subvariedad $(k+1)$-dimensional Z con borde suave a trozos $\partial Z \subset \subset M \cup (-P)$.

Hemos dado un ejemplo de superficies globales minimales en [1], p. I, § 37; son subvariedades complejas en una variedad de Käher.

II. Problemas de variación multidimensionales y teoría de bordismos

Consideremos los planteamientos clásicos de los problemas sobre obtención de los mínimos absolutos y relativos en la clase de superficies de un tipo topológico determinado. Destaquemos en la variedad M^n una subvariedad cerrada compacta suave $(k-1)$-dimensional fijada A^{k-1}, a la cual llamamos en adelante para abreviar «contorno». Consideremos todos los pares posibles de tipo (W, f), donde W es una variedad suave compacta de dimensión k con borde ∂W homeomorfo al contorno A, y $f\colon W \to M$ es una aplicación continua (o suave a trozos) idéntica en el borde ∂W.

PROBLEMA 1. ¿Es posible entre los pares de forma (W, f), donde W variedades posibles variedades con borde A, y $f\colon W \to M$ son aplicaciones W en M idénticas en el borde A, obtener un par $(W_0,$

f_0) tal, que la aplicación f_0 o la película $X_0 = f_0(W_0)$ que es una imagen de la variedad W_0 en M, tengan propiedades razonables de minimalidad? En particular, tiene que cumplirse la desigualdad $\mathrm{vol}_k X_0$ $\mathrm{vol}_k X$, donde $X = f(W)$ es cualquier película de la clase arriba mencionada, y vol_k es un volumen de Riemann, o bien la medida estándar de Hausdorff.

Bajo «propiedades razonables de minimalidad» de la película $X_0 = f_0(W_0)$ en la variedad M, y complementariamente a la desigualdad $\mathrm{vol}\, X_0 \leqslant \mathrm{vol}\, X$, es posible, por ejemplo, comprender lo siguiente: existe en la película X_0 un subconjunto nunca denso Z de los puntos singulares tal, que cada punto no singular $P \in X_0 \setminus Z$ tiene un entorno U en M, para el cual la intersección $(X_0 \setminus Z) \cap U$ consiste en las subvariedades suaves V_α de dimensiones no pasantes del número k, además todas las V_α son subvariedades minimales desde el punto de vista de la geometría diferencial clásica, es decir, la curvatura media de ellas es igual a cero.

PROBLEMA 2. Sea (V, g) un par, donde $V = V^k$ es una variedad compacta orientable cerrada k-dimensional, $g: V \to M$ es su aplicación continua (o suave a trozos) en la variedad M^n, y $X = g(V)$ es la imagen de V en M. Diremos, que el par (V', g') es una bordismo-variación del par (V, g), si existe una variedad compacta Z con borde $\partial Z = V \cup (-V')$ y una aplicación continua $F: Z \to M$ tal, que $F|_V = g$, $F|_{V'} = g'$. ¿Es posible entre todos los pares (V, g) de forma indicada, obtener un par (V_0, g_0) tal, que la imagen $X_0 = g_0(V_0)$ tenga propiedades de minimalidad razonables, en particular, que cumpla la desigualdad: $\mathrm{vol}_k X_0 \leqslant \mathrm{vol}_k X$, donde $X = g(V)$ es cualquier película (superficie) de la clase indicada?

El problema 2 plantea la cuestión sobre la obtención del mínimo absoluto de la funcional de volumen en la clase de todas las bordismo-variaciones del par dado (V, g).

A la par con estos dos problemas de la obtención del mínimo absoluto se formulan de una manera natural dos problemas sobre la obtención de los mínimos relativos.

PROBLEMA 1'. ¿Entre todos los pares de forma (W, f), donde W es alguna variedad fijada (!) con borde A, y $f: W \to M$ son todas las posibles aplicaciones continuas (o suaves a trozos), homotópicas a cierta aplicación fijada f' e idénticas en el borde A (es decir, coincidentes con un homeomorfismo de borde fijado), es posible obtener un par (W, f_0) tal, que la aplicación f_0 o la película $X_0 = f_0(W)$ (que es una imagen de W en M), tengan propiedades de minimalidad, es decir, que $\mathrm{vol}_k X_0 \leqslant \mathrm{vol}_k X$, donde $X = f(W)$ es cualquier película de la clase homotópica dada?

Este es el problema sobre la obtención del mínimo de la funcional de volumen en cada clase homotópica, o sea, el problema sobre los mínimos relativos, a diferencia del problema antecedente sobre obtención del mínimo absoluto por todas las clases homotópicas.

PROBLEMA 2'. Es posible entre las aplicaciones $g\colon V^k \to M^n$ (donde V es una variedad cerrada fijada), homotópicas a cierta aplicación inicial $f\colon V \to M$, obtener una aplicación g_0 tal, que tenga la propiedad de minimalidad, es decir que $\mathrm{vol}_k g_0(V) \leqslant \mathrm{vol}_k g(V)$?

Comenzamos a describir los resultados de los problemas sobre obtención del mínimo absoluto. A los problemas 1 y 1' los llamamos problemas de «pegadura de contorno», y a los problemas 2 y 2', de realización (de los ciclos). A las superficies minimales de tales formas (si existen) las llamaremos globales minimales. Los teoremas de existencia de las mismas serán dados más abajo.

Ahora describamos el efecto de surgimiento de los estratos insuperables de dimensiones pequeñas con minimización de la funcional de volumen multidimensional. Este efecto no influye en el proceso de minimización de la funcional de volumen bidimensional vol_2, pero desempeña un papel importante en las dimensiones grandes. En la

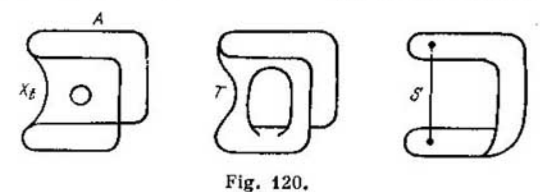


Fig. 120.

fig. 120 se representa un contorno A y una película $X_t = f_t(W)$, tendiente a ocupar la posición correspondiente a su área mínima. Está claro que en algún momento se produce pegadura de la película. Con eso, en vez del tubo delgado T en el dibujo aparecerá el segmento S. Es fácil librarse de éste en el caso bidimensional aplicándolo continuamente en un disco bidimensional que pega el contorno dado. Al mismo tiempo (lo que es importante) no perdemos la parametrización de la película: la película obtenida, al igual que antes, es una imagen de alguna variedad bidimensional con borde.

Está claro que en las grandes dimensiones para $k > 2$ el surgimiento de la situación análoga a la descrita, complica bruscamente al problema de minimización. A medida que un volumen k-dimensional de una película que se deforma $X_t = f_t(W)$ tiende a un mínimo, en esa película comienzan las pegaduras, o sea, la aplicación $f_1\colon W \to M$ homotópica a una aplicación inicial $f = f_0$, ya no sólo no debe ser inmersión (encaje) o sumersión, sino hasta puede reducir la dimensión de la imagen en algunos subconjuntos abiertos en W. Esto conduce al surgimiento en la imagen $X_1 = f_1(W)$ de los trozos (estratos) S de dimensiones s, donde $s \leqslant k - 1$. A diferencia del caso bidimensional, a tales «estratos de pequeñas dimensiones» no es posible, hablando en general, ni omitirlos, ni aplicarlos de

manera continua en una «parte maciza» (es decir, en una parte k-dimensional) $X^{(k)}$ de la película X, puesto que con esas operaciones puede perderse una propiedad fundamental de la película, a saber: ser una imagen contínua de alguna variedad suave $\widetilde{W}$ con borde A. Ya que nuestro objetivo es obtener el mínimo en una clase de películas de forma $X = f(W)$, es decir, que admiten parametrización con ayuda de la variedad W, entonces con cualquier variante de omisión de los «estratos de pequeña dimensión» deberíamos garantizar, que la película $\widetilde{X}$ que se obtiene como resultado de tal reconstrucción, admitiera, como antes, esa parametrización (puede ser, con ayuda de otra variedad). Sin embargo, como demuestran los ejemplos simples, ni la exclusión de los estratos de dimensión pequeña, ni los intentos de aplicarlos a una parte masiva $X^{(k)}$ de la película X (con ayuda de alguna aplicación continua definida en toda la película) no conservan en el caso general la propiedad de la película de admitir una parametrización continua. Se podría, para simplificar el problema, ignorar temporalmente los estratos de dimensión pequeña, restringiendo por ahora el examen a la funcional vol_k, desde el punto de vista de la cual todos los estratos de dimensión pequeña son insignificantes (sus medidas k-dimensionales son iguales a cero). Sin embargo, como resulta (véanse los detalles en [7*] — [9*]), incluso en este caso simplificado, la obtención de un mínimo exige información vasta sobre la conducta de los estratos de dimensión pequeña que garantizan la parametrización de la película.

Describamos el planteamiento del problema de Plateau en el lenguaje de cohomologías ordinarias. A causa de las dificultades de minimización de las películas multidimensionales arriba mencionadas, surgió la necesidad de elaborar un nuevo lenguaje menos preciso, que permitiera excluir la influencia de los estratos de dimensión pequeña. Los pasos necesarios fueron dados en una serie de trabajos, cuyo resumen puede verse en [1*] — [4*]. Sea $H_{k-1}(A)$ un grupo de homologías espectrales $(k-1)$-dimensionales (con coeficientes en el grupo G) de una variedad cerrada $(k-1)$-dimensional, el contorno A en la variedad de Riemann M. Sea $A \subset X \subset M$, donde X es una superficie k-dimensional arbitraria en M. En adelante, como «superficies» examinaremos siempre compactos medibles (por Hausdorff) en la variedad de Riemann. Sea $\{X\}$ una clase de tales superficies X, para las cuales el homomorfismo $i_*: H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(X)$ inducido por una inmersión $i: A \to X$ anula todo el grupo de homologías $H_{k-1}(A)$. Supongamos $\lambda_k = \inf_{X \in \{X\}} \mathrm{vol}_k X$, donde $\mathrm{vol}_k X$ designa, al igual que más arriba, una medida de Hausdorff k-dimensional o volumen de Riemann (si está definido). Entonces resulta que siempre existe (véase, por ejemplo, [1*] — [4*]) una superficie minimal (en el sentido arriba mencionado), o sea, siempre existe un

compacto k-dimensional $X_0 \in \{X\}$ tal que $\mathrm{vol}_k X_0 = \lambda_k$. En los límites de este enfoque se han destacado dos direcciones: la más geométrica (véase [2*], [3*]) y la más funcional (véase [1*], [4*]). Como resultado, fueron demostrados teoremas notables de existencia del mínimo absoluto en la clase de homologías ordinarias, y también casi en todas partes la regularidad de soluciones minimales (Federer, Fleming, Almgren, Reifenberg y otros).

En este enfoque se utilizó mucho la circunstancia de que si $X \supset Y = \overline{Y}$, donde $\dim \overline{X \setminus Y} < k$, entonces $H_k(X) = H_k(Y)$ y $\mathrm{vol}_k X = \mathrm{vol}_k Y$. Esto significa que no surge el problema de los estratos de dimensión pequeña insuperables, que resultan insignificantes desde los puntos de vista topológico y de la métrica. Pero este empleo de homologías ordinarias para definir nociones de «frontera» y «pegadura de contorno» nos alejó del planteamiento clásico anteriormente descrito, ya que si el contorno A es una subvariedad $(k-1)$-dimensional en M y X_0 es una superficie minimal pegante homológicamente al contorno A, entonces, hablando en general, no existe una variedad W con borde A tal, que la superficie X_0 tenga forma $X_0 = f(W)$. En otras palabras, la superficie X_0 puede no admitir una parametrización continua mediante una variedad. Véanse los detalles en [7*] — [9*].

Regresemos ahora a la concepción clásica del problema de Plateau en la clase de superficies-películas parametrizadas por variedades. Estudiaremos la conducta de tales películas en todas las dimensiones, no sólo en la maximal. Para realizar este programa se necesita de un lenguaje más ágil que el de las homologías ordinarias. En relación a esto, recordemos algunas definiciones utilizadas en la creación de este lenguaje. Sea $Y \supset Z$ un par de espacios compactos topológicos.

DEFINICIÓN 5. Llamamos variedad orienta $(k-1)$-dimensional singular del par (Y, Z), a un par (V^{k-1}, f), donde V^{k-1} es una variedad compacta orientada con borde ∂V, y f es una aplicación continua $(V, \partial V) \to (Y, Z)$, es decir, $f(V) \subset Y$, $f(\partial V) \subset Z$. Si $Z = \varnothing$, suponemos $\partial V = \varnothing$. Una variedad singular (V, f) se llama bordante a cero (equivalente a cero), si existen una variedad compacta orientada W^k y una aplicación continua $F: W \to Y$ tales, que: a) la variedad V es una subvariedad regular de borde ∂W, y b) la orientación V coincide con la orientación inducida en la variedad mediante la orientación W, al mismo tiempo, $F|_V = f$, $F(\partial W \setminus V) \subset Z$.

La operación de una reunión no conexa de variedades induce la operación de reunión no conexa de variedades singulares. Dos variedades singulares (V_1, f_1) y (V_2, f_2) se llaman bordantes, si su reunión no conexa $(V_1 \cup V_2, f_1 \cup f_2)$ es bordante a cero.

El conjunto de las clases de bordismos de las variedades orientadas singulares $(k-1)$-dimensionales del par (Y, Z), forma un grupo abeliano $\Omega_{k-1}(Y, Z)$. Si se renuncia a la condición de orien-

tabilidad, una construcción análoga conduce a los grupos $N_{k-1}(Y, Z)$ de los bordismos no orientados. Los problemas 1 y 2 arriba descritos ahora pueden ser formulados otra vez así: Sea A^{k-1} una subvariedad compacta cerrada orientada en M, e $i: A \to X$ sea una inmersión (encaje), donde X es una superficie en M.

PROBLEMA 1. Entre las superficies X que contienen A y tales que el bordismo singular (A, i) es equivalente a cero en X ¿es posible obtener una superficie X_0 tal que tenga propiedades de minimalidad?

La aplicación idéntica $e: A \to A$ define el elemento $\sigma \in \Omega_{k-1}(A)$. Está claro, que la clase de superficies X introducida más arriba se caracteriza por el hecho de que $i_*\sigma = 0$, donde $i_*: \Omega_{k-1}(A) \to \Omega_{k-1}(X)$ es un homomorfismo inducido por la inmersión (el encaje) $i: A \to X$.

PROBLEMA 2. ¿Es posible entre todas las variedades singulares (V, g), $g: V \to M$ bordantes (equivalentes) a una variedad singular dada (V', g'), $g': V' \to M$, obtener tal variedad singular (V_0, g_0) que la superficie $X_0 = g_0(V_0)$ tenga propiedades de minimalidad?

A la par con los grupos Ω_{k-1} y N_{k-1} utilizaremos los grupos Ω^p_{k-1} de los bordismos singulares por módulo p. Los grupos Ω_*, N_*, Ω^p_* satisfacen seis (de los siete) axiomas de Steenrod-Eilenberg, es decir, son teorías de homologías extraordinarias generalizadas. Pero, a diferencia de la teoría de homologías ordinaria, los grupos de bordismos del punto, hablando en general, son no triviales en las dimensiones positivas. Esto es una diferencia significativa de la teoría de homologías ordinaria, ya que las homologías ordinarias del punto son iguales a cero en todas las dimensiones excepto la nula.

Puesto que las superficies minimales tienen, hablando en general, singularidades (y estas singularidades pueden ser muy complicadas), entonces para utilizar la teoría de bordismos en los problemas de variación se ha hecho necesario ampliar el dominio de definición de esta teoría desde la clase de los complejos celulares a la clase de superficies (es decir, compactos medibles en la variedad de Riemann). Este proceso es análogo a la construcción de las homologías espectrales en el caso de la teoría de homologías ordinaria.

En adelante, hablando sobre los bordismos de superficies siempre tendremos en cuenta precisamente los bordismos espectrales. Ya que los grupos N_* y Ω^p_* son grupos compactos (en caso de complejos celulares finitos), su expansión en la clase de superficies no encuentra obstáculos. Con la teoría de bordismos Ω_* es necesario tratarse con mayor cuidado, a saber, hace falta examinar los grupos $p\Omega_* = \Omega_* \otimes_{\mathbb{Z}} Q_p$, donde Q_p es un grupo de números enteros p-ádicos. Véanse los detalles en [11*].

III. Formulación del teorema de existencia de las superficies globales minimales que realizan el mínimo absoluto de la funcional de volumen multidimensional.

Sean: M, una variedad compacta suave cerrada de Riemann; h, una de las teorías de bordismos arriba enumeradas; A, una superficie fijada — contorno en la variedad M. Consideremos una clase de superficies X en la variedad M definida más arriba en los problemas 1 y 2. A esta clase la llamaremos variacional y la designemos por B. En el caso del problema 1 las superficies de la clase B pegan el contorno A en el sentido de bordismos; en el caso del problema 2, las superficies de la clase B realizan cierto elemento no trivial de un grupo de bordismos de la variedad M. Entonces en cada clase variacional de este tipo surge el problema de obtención de la superficie minimal. Para cada superficie X de la clase B construimos su estratificación $X = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \ldots$, donde S^k es un subconjunto maximal en el conjunto $X \setminus A$, que tiene en cada punto la dimensión k; luego, S^{k-1} es un subconjunto maximal en $X \setminus A \setminus S^k$, que tiene en cada punto la dimensión $k-1$, etc. (véanse [7*], [8*], [11*]). A los subconjuntos S^i los llamaremos estratos. Si éstos son medibles, entonces queda definido un volumen estratificado $SV(X) = (\mathrm{vol}_k S^k, \mathrm{vol}_{k-1} S^{k-1}, \ldots)$, que se representa como un vector con k coordenadas. Variando la superficie X en la clase de variaciones tolerables, es decir, quedándose siempre en la clase variacional B, cambiamos el vector de volumen estratificado de la superficie. El problema consiste en obtener una superficie con volumen estratificado mínimo en la clase dada B. El vector mínimo de volumen $SV_B = (d_k, d_{k-1}, \ldots)$ lo comprendemos en el siguiente sentido lexicográfico. Al principio minimizamos la primera coordenada $SV(X)$, es decir, buscamos en la clase B una superficie X_k, para la cual se cumple la igualdad:

$$\mathrm{vol}_k S^k = \mathrm{vol}_k X \setminus A = d_k = \inf_{Y \in B} \mathrm{vol}\, Y \setminus A.$$

Si existen tales superficies X_k, minimizamos la segunda coordenada del vector de volumen $SV(X)$. Por eso buscamos en la clase de superficies X_k con la primera coordenada ya mínima (es decir tales, que $\mathrm{vol}_k X \setminus A = d_k$) tal superficie X_{k-1}, para la cual

$$\mathrm{vol}_{k-1} X_{k-1} \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} = \inf_{\{X_k\}} \mathrm{vol}_{k-1} X_k \setminus A \setminus S^k.$$

Esa superficie ya tiene minimales dos primeras coordenadas del vector de volumen. Etcétera. Cada vez minimizamos una siguiente coordenada de volumen estratificado a condición de que todas sus coordenadas anteriores ya están minimizadas y fijadas. Si este proceso está definido correctamente (con exactitud esto es afirmado por el teorema de existencia, véase más abajo), entonces se concluirá en alguna superficie cuyo volumen estratificado ya es global minimal en la clase de todas las superficies de estratificación de la clase variacional B dada. Los números $d_i = d_i(B)$ dependen seguramente

de la clase B. Un punto central de este planteamiento y solución del problema de Plateau en los términos de bordismos, consiste en la introducción por el autor del presente suplemento de la noción de volumen estratificado y del estudio de los métodos de su minimización en todas las dimensiones (véanse [7*] — [9*], [11*]). En particular, el desarrollo ulterior de esta idea permitió después demostrar la existencia de las superficies globales minimales en cada clase homotópica (véase [12*] Dao Chong Tji.

TEOREMA 1. (teorema básico; véanse [7*] — [9*], [11*]). *Sea M^n una variedad compacta suave cerrada tal, que $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$, donde $\pi_i(M)$ son grupos homotópicos de M y $A \subset M$ es un contorno fijado, una superficie. Consideremos una clase arbitraria no vacía variacional B definida con ayuda de los bordismos (véase más arriba). Entonces en la clase B siempre existe una superficie global minimal X_0 cuyo volumen estratificado $SV(X_0) = (d_k, d_{k-1}, \ldots) = SV_B$ es minimal. Esa superficie tiene una estratificación definida de una manera biunívoca (es decir, partición en estratos) $X_0 = A \cup S^k \cup \cup S^{k-1} \cup \ldots$, donde cada subconjunto S^i excepto de, puede ser, un conjunto de medida i-dimensional nula, el cual se compone de puntos singulares, es una subvariedad suave minimal i-dimensional en la variedad M (es decir, la curvatura media es igual a cero). Con eso, $d_i = \mathrm{vol}_i S^i$.*

COROLARIO 1. *Sean cumplidos los supuestos del teorema 1 y sea B una clase variacional de los problemas 1 y 2 (véase más arriba). Entonces, en esa clase hay una superficie global minimal (puede ser, con las singularidades que llenan el conjunto de medida nula en cada estrato), que es solución del problema de Plateau:* a) *en el caso del problema 1 esa superficie es minimal entre todas las superficies que pegan el contorno A en el sentido de bordismos, o sea, que admiten una parametrización continua con ayuda de una serie de variedades con borde A;* b) *en el caso del problema 2 esa superficie es minimal entre todas las superficies, que realizan un elemento dado del grupo de bordismos de una variedad abrazante.*

En realidad, esos resultados son corolarios de un teorema más general de la existencia de las superficies globales minimales demostrado en [7*], [8*], [11*] para el caso de las llamadas teorías extraordinarias (generalizadas) de (co)homologías. Aquí no vamos a detenernos en esto, ya que la descripción de las teorías extraordinarias exigiría utilizar un material complementario. Damos un solo ejemplo del problema variacional multidimensional formulado en términos de cohomologías extraordinarias.

Sea dado en la variedad M un espacio fibrado vectorial estable no trivial ξ. Consideremos una clase variacional de todas las superficies $X \subset M$ tales, que la restricción de ξ en X es estable no trivial como antes. Entonces, entre tales superficies sin falta se hallará una global minimal (en el sentido de volumen estratificado).

Hemos considerado más arriba dos problemas independientes: de la pegadura de contorno y de realización de los ciclos. Empero, un problema más natural es el mixto, en el cual se busca una superficie minimal que pega al mismo tiempo el contorno y realiza algunos ciclos en una variedad abrazante. Describamos brevemente la resolución de ese problema mixto de Plateau.

Sea h una de las teorías de bordismos (véase más arriba) y sea $L = \{L_p\}$ un juego fijado de los subgrupos $L_p \subset h_p(A)$, donde p son números enteros. Luego, sea $L' = \{L'_q\}$ un juego fijado de los subgrupos $L'_q \subset h_q(M)$.

DEFINICIÓN 6. Por $B(A, L, L')$ designamos a la clase de todas las superficies X en la variedad M tales, que: 1) $A \subset X \subset M$, 2) $L \subset \subset \operatorname{Ker} i_*$, 3) $L' \subset \operatorname{Im} j_*$, donde $i: A \to X$ y $j: X \to M$ son inmersiones.

Claro, que las clases $B(\varnothing, 0, L')$ y $B(A, L, 0)$ coinciden con las clases variacionales B introducidas por nosotros más arriba en los problemas 1 y 2. Resulta, que en cada una de las clases $B(A, L, L')$ siempre hay una superficie global minimal cuyo volumen estratificado es mínimo en el sentido lexicográfico.

Puesto que este teorema (véase [7*], [8*], [11*]) afirma la existencia de una superficie que minimiza el volumen estratificado compuesto de las sucesiones de los volúmenes de los estratos de la superficie, formulemos ese resultado también en forma de sucesión de afirmaciones sobre la minimalidad de estos estratos.

Sean cumplidos los supuestos del teorema 1 y sea $B(A, L, L') = B$ una clase variacional no vacía arbitraria consistente en las superficies del tipo topológico indicado. Sea k el mínimo de los números enteros s, $s < n$, para los cuales $d_s = d_s(B) < \infty$, $3 \leqslant k \leqslant n$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones sucesivas.

1) Existen superficies, cuyo volumen mayor (es decir, volumen vol_k) es global minimal. Más exactamente, si $\{X\}_k$ es la clase de todas las superficies X tales, que $X \in B$ y $\operatorname{vol}_k X \setminus A = d_k = \inf_{Y \in B} \operatorname{vol}_k Y \setminus A$, entonces afirmamos que esta clase no es vacía y que $d_k < \infty$. En el caso, cuando $d_k > 0$, cada superficie X de la clase variacional $\{X\}_k$ contiene un subconjunto unívocamente definido k-dimensional (o sea, el cual tiene dimensión k en cada su punto) $S^k \subset X \setminus A$ tal, que $A \cup S^k$ es un compacto en una variedad abrazante. Con eso un estrato k-dimensional de la superficie X, es decir, el conjunto S^k contiene un subconjunto Z_k (supuestamente, vacío), donde $\operatorname{vol}_k Z_k = 0$ y $S^k \setminus Z_k$ es una subvariación suave k-dimensional en M sin borde y siempre denso en S^k. Z_k es el conjunto de todos los puntos singulares k-dimensionales de la superficie X. Con eso, $\operatorname{vol}_k S^k = \operatorname{vol}_k X \setminus A = d_k$. Si $d_k = 0$, supongamos $S^k = \varnothing$. En este caso la superficie no tiene estrato de dimensión k.

2) Hay superficies que tienen un global minimal que no sólo es el volumen mayor, sino su siguiente volumen de dimensión menor en unidad. Este volumen siguiente se calcula para un estrato de dimensión correspondiente contiene en la superficie. Más exactamente, si $\{X\}_{k-1} \subset \{X\}_k$ es una clase de todas superficies X tales, que $X \in B$, $\mathrm{vol}_k X \setminus A = d_k$, es decir, $x \in \{X\}_k$ y, además,

$$\mathrm{vol}_{k-1} X \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} = \inf_{Y \in \{X\}_k} \mathrm{vol}_{k-1} Y \setminus A \setminus S^k,$$

afirmamos, que esta clase $\{X\}_{k-1}$ es no vacía y $d_{k-1} < \infty$. En el caso, cuando $d_{k-1} > 0$, cada superficie de esa clase contiene un conjunto $(k-1)$-dimensional unívocamente definido $S^{k-1} \subset X \setminus A \setminus S^k$ tal, que $A \cup S^k \cup S^{k-1}$ es un compacto en una variedad abrazante. El conjunto S^{k-1} contiene un subconjunto Z_{k-1} (supuestamente, vacío) de medida nula, o sea, $\mathrm{vol}_{k-1} Z_{k-1} = 0$ y, además, complemento a Z_{k-1} en S^{k-1}, es decir, un subconjunto $S^{k-1} \setminus Z_{k-1}$ es una subvariedad suave $(k-1)$-dimensional en una variedad abrazante, que tiene borde y es siempre denso en S^{k-1}. Al mismo tiempo se cumple la igualdad $\mathrm{vol}_{k-1} S^{k-1} = \mathrm{vol}_{k-1} X \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} > 0$. Pero si $d_{k-1} = 0$, entonces supongamos $S^{k-1} = \varnothing$.

Así sucesivamente hacia abajo por las dimensiones. En el segundo paso se manifiesta que existen superficies que tienen minimales no sólo sus dos primeros volúmenes (es decir, el mayor y el siguiente por su dimensión hacia abajo), sino el tercer volumen de dimensión $k-2$ calculado para un estrato correspondiente de dimensión $k-2$. En otras palabras, cada volumen siguiente resulta ser minimal a condición de que estén fijados de todos los volúmenes minimales anteriores. Por fin, las superficies contenientes la clase $\{X\}_1$ ya son globales minimales en todas las dimensiones es decir, los volúmenes de todos sus estratos son minimales. Es más, cada estrato S^i salvo, posiblemente, un conjunto de puntos singulares de medida nula es, en realidad, una subvariedad suave minimal de dimensión i.

En conclusión, diremos algo sobre el teorema de existencia de las superficies globales minimales en cada clase homotópica. La introducción de una noción nueva de volumen de estratificación y la metódica elaborada de su minimización en [7*], [8*], [11*] han permitido luego resolver el problema de Plateau en cada clase variacional de superficies que se obtienen mediante la homotopía de alguna aplicación fijada $f\colon V \to M$. Resulta que en cada una de estas clases existe una superficie global minimal (véase [12*]). Con todo eso, las nociones de superficie estratificado y de volumen estratificado fueron formuladas en un lenguaje funcional de *varyfolds*, en los términos del cual fue obtenido el teorema de existencia y de la casi total regularidad (por doquier) de soluciones minimales. De manera que en el momento presente está establecida no sólo la

existencia de los mínimos absolutos, sino también relativos (en cada clase homotópica).

IV. Variedades de Lagrange en la teoría de superficies minimales

Estudiando las superficies minimales en $\mathbb{R}^{2n}$, Harvey y Lawson (véase [14*]) demostraron, que cualquier subvariedad de Lagrange local minimal en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ (con una métrica de Kähler estándar) es una subvariedad de Lagrange especial y por eso es absoluta minimal (global minimal). Surge el problema de describir las clases homotópicas de las subvariedades de Lagrange minimales en una variedad de Khäler arbitraria. Con eso, vamos a considerar que métrica de Riemann y estructura simpléctica en una variedad se dan de manera natural mediante una estructura de Kähler. Formulamos un criterio general de minimalidad de las subvariedades maximales isótropas L^n (vamos a llamarlas subvariedades de Φ-Lagrange) en las variedades hermitianas M^{2n}. El criterio se formula en términos de una 1-forma diferencial en L. Empleando este criterio es posible demostrar la minimalidad de muchas subvariedades de Lagrange en las variedades de Kähler. Luego, es sabido que una subvariedad de Lagrange en un espacio simpléctico $\mathbb{R}^{2n}$ (también en algunas otras variedades de Kähler M^{2n}) tiene un invariante topológico-índice de Máslov, y con mayor generalización, tiene clases características α_i de Máslov-Arnold. El autor formuló una hipótesis sobre el hecho de que las clases características de Máslov-Arnold de las subvariedades de Lagrange minimales son triviales. Resultó, que esa hipótesis en realidad es justa, en todo caso para $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$.

DEFINICIÓN 7. a) Sea dada una variedad compleja M^{2n} con una métrica hermitiana g y sea dada una 2-forma Φ sobre ella: $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$. Denominamos plano n-dimensional l en $T_x M^{2n}$, al plano de Φ — *Lagrange*, si l es un plano maximal isótropo de restricción de la forma Φ en un plano tangente $T_x M^{2n}$. En otras palabras, $Jl \perp l$, donde $T_x M^{2n} = Jl \oplus l$. Designamos por $G^*(M^{2n})$ a un espacio fibrado de planos de Φ-*Lagrange* orientables. La base de este espacio fibrado es la variedad M. A la subvariedad L^n en M^{2n} la llamaremos subvariedad de Φ-Lagrange, si todos sus planos tangentes son de Φ-Lagrange. Si la forma Φ es cerrada, entonces la variedad hermitiana es de Kähler y sus subvariedades de Φ-Lagrange son subvariedades de Lagrange en un sentido ordinario. Por eso los resultados enumerables más abajo son justos no sólo para las subvariedades de Φ-Lagrange generales, sino para las subvariedades de Lagrange ordinarias. Luego, para cada subvariedad de Φ-Lagrande L en M^{2n} definamos una aplicación $p: L \to G^*(M^{2n})$, donde $x \to (x, \overrightarrow{T_x L})$. Aquí por $\overrightarrow{T_x L}$ está designado un polivector de Φ-Lagrange asociado con un plano tangente $T_x L$. Está claro, que

la aplicación construida por nosotros p es un análogo de una aplicación gaussiana ordinaria.

b) Sea dada en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ una estructura compleja estándar y una métrica hermitiana. Entonces, una forma de Lagrange especial $\varphi \in \wedge^n \mathbb{R}^{2n}$ se llama forma de tipo $\varphi = \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)$, donde z_i es una base unitaria en $\mathbb{R}^{2n}$ (véase [14*]). Harvey y Lawson demostraron que la propiedad de la forma, de ser de Lagrange especial, no depende de la elección de una base unitaria. Llamaremos a la forma φ sobre una variedad hermitiana *SL-forma*, si para cualquier punto $x \in M$ la restricción de la forma φ en $T_x M^{2n}$ es una restricción de Lagrange especial.

c) A una variedad hermitiana M^{2n} la llamaremos *local calibrable*, si para cualquier punto $x \in M^{2n}$ existe un entorno de $0\,(x)$ con una SL-forma cerrada en él.

Ahora formulemos el criterio de minimalidad local de una subvariedad de Φ-Lagrange L^n en una variedad hermitiana M^{2n}. Todos los teoremas enumerados más abajo 2, 3, 4, 5 fueron demostrados por Le-Hong-Van y A. Fomenko.

Sea $\sum g_{\alpha\beta}\, \bar{d}z_\alpha\, \bar{d}z_\beta$ una métrica hermitiana escrita en las coordenadas locales y que $G\,(z) = \det\,(g_{\alpha\beta})$. Definamos en la variedad M^{2n} una función $\bar{f}\,(x) = \ln \sqrt{G}$ y una forma compleja $\omega\,(x) = \sqrt{G}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$. Entonces, en un espacio fibrado $G^*\,(M^{2n})$ es posible definir (localmente) una función f tal, que $f\,(x,\, l_x) = \bar{f}\,(x)$, donde la aplicación π: $(x,\, l_x) \to x$ es una proyección natural de la variedad $G^*\,(M^{2n})$ en la variedad M^{2n}. Luego, definamos una función θ con período 2π (es decir, la aplicación en una circunferencia) tal, que $\theta\,(x,\, l_x) = (-i) \ln\,(\omega\,(x),\, l_x)$, donde l_x es un polivector unidad que define un plano de Lagrange l_x, y $(\omega\,(x),\, \overrightarrow{l_x})$ es el valor de la forma $\omega\,(x)$ en l_x.

TEOREMA 2. *La 1-forma diferencial* $\psi = Jdf + d\theta$, *donde* J *es un operador de estructura compleja, está definida correctamente en todo el espacio fibrado* $G^*\,(M^{2n})$, *o sea, ella no depende de la elección de las coordenadas complejas locales.*

TEOREMA 3. *La subvariedad de Φ-Lagrange* L^n *en la variedad hermitiana* M^{2n} *es local minimal si, y sólo si, la 1-forma inducida* $p^*\,(\psi)$ *es igual a cero en la subvariedad* L, *donde* p: $L \to G^*\,(M)$ *es una aplicación gaussiana.*

Ese criterio permite demostrar la minimalidad de muchas subvariedades de Lagrange concretas. Por ejemplo, sea $M^{2n} = G_{p,q}\,(\mathbb{C})$ (variedad compleja de Grassmann). Entonces la subvariedad de Lagrange $G_{p,q}\,(\mathbb{R})$ (variedad real de Grassmann) es minimal. Si la subvariedad de Lagrange en la variedad $M^{2n} = \mathbb{C}p^n$ en alguna tarjeta $\{z_i = 1\}$ es un cono y $p^*\,(d\theta) = 0$, entonces L es una subvariedad minimal. El ejemplo de tales conos es una subvariedad $\{z_0 = 1,\, z_j = ke^{i\theta_j},\, k \in \mathbb{R},\, \sum \theta_j = 0\}$. Sea que $M^{4n} = \mathbb{C}P^{2n}$. Definamos la

subvariedad L de la siguiente manera: $L = \{z_0 = 1,\ z_i = \bar{z}_{n+i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Entonces ella es una subvariedad de Lagrange minimal.

TEOREMA 4. *Cualquier subvariedad de Lagrange local minimal L^n en una variedad simpléctica $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, tiene índice de Máslov nulo y clases características triviales de Máslov-Arnold (con grupo de coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ o en $\mathbb{Z}$).* A diferencia del caso $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ la forma ψ introducida más arriba en la variedad ermitiana arbitraria M^{2n}, hablando en general, es no cerrada. La condición de su carácter cerrado está relacionada estrictamente con la geometría de variedad.

TEOREMA 5. *Si la 1-forma diferencial ψ es integrable (es decir, define un espacio fibrado de codimensión uno), entonces, es cerrada.* Luego, la forma ψ está cerrada si, y sólo si, la variedad hermitiana M^{2n} es local calibrable. La variedad de Kähler es local calibrable si, y sólo si, su tensor de Ricci es idénticamente igual a cero.

Bibliografía para el suplemento 1

1. *Новиков С. П., Шмельцер И.* — Функц. анализ, 1981, 15, № 3, с. 54. (*Nóvikov S. P., Shmeltser I.* — Análisis funcional, 1981, N 3, p. 54).
2. *Новиков С. П.* — Функц. анализ, 1981, 15, вып. 4, с. 37—52. (*Nóvikov S. P.* — Análisis funcional 1981, 15, N 4, págs. 37—52).
3. *Новиков С. П.* — ДАН СССР, 1981, 260, № 1, с. 31. (*Nóvikov S. P.* — «Docladi Academii naúk SSSR» 1981, 260, N 1, p. 31).
4. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. — УМН, 1982, 37, № 5, с. 3—49. (*Nóvikov S. P.* Formalismo de Hamilton y análogo multiforme de la teoría de Morse. — «Uspeji matem. naúk» 1982, 37, N 5, págs. 3—49).
5. *Новиков С. П., Тайманов И. А.* — ДАН СССР, 1984, 274, № 1, с. 26. (Работа [5] содержит исправление некоторых неточностей обзора [4]). (*Nóvikov S. P., Taimánov I. A.* — «Docladi Academii naúk SSSR», 1984, 274, N 1, p. 26. (El artículo contiene corrección de algunas inexactitudes del resumen [4].)

Bibliografía para el suplemento 2

1. *Federer H.* Geometric measure theory. — Berlin. Spriger, 1969.
2. *Morrey Ch. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. — Berlin. Springer, 1966.
3. *Reifenberg E. R.* Solution of the Plateau problem, for m-dimensional surfaces of varying topological type. — Acta Math., 1960, 104, n 1, p. 1—92.
4. *Almgren F. J.* Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problem among surfaces of varying topological and singularity structure. — Ann. Math., Ser. 2, 1968, 87, N 2, p. 321—391.
5. *Osserman R.* A survey of minimal surfaces. Uspehi mat. Nauk, 22, 1967, 55—136.
6. *Osserman R.* Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n. — Ann. Math., 1964, 80, N 2, p. 340—364.
7. *Фоменко А. Т.* Многомерная задача Плато в римановых многообразиях. — Матем. сб., 1972, 89 (131), № 3, с. 475—520. (*Fomenko A. T.* Problema de Plateau multidimensional en las variedades de Riemann. — Colección matemática, 1972, 89 (131) N 3, págs. 475—520).
8. *Фоменко А. Т.* Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райфенберга. — ИАН СССР, 1972, 36, № 5, с. 1049—1080). (*Fomenko A. T.* Compactos minimales en las variedades de Riemann e hipótesis de Reifenberg. — «Izvestiya Acad. Naúk SSSR», 1972, 36, N 5, págs. 1049—1080).
9. *Фоменко А. Т.* Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей. УМН, 1981, 36, № 6, с. 105—135. (*Fomenko A. T.* Métodos variacionales multidimensionales en la topología de extremales. «Uspeji matem. naúk», 1981, 36, N 6, págs. 105—135).
10. *Фоменко А. Т.* Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле. — ИАН СССР, 1971, 35, № 3, с. 667—681. (*Fomenko A.* Periodicidad de Bott desde el punto de vista de la funcional de Dirichlet multidimensional. «Izvestiya Acad. Naúk SSSR», 1971, 36 págs. 667—681).
11. *Фоменко А. Т.* Многомерные задачи Плато на римановых многообразиях и экстраординарные теории гомологий и когомологий. Часть I. — В кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, 17. М.: Изд. МГУ, 1974, с. 3—176; часть II — в кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, 18, М.: Изд. МГУ, 1978, с. 4—93. (*Fomenko A. T.* Problemas de Plateau multidimensionales sobre las variedades de Riemann y teorías extraordinarias de homologías y cohomologías. Parte I en el libro: Trabajos del semanario dedicado al análisis vectorial y tensorial, 17. Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1974, págs. 3—176; parte II en el libro· Trabajos del semanario dedicado al análisis vectorial y tensorial, 18. Moscú, Edit. de la Univ. Estat. de Moscú, 1978, págs. 4—93).
12. *Дао Чонг Тхи.* Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато. ИАН СССР, 1986, 44, № 5, с. 1031—1065. (*Dao Chong Tsi.* Multi-

varyfolds y problemas clásicas multidimensionales de Plateau. «Izvestiya Acad. Naúk SSSR», 1986, 44, N 5, págs. 1031—1065).
13. *Фоменко А. Т.* О минимальных объёмах топологически глобально минимальных поверхностей в кобордизмах. — ИАН СССР, 1986, 45, № 1, с. 187—212. (*Fomenko A. T.* Sobre volúmenes minimales de las superficies globales minimales topológicamente en los cobordismos. — «Izvestiya Acad. Naúk», 1986, 45, N 1, págs. 187—212).
14. *Harvey R. Lawson H. B.* Calibrated geometrics. Acta Math., 1982, vol. 148, p. 47—157.

Indice de materias

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la
Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2,
129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.

Mir Publicará

K. Ríbnikov

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Este trabajo reúne un material minuciosamente seleccionado y analizado, lo que permite al autor revelar de una manera implícita las regularidades y los rasgos más característicos del desarrollo de las matemáticas.
La estructura de la obra contribuye a una mejor interpretación de los siguientes problemas:
1. ¿Cuál es el objeto de estudio de la historia de las matemáticas y qué métodos se utilizan para las investigaciones científicas históricas?
2. ¿Cómo se desarrolla el proceso de formación de las representaciones matemáticas y los hábitos de trabajo, utilizando medios matemáticos?
3. ¿Cuándo y cómo se han formado las primeras teorías matemáticas y cuál ha sido la influencia de las mismas en el ulterior desarrollo de esta ciencia?
4. Acerca de las matemáticas elementales y los procedimientos del análisis matemático de los problemas de carácter discreto.
5. Cómo los matemáticos han dominado el arte de la simulación con modelos continuos y, en general, del análisis infinitesimal.
6. Acerca de las transformaciones de las matemáticas en el siglo XVIII en transcurso del cual se formaron las premisas de los fundamentos clásicos de las matemáticas modernas.
7. De cómo en las matemáticas del siglo XIX y comienzos del XX se ha formado el sistema de conceptos e ideas aceptado en la actualidad.
8. Breves nociones acerca del desarrollo de las matemáticas en Rusia y en la URSS.
Este libro, sin duda, será leído con gusto por mucha gente, en especial por los estudiantes de centros de enseñanza superior que se interesan por las matemáticas.